fra le armature in modo proporzionale al tempo, in quanto

$$V_C(t) \;=\; \frac{1}{C} I_0 t\,. \tag{5.60}$$

Si capisce quindi come, a differenza del problema precedente, non esiste in questo caso una soluzione stazionaria in quanto la tensione diverge e prima o poi il sistema … 'esplode' (e non solo in senso figurato…).

5.8.2 Apparenti non conservazione dell'energia

Condensatore collegato direttamente ad un generatore

Il circuito di figura 5.14 mostra un condensatore che, ad un certo istante, viene connesso direttamente ad un generatore di tensione. Quando il condensatore si è caricato completamente, la sua energia vale $Cf^2/2$, mentre l'energia erogata dal generatore vale $f\,(fC) = C\,f^2$. L'energia non si conserva semplicemente perché un circuito del genere non esiste. Basta introdurre una resistenza di collegamento per scoprire, come abbiamo già visto nel paragrafo 5.7, che in effetti, quando il condensatore si è caricato completamente, la resistenza ha dissipato per effetto Joule il 50% dell'energia fornita dal generatore, indipendentemente dal valore di R, dal quale dipende soltanto la rapidità del processo di carica.

Due condensatori carichi e successivamente collegati in parallelo

Consideriamo due condensatori carichi e poi connessi in parallelo, come mostrato in figura 5.15. Come esempio numerico prendiamo $C_1 = 10\,$nF e $C_2 = 5\,$nF, caricati rispettivamante a 1 Volt e 2 Volt. L'energia iniziale vale

$$E_{in} \;=\; \frac{1}{2}\,C_1 V_1^2 + \frac{1}{2}\,C_2 V_2^2\,, \tag{5.61}$$

pari a 15 nJ.

Dopo che i condensatori sono stati collegati, avremo la carica totale dei due condensatori iniziali sul condensatore equivalente:

$$C_f \;=\; C_1 + C_2 \tag{5.62}$$
$$Q_f \;=\; Q_1 + Q_2 = C_1\,V_1 + C_2\,V_2\,. \tag{5.63}$$

Ne segue

$$V_f \;=\; \frac{Q_f}{C_f} = \frac{C_1\,V_1 + C_2\,V_2}{C_1 + C_2}\;: \tag{5.64}$$

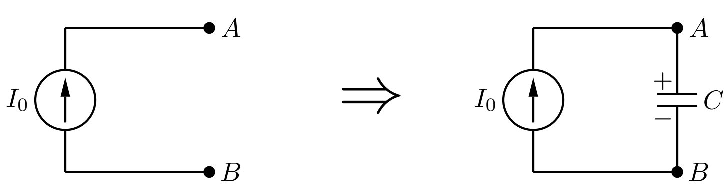

Figura 5.13: Generatore di corrente 'aperto' negli istanti successivi alla sua attivazione.

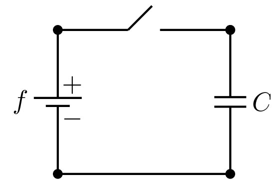

Figura 5.14: Calcolare l'energia erogata dal generatore e quella immagazzinata dal condensatore quando esso si è caricato completamente.

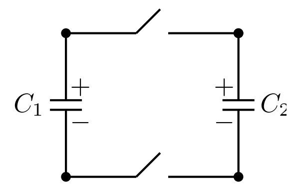

Figura 5.15: Due condensatori, di capacità C_1 e C_2 ,sono caricati rispettivamente a V_1 e V_2 e successivamente collegati (vedi testo).

la tensione finale, ovviamente uguale in entrambi i condensatori, è quindi uguale alla media pesata delle tensioni iniziali, con pesi pari alle capacità dei due condensatori.[6] Essendo i due condensatori alla stessa tensione, la carica totale sarà ripartita proporzionalmente alla capacità di ciascuno (ancora un 'partitore'):

$$Q_{1_f} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\, Q_{tot} \tag{5.65}$$

$$Q_{2_f} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\, Q_{tot}\,. \tag{5.66}$$

Calcoliamo ora l'energia finale del sistema:

$$E_{fin} = \frac{1}{2}\, C_f V_f^2 = \frac{1}{2}\, \frac{(C_1\, V_1 + C_2\, V_2)^2}{C_1 + C_2}\,. \tag{5.67}$$

Come si vede, essa è in genere diversa dall'energia iniziale. Infatti, si può facilmente calcolare che l'energia finale è inferiore di quella iniziale ogni qual volta le tensioni iniziali sono diverse, essendo

$$E_{fin} - E_{in} = -\frac{1}{2}\, C_s\, (V_1 - V_2)^2\,, \tag{5.68}$$

ove abbiamo indicato con C_s la capacità della serie di C_1 e C_2. Quindi la perdita di energia è da imputarsi al trasferimento di carica da un condensatore all'altro. Nel nostro caso numerico abbiamo energie iniziali e finali di 15.0 nJ e 13.3 nJ, con una perdita di 1.7 nJ.

[6]Si noti l'analogia con temperatura di equilibrio di due corpi che formano un sistema isolato: essa è pari infatti alla media pesata delle temperature, ove i pesi sono le capacità termiche.

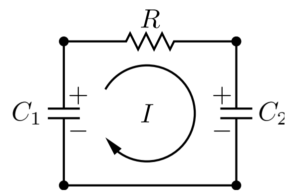

Figura 5.16: Processo di equalizzazione delle tensioni di due condensatori connessi mediante una resistenza.

Anche in questo caso, l'apparente paradosso è dovuto all'aver dimenticato la resistenza fra i condensatori.[7] La figura 5.16 rappresenta un caso realistico che ci permette di calcolare il processo di equalizzazione di tensione fra i due condensatori. L'equazione che descrive il circuito, tenendo conto di versi e polarità della figura, è

$$\frac{Q_1}{C_1} - RI - \frac{Q_2}{C_2} \;=\; 0\,, \tag{5.69}$$

che, tenendo conto che la corrente positiva carica il secondo condensatore e che $Q_1 + Q_2 = Q_{tot}$, possiamo riscrivere come

$$\frac{Q_{tot} - Q_2}{C_1} - R\frac{dQ_2}{dt} - \frac{Q_2}{C_2} \;=\; 0\,, \tag{5.70}$$

da cui

$$\begin{aligned}
R\frac{dQ_2}{dt} &= -\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1}\right) Q_2 + \frac{Q_{tot}}{C_1} && (5.71)\\
\frac{dQ_2}{dt} &= -\frac{1}{RC_s}\,Q_2 + \frac{Q_{tot}}{C_1} && (5.72)\\
&= -\frac{1}{RC_s}\left(Q_2 - \frac{C_2}{C_1 + C_2}\,Q_{tot}\right)\,, && (5.73)
\end{aligned}$$

ove abbiamo indicato con C_s la capacità della serie dei due condensatori, pari a $C_1C_2/(C_1+C_2)$. Siamo arrivati ancora una volta alla solita equazione differenziale che ha come soluzione andamenti esponenziali, il che non deve essere una sorpresa. Non era invece scontato che nella costante di tempo intervenisse la capacità della serie. La carica sul secondo condensatore è quindi data da

$$Q_2(t) \;=\; Q_{2_f} + (Q_{2_{in}} - Q_{2_f})\,e^{-t/\tau} \tag{5.74}$$

con $Q_{2_f} = Q_{tot} \cdot C_2/(C_1 + C_2)$ e $\tau = RC_s$, mentre $Q_1(t)$ è data banalmente come complemento a Q_{tot}.

[7] In realtà ci potrebbero essere anche altre forme di dispersione energetica, ad esempio onde elettromagnetiche, tale da 'stabilizzare' le cariche sulle armature dei condensatori. Il risultato non cambia, essendo l'energia totale dissipata pari a $E_{in} - E_{fin}$, che è una 'funzione di stato'.

Per valutare l'energia dissipata per effetto Joule durante il trasferimento di carica dobbiamo valutarci l'intensità di corrente, da cui otteniamo la potenza:

$$I(t) = -\frac{1}{\tau}\,(Q_{2_{in}} - Q_{2_f})\,e^{-t/\tau} \tag{5.75}$$

$$P_J(t) = R\,I^2(t) = \frac{(Q_{2_{in}} - Q_{2_f})^2}{R\,C_s^2}\,e^{-2t/\tau} \tag{5.76}$$

$$E_J = \int_0^\infty P_J(t)\,dt = \frac{1}{2C_s}\,(Q_{2_{in}} - Q_{2_f})^2 \tag{5.77}$$

$$= \frac{1}{2}\,C_s\,(V_2 - V_1)^2\,, \tag{5.78}$$

riottenendo[8] in modo diretto quanto calcolato precedentemente come differenza fra energia iniziale e finale. Come si vede, l'energia dissipata non dipende dal valore della resistenza, la quale influenza soltanto la rapidità del processo.

5.8.3 Condensatore come effettivo generatore di tensione

Se facciamo il limite per $C_1 \to \infty$ delle varie formule incontrate nella soluzione dell'ultimo problema (limite che in pratica significa C_1 molto maggiore di C_2), otteniamo i seguenti interessanti risultati:

- il condensatore C_2 si carica alla tensione iniziale di C_1;
- la tensione di C_1 non cambia;
- la costante di tempo vale RC_2;
- se poi C_2 era inizialmente scarico, l'energia dissipata da R per effetto Joule è esattamente uguale a quella immagazzinata in questo condensatore.

Insomma, C_1 si comporta a tutti gli effetti come un generatore ideale di tensione. Certo. l'energia immagazzinata in un condensatore di capacità infinita è infinita, ma questo è implicito anche in un generatore ideale di tensione. Comunque, come detto, quello che importa è che il condensatore che funge da generatore abbia una capacità molto maggiore di quello che attinge energia da esso. In fondo, per continuare con la nostra analogia termica, è esattamente quanto accade con un recipiente di capacità termica 'infinita', il quale termalizza qualsiasi altro oggetto alla sua temperatura.

5.9 Effetto di una resistenza in parallelo alla capacità

Complichiamo ora leggermente il nostro problema iniziale, ponendo in parallelo al condensatore un resistore, come mostrato in figura 5.17 Chiaramente,

[8] Nell'ultimo passaggio è stato fatto uso della relazione

$$Q_{2_{in}} - Q_{2_f} = V_2 C_2 - \frac{C_2}{C_1 + C_2}\,(C_1 V_1 + C_2 V_2)\,,$$

etc.

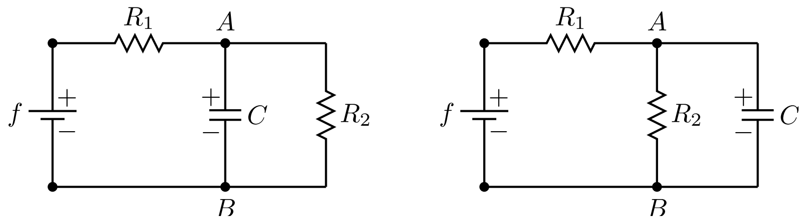

Figura 5.17: Qual'è l'effetto sul processo di carica del condensatore di una resistenza posta in parallelo ad esso? (I due circuiti della figura sono assolutamente equivalente, ma il primo aiuta a pensare il generatore e le due resistenze come un generatore reale secondo l'equivalente di Thevenin.)

affinché il problema sia di un qualche interesse, R_2 deve essere 'confrontabile' con R_1. Infatti, nel caso $R_2/R_1 \to \infty$ il suo effetto è trascurabile, mentre nel caso opposto di $R_2/R_1 \to 0$ la differenza di potenziale ai capi di C sarà sostanzialmente nulla e quindi il circuito si riduce a R_1 collegato direttamente a f.

5.9.1 Soluzione mediante teorema di Thevenin

Il modo più semplice per risolvere il problema, se siamo interessati soltanto alla tensione ai capi di C e alla corrente che fluisce verso di esso è di usare l'equivalente di Thevenin del circuito fra i punti A e B *quando il condensatore è rimosso*. Otteniamo banalmente

$$f_{eq} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} f \tag{5.79}$$

$$R_{eq} = R_1 || R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \,. \tag{5.80}$$

Quindi, l'effetto di R_2 è che il condensatore si caricherà a f_{eq}, con costante di tempo $R_{eq}C$.

5.9.2 Soluzione diretta

Come si sarà notato, nella soluzione precedente si perdono i dettagli delle correnti che scorrono nei resistori. Ad esempio, nel limite di $t \to \infty$ dal circuito equivalente di Thevenin non scorre più corrente, mentre si vede bene, che quando il condensatore è carico i resistori sono attraversati da una corrente di intensità $f/(R_1 + R_2)$. Afrontiamo quindi la soluzione completa, risolvendo l'equazione differenziale del circuito.

Indicando con I_1, I_C e I_2 le correnti di interesse, i cui simboli sono autoesplicativi e prendendo i versi 'naturali' (I_1 verso destra e le altre verso il basso), otteniamo

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{f - V_C}{R_1} \\ I_2 &= \frac{V_C}{R_2} \\ I_1 &= I_2 + I_C\,, \end{aligned}$$

da cui, essendo $I_C = dQ/dt$,

$$\begin{aligned} C\frac{dV_C}{dt} &= \frac{f - V_C}{R_1} - \frac{V_C}{R_2} \\ &= \frac{f}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) V_C \end{aligned}$$

che si può riscrivere come

$$\frac{dV_C}{dt} = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}\left(V_C - \frac{R_2}{R_1 + R_2} f\right)\,,$$

riottenendo quindi per V_C una legge esponenziale con valore asintotico e costante di tempo uguali a quelli ottenuti sopra usando il teorema di Thevenin.

Ricaviamoci ora anche le intensità di corrente in funzione del tempo:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{f - V_C}{R_1} = \frac{f}{R_1}\left[1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}(1 - e^{-t/\tau})\right] \\ I_2 &= \frac{V_C}{R_2} = \frac{f}{R_1 + R_2}(1 - e^{-t/\tau}) \\ I_C &= C\frac{dV_C}{dt} = \frac{f}{R_1}\, e^{-t/\tau}\,, \end{aligned}$$

ove τ, ricordiamo, vale $CR_1R_2/(R_1 + R_2)$. Come si vede, asintoticamente, le correnti che scorrono nei resistori sono le stesse e valgono $f/(R_1 + R_2)$, come ci si sarebbe potuto attendere, in quando, una volta che il condensatore è completamente carico, i due resitori sono attraversati dalla stessa corrente (diventano in serie!). Invece, il motivo per cui all'istante iniziale la corrente che fluisce in R_1 sia massima e pari a f/R_1, mentre quella che fluisce in R_2 è nulla, è dovuto al fatto che all'istante iniziale il condensatore si comporta come un corto circuito. Con il passare del tempo I_1 decresce esponenzialmente verso $f/(R_1 + R_2)$, mentre I_2 cresce esponenzialmente verso lo stesso valore.

Essendo la corrente massima f/R_1, che indichiamo con I_M, possiamo riscrivere le intensità di corrente di interesse come

$$\begin{aligned} I_1 &= I_M\left[1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}(1 - e^{-t/\tau})\right] \\ I_2 &= I_M\,\frac{R_1}{R_1 + R_2}(1 - e^{-t/\tau}) \\ I_C &= I_M\, e^{-t/\tau}\,, \end{aligned}$$

che riportiamo in figura 5.18 per $R_1 = R_2$ in funzione di I_M. Si noti come,

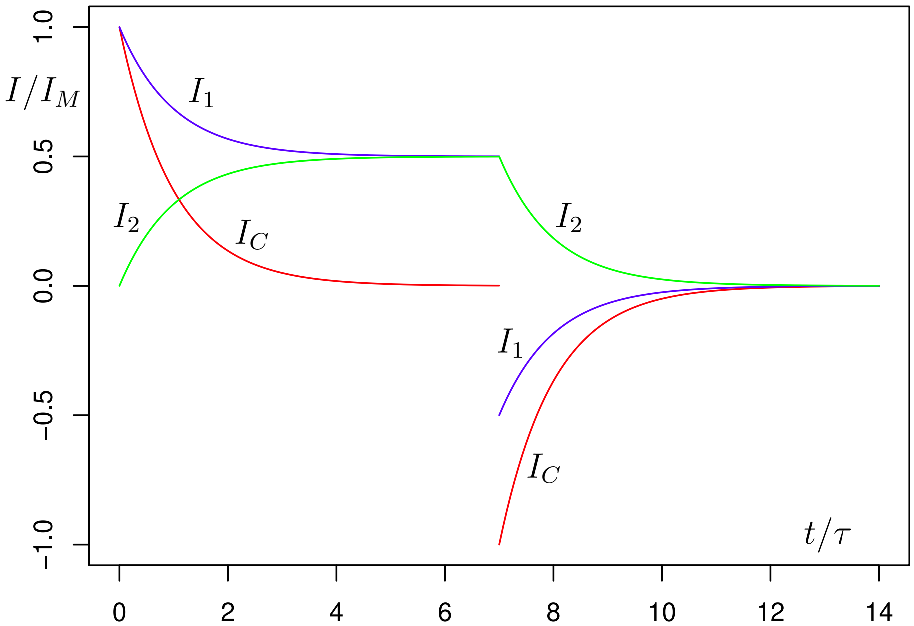

Figura 5.18: Correnti che fluiscono nei vari elementi del circuito di figura 5.17 nel caso $R_1 = R_2$.

istante per istante, valga la relazione $I_1 = I_C + I_2$ e come I_2 riproduca la forma della tensione di carica e scarica del condensatore in quanto essa è pari a V_C/R_2.

È anche interessare confrontare l'espressione di I_V con quanto si ottiene dall'espressione di V_C ottenuta risolvendo il problema mediante il teorema di Thevenin. Essendo infatti

$$V_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2} f \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tag{5.81}$$

abbiamo

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} C \frac{R_2}{R_1 + R_2} f e^{-t/\tau} \tag{5.82}$$

$$= \frac{f}{R_1} e^{-t/\tau}\,, \tag{5.83}$$

ovviamente riottenendo quanto ottenuto direttamente.

Molto più semplice da analizzare è il processo di scarica, ovvero quando portiamo f a zero dopo che il condensatore si è caricato completamente. Il condensatore si scarica sul parallelo fra R_1 e R_2 e la corrente che fluisce dal condensatore si ripartice fra R_1 e R_2 in modo inversamente proporzionale alla resistenza (si tenga comunque conto che con la convenzione adottata, durante la scarica I_C e I_1 sono negative, mentre I_2 è ancora positiva (di valore decrescente).

- $\rightarrow$ problema sulla scarica