Si capisce bene che trattare il problema in modo rigoroso può rendere i problemi complicati a tal punto da renderli *intrattabili*. Quindi si procederà per approssimazioni, un po' come nella meccanica si considerano *piani non deformabili e senza attrito*, *fili inestensibili e senza peso*, *punto materiale*, e così via. In modo analogo parleremo di superfici *perfettamente riflettenti* o di mezzi *perfettamente trasparenti*.

4.4 Reinterpretazione delle leggi dell'ottica: Fermat, Huygens, Maxwell

In tutte le scienze si cerca di spiegare i fenomeni osservati in base a delle 'leggi' di base da cui derivare eventualmente altre leggi, che magari erano note precedentemente come 'principi', in quanto erano dei semplici assiomi dietro i quali non c'era nient'altro. Abbiamo visto ad esempio il 'principio di Archimede', successivamente derivato da considerazioni più generali su fluidi in stato di equlibrio. Così pure le famose leggi di Keplero furono in seguito derivate da Newton alla luce dei suoi principi della meccanica e della sua teoria della gravitazione universale. Anche nel caso dell'ottica le leggi principali, riassunte in figura 4.7, possono essere ottenute alla luce di principi più generali. Qui accenneremo a tre approcci 'classici', ove per classico intendiamo che non entrano in gioco concetti 'moderni' (si far per dire, essendo datati di un secolo) di meccanica quantistica e relativistica, entrando in questioni quantitative soltanto in un caso.

4.4.1 Principio di Fermat

Il principio di Fermat afferma che *la luce segue il percorso che richiede il minor tempo per essere percorso*.[8] La prima cosa che notiamo è che compare finalmente la velocità della luce, in quanto la teoria fenomenologica dalla quale abbiamo cominciato era 'statica' e compatibile con una propagazione istantanea, cosa di per se difficile da accettare in quanto tendiamo naturalmente a pensare che un effetto (ad esempio un lampo di luce che colpisce i nostri occhi) debba seguire nel tempo la causa che l'ha generato (il fulmine avvenuto a chilometri di distanza).

Vediamo quindi come riottenere le leggi di base dell'ottica geometrica alla luce di questo principio. È innanzitutto chiaro che se la luce va da un punto all'altro in un mezzo omogeneo senza subire riflessioni esso seguirà una linea retta, essendo questo il percorso più breve e quindi più rapito, indipendenmente dalla velocità della luce.

Riflessione

Dato per scontato il caso banale della propagazione rettilinea in un mezzo omogeneo, vediamo ora cosa succede nel caso della riflessione. Con riferimento al disegno a sinistra di figura 4.9, nella quale α e β stanno rispettivamente per θ_i e θ_r, siccome la luce si propaga in un solo mezzo dobbiamo semplicemente trovare la relazione fra angolo di incidenza e angolo di riflessione tale che il percorso sia minimo. Chiamando con x quella che nel disegno è indicata con x_1 e con L la somma x_1 e x_2 (prezzo da pagare quando si cerca di usare, per mancanza di tempo, figure rimediate sul web...), la distanza totale sarà data dalla somma dei due tratti verso il punto di

formalismo matematico richiesto per calcolare previsioni quantitative, si raccomanda *"QED. La strana teoria della luce e della materia"* di Richard Feynman.

[8] In realtà può trattarsi anche di un massimo o comunque di un 'punto di stazionario', ovvero di un percorso tale che una piccola variazione da esso produce al primo ordine lo stesso tempo di percorrenza. Ne segue che tale principio ha intrinsecamente qualcosa di insoddisfacente, nel senso che difficilmente si riesce a capire, senza una conoscenza più approfonda della proprietà fisiche della luce, perché il percorso buono possa essere anche quello più lento. Comunque in questi appunti ci occuperemo soltanto del caso di minimo, che è quello di interesse nei casi che tratteremo.

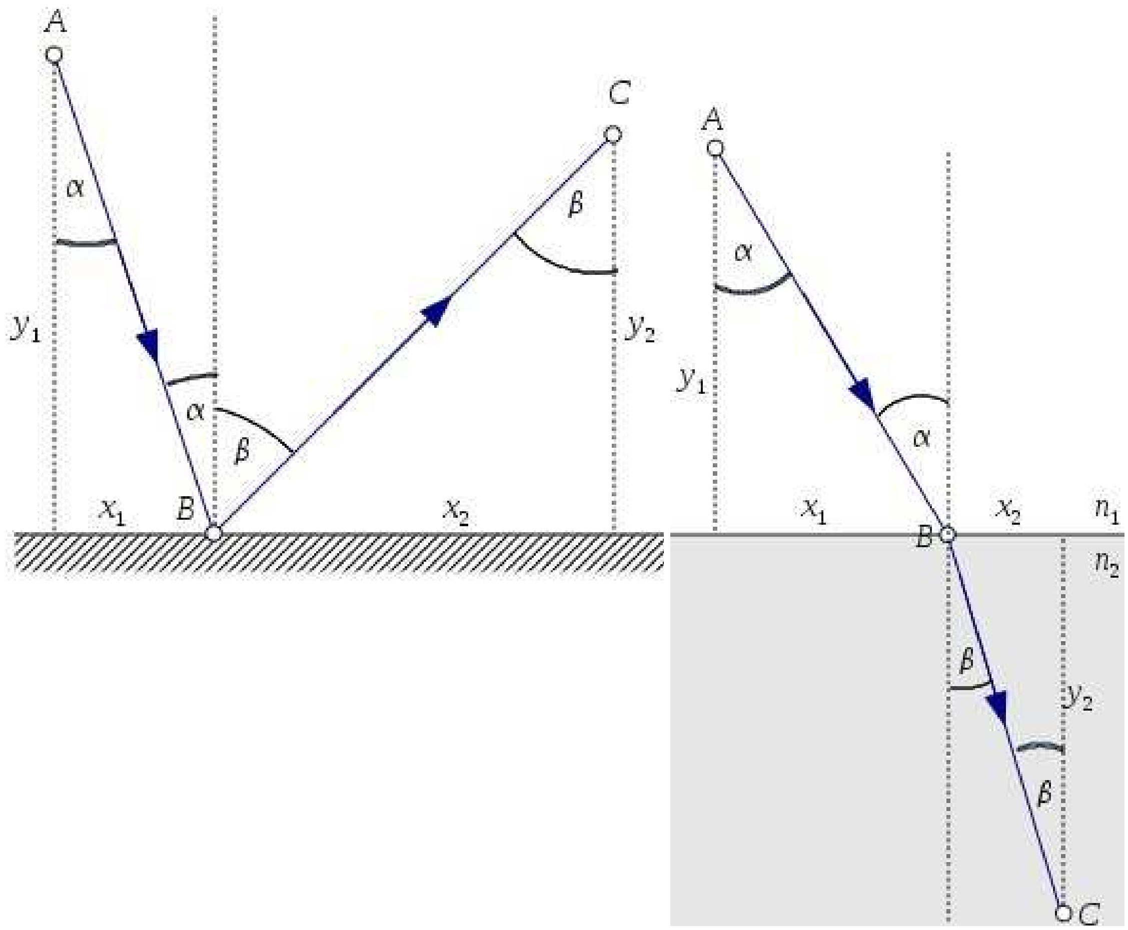

Figura 4.9: Principio di Fermat applicato a riflessione e rifrazione (da `http://commons.wikimedia.org/`).

riflessione

$$s(x) \quad = \quad s_1(x) + s_2(x) = \sqrt{x^2 + y_1^2} + \sqrt{(L-x)^2 + y_2^2}\,, \tag{4.22}$$

la quale varia al variare di x (ad esempio essa vale $y_1 + \sqrt{L^2 + y_2^2}$ per $x = 0$). Per trovare la condizione di minimo calcoliamo la derivata di s rispetto a x

$$\frac{ds}{dx} \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y_1^2}} + \frac{1}{2}\frac{-2\,(L-x)}{\sqrt{(L-x)x^2+y_2^2}} \tag{4.23}$$

$$\quad = \quad \frac{x}{s_1} - \frac{L-x}{s_2} \tag{4.24}$$

e troviamo la condizione per la quale essa si annulla:

$$\frac{x}{s_1} - \frac{L-x}{s_2} \quad = \quad 0\,, \tag{4.25}$$

da cui

$$\frac{x}{s_1} = \frac{L-x}{s_2} \tag{4.26}$$

ovvero

$$\frac{x_1}{s_1} = \frac{x_2}{s_2} \tag{4.27}$$

usando la notazione del disegno. Riconosciamo in x_1/s_1 il seno dell'angolo di incidenza e in x_2/s_2 quello di riflessione, da cui segue $\sin\theta_i = \sin\theta_r$, da cui la ben nota legge $\theta_i = \theta_r$.[9]

Per capire che che il minimo non è un minimo assoluto prendiamo la figura 4.18 sulla quale torneremo nel seguito.

Rifrazione

Nel passaggio da un mezzo all'altro entrano in gioco le diverse velocità. Questo caso può essere parafrasato con il problema del bagnino che per andare a prestare soccorso a un bagnante in difficoltà deve attraversare un tratto asciutto (terreno sodo o sabbioso), correndo, e un tratto di mare, nuotando. Come si capisce bene, il percorso più veloce non coincide con quello più corto in linea d'aria e, al limite, se uno è molto più veloce a correre che a nuotare, deve semplicemente minimizzare la distanza da fare a nuoto. Chiamando v_1 e v_2 le velocità nei due tratti, otteniamo la seguente espressione del tempo totale

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + y_2^2}}{v_2}\,. \tag{4.28}$$

La derivata vale quindi, facendo uso della (4.24),

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1}\frac{x}{s_1} - \frac{1}{v_2}\frac{L-x}{s_2} \tag{4.29}$$

e quindi la condizione di minimo ci dà

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}\,, \tag{4.30}$$

ovvero

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = = \frac{v_1}{v_2}\,. \tag{4.31}$$

Ma siccome sappiamo che il rapporto dei seni è pari all'indice di rifrazione relativo, ovvero, ricordiamo, $\sin\theta_1/\sin\theta_2 = n_{21}$, possiamo reinterpretare l'indice di rifrazione relativo come rapporto delle velocità della luce nei due mezzi:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2}\,. \tag{4.32}$$

Abbiamo così riottenuto la legge di Snell con un *bonus* di interpretazione cinematica, eventualmente verificabile il laboratorio. In particolare l'indice di rifrazione rispetto al vuoto è pari al rapporto fra velocità della luce nel vuoto e velocità della luce nel mezzo, ovvero

$$n = \frac{c}{v}\,, \tag{4.33}$$

[9]Non ci preoccupiamo dell'ambiguità della funzione seno, trattandosi di angoli piccoli.