Fisica per Scienze Naturali - 10 settembre 2013.

Soluzioni

1. (a) La risultante $\vec{F}_{tot}$ è data da $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ e quindi, note le componenti delle due forze, essa è data da

$$\vec{F}_{tot} = (1-5,\, 2+1,\, 3-1)\,\mathrm{N} = (-4,\, 3,\, 2)\,\mathrm{N}\,,$$

da cui segue il modulo:

$$|\vec{F}_{tot}| = \sqrt{(-4)^2+3^2+2^2}\,\mathrm{N} = 5.39\,\mathrm{N}$$

(b) Il prodotto scalare può essere calcolato dalle componenti dei due vettori oppure da modulo e angolo, da cui la relazione

$$F_{1_x}\cdot F_{2_x} + F_{1_y}\cdot F_{2_y} + F_{1_z}\cdot F_{2_z} = |\vec{F}_1|\cdot|\vec{F}_2|\cdot\cos\theta$$

dalla quale segue

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{F_{1_x}\cdot F_{2_x} + F_{1_y}\cdot F_{2_y} + F_{1_z}\cdot F_{2_z}}{|\vec{F}_1|\cdot|\vec{F}_2|}\\
&= \frac{[1\times(-5)+2\times 1+3\times(-1)]\,\mathrm{N}^2}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\,\mathrm{N}\times\sqrt{(-5)^2+1^2+(-1)^2}\,\mathrm{N}}\\
&\approx \frac{-6}{3.74\times 5.20} \approx -0.309\\
\theta &\approx \arccos(-0.309) \approx 1.88\,\mathrm{rad} \approx 108^\circ\,.
\end{aligned}$$

2. (a) La quota dalla quale è partito l'oggetto vale $h = 1\,\mathrm{m}\times\sin 30^\circ = 0.5\,\mathrm{m}$.
Alla fine del piano inclinato l'energia potenziale mgh si è trasformata in energia cinetica $\frac{1}{2}\,mv^2$, ovvero

$$mgh = \frac{1}{2}\,mv^2\,,$$

da cui

$$v = \sqrt{2\,gh} = \sqrt{2\times 9.8\,\mathrm{m/s^2}\times 0.5\,\mathrm{m}} \approx 3.13\,\mathrm{m/s}\,.$$

(b) Il lavoro eseguito della forza di attrito è pari alla variazione di energia cinetica, la quale alla fine è nulla mentre alla fine del piano inclinato essa è pari all'energia potenziale iniziale. Quindi, indicando con $E_c(0)$ l'energia cinetica dopo aver percorso il piano inclinato e $E_p(h)$ l'energia potenziale iniziale:

$$\begin{aligned}
L_A &= \Delta E_c = 0 - E_c(0) = -E_c(0) = -E_p(h) = -mgh\\
&\approx -0.1\,\mathrm{kg}\times 9.8\,\mathrm{m/s^2}\times 0.5\,\mathrm{m} = -0.49\,\mathrm{kg\,m^2s^{-2}} = -0.49\,\mathrm{J}\,.
\end{aligned}$$

(Il lavoro della forza di attrito è negativo!)

3. La terza legge di Keplero afferma che il quadrato del periodo è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita, ovvero, per orbite circolari,

$$T^2 \propto R^3 \,,$$

da cui

$$R \propto T^{2/3} \,,$$

ovvero, date due orbite caratterizzate rispettivamente da R_1 e T_1 e da R_2 e T_2 avremo

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{R_1} &= \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{2/3} \\ R_2 &= R_1 \times \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{2/3} \,. \end{aligned}$$

Nel nostro caso, essendo $T_2/T_1 = 1/2$

$$R_2 = R_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \approx 0.63\, R_1 \,.$$

Quindi il raggio orbitale cercato sarà di circa 4.2 raggi terrestri, ovvero 26 mila chilometri.

4. (a) Essendo il lavoro pari a $\int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$, sostituendo l'espressione della forza abbiamo

$$\begin{aligned} L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \alpha\, x\, dx &= \frac{1}{2}\,\alpha\, x^2 \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}\alpha \cdot (x_2^2 - x_1^2) \\ &= \frac{1}{2} \times 5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \times (2\,\mathrm{m})^2 = 10\,\mathrm{N} \times \mathrm{m} = 10\,\mathrm{J} \,. \end{aligned}$$

   (b) Essendo la variazione di energia cinetica dell'oggetto pari al lavoro compiuto dalla forza stessa ed essendo l'energia cinetica iniziale nulla abbiamo

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = 10\,\mathrm{J}$$

   da cui

$$m = 2 \times \frac{10\,\mathrm{J}}{(2\,\mathrm{m/s})^2} = 5\,\mathrm{Kg} \,.$$

5. (a) Se il palloncino scende a velocità costante vuol dire che la risultante delle forze su di esso è nulla, ovvero la forza di resistenza dell'aria è uguale e opposta alla forza peso (presa di segno negativo in quanto verso il basso – ma si può anche scegliere la convenzione opposta):

$$\begin{aligned} F_A &= -F_p = -(-mg) = mg \\ &\approx 0.06\,\mathrm{Kg} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2} \approx 0.7\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

   (b) In modulo $F_A = \beta v$ e quindi

$$\beta = \frac{F_A}{v} \approx \frac{0.7\,\mathrm{N}}{0.5\,\mathrm{m/s}} \approx 1.4\,\mathrm{N/(m/s)}.$$

   (O formalmente anche $1.4\,\mathrm{kg/s}$, anche se quest'ultima unità di misura rende meno evidente il significato di β.)

6. (a) La quantità di calore ("energia fornita") necessaria per scaldare l'acqua vale $Q = C\,\Delta T = c\,m\,\Delta T$, pari a $1\,\mathrm{cal/(g\,K)} \times 200\,\mathrm{g} \times 60\,\mathrm{K} = 12000\,\mathrm{cal}$, ovvero circa $50\,\mathrm{kJ}$.

   (b) Essendo la potenza pari all'energia fornita nell'unità di tempo, invertendo si ottiene $\Delta t \approx 5 \times 10^4\,\mathrm{J}/(84\,\mathrm{W})$, ovvero circa 600 secondi (10 minuti).

7. Dall'equazione dei punti coniugati

$$\begin{aligned} p &= \frac{q\,f}{q-f} \\ &= \frac{(51.5\,\mathrm{mm}) \times (50\,\mathrm{mm})}{51.5\,\mathrm{mm} - 50\,\mathrm{mm}} \approx 1717\,\mathrm{mm}\,. \end{aligned}$$

   Questa è la distanza oggetto-lente e quindi la distanza oggetto-sensore vale $1768\,\mathrm{mm}$, ovvero circa $177\,\mathrm{cm}$ ($\approx 1.8\,\mathrm{m}$).

8. (a) L'energia cinetica media ($\overline{E_c}$) è pari a $\frac{2}{3}\,k\,T$ con k la costante di Boltzman e T la temperatura assoluta. Ne segue

$$T = \frac{3}{2}\,\frac{\overline{E_c}}{k} \approx \frac{3}{2}\,\frac{3.0 \times 10^{-21}\,\mathrm{J}}{1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}} \approx 326\,\mathrm{K}\,,$$

   ovvero circa 53 gradi centigradi.

   (b) Ricordando che l'energia cinetica media di una molecola è data da $\frac{1}{2}\,\mu\overline{v^2}$ e che la massa μ per l'azoto molecolare vale 28 uma, ovvero $28 \times 1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \approx 4.64 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \overline{v^2} &= \frac{2\,\overline{E_c}}{\mu} \\ &\approx \frac{2 \times 3.0 \times 10^{-21}\,\mathrm{J}}{4.64 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg}} \approx 1.9 \times 10^5\,\mathrm{m^2/s^2}\,, \end{aligned}$$

   ovvero $\sqrt{\overline{v^2}} \approx 440\,\mathrm{m/s}\,.$

9. (a) Essendo

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha\,(T - T_f)\,,$$

   con dT/dt pari a $-0.27\,^\circ\mathrm{C/s}$ quando $T = T_0 = 180^\circ\mathrm{C}$, ci possiamo ricavare

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{dT/dt}{T_0 - T_f} \\ &\approx -\frac{-0.27\,^\circ\mathrm{C/s}}{180^\circ C - 20^\circ C} \approx 1.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{s^{-1}}\,, \end{aligned}$$

   da cui $\tau = 1/\alpha \approx 600\,\mathrm{s}$, o 10 minuti.

   (b) La temperatura in funzione del tempo è data dalla legge esponenziale

$$T(t) = T_f + (T_0 - T_f)\,e^{-t/\tau}\,.$$

   Ne segue che, dopo 20 minuti essa varrà

$$T(20\,\mathrm{min}) = T(2\,\tau) = 20\,^\circ\mathrm{C} + 160\ ^\circ\mathrm{C} \times e^{-2} \approx 42\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

10. (a) Essendo $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$, invertendo la relazione si ottiene

$$\begin{aligned} k &= \frac{4\,\pi^2 m}{T^2} \\ &= \frac{4\,\pi^2\,1\,\mathrm{kg}}{4\,\mathrm{s}^2} \approx 9.9\,\mathrm{kg/s}^2 = 9.9\,\mathrm{N/m} \end{aligned}$$

(b) Essendo il periodo proporzionale alla radice quadrata della massa, la massa sarà proporzionale al quadrato del periodo, quindi per dimezzare il periodo la nuova massa deve valere un quarto di quella che oscillava con 2 secondi, ovvero deve essere di 250 grammi.