## Fisica per Scienze Naturali - 10 settembre 2013.

### Soluzioni

1. Il parallelo che passa per Roma ($42^\circ$ di latitudine) è lungo $\cos 42^\circ$ per la lunghezza dell'equatore, ovvero

$$l_{p42} \approx \cos 42^\circ \times 40000\,\mathrm{km} \approx 29700\,\mathrm{km}\,.$$

Su di esso l'arco che va da Roma a Boston è di circa 83 gradi (da 71W a 12E) e quindi è lungo circa 6850 km ($\approx 83/360 \times 29700$ ).

2. Per ciascuna componente la variazione di quantità di moto è pari all'impulso della forza, ovvero, per un moto lungo l'asse $x$,

$$\Delta p_x|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt$$

e quindi

$$\begin{aligned} p_x(t_2) &= p_x(t_1) + \Delta p_x|_{t_1}^{t_2} & (1)\\ &= p_x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt\,. & (2) \end{aligned}$$

Data l'espressione di $F_x(t)$ data dal problema si ottiene

$$\begin{aligned} p_x(t_2) &= p_x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} (\alpha + \beta t)\,dt & (3)\\ &= p_x(t_1) + \alpha \times (t_2 - t_1) + \frac{\beta}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right) & (4)\\ &= 50\,\mathrm{kg\,m/s} + 5\,\mathrm{N} \times 10\,\mathrm{s} + 1\,\mathrm{N/s} \times 100\,\mathrm{s}^2 = 200\,\mathrm{N\,s}\,. & (5) \end{aligned}$$

(Nota: $1\,\mathrm{kg\,m/s} = 1\,\mathrm{N\,s}$, in quanto 1 N = 1 $\mathrm{kg\,m/s^2}$.)

3. Nello scambio termico il calore ceduto dall'alluminio viene assorbito dall'acqua e, in generale, dati due corpi che costituiscono un sistema isolato deve valere

$$m_1 c_1 \cdot (T_e - T_1) + m_2 c_2 \cdot (T_e - T_2)\,,$$

ove $m_1$, $c_1$ e $T_1$ rappresentano massa, calore specifico e temperatura iniziale del corpo '1' (e idem per il corpo '2'), mentre $T_e$ è la temperatura di equilibrio. Indicando con '1' l'alluminio e con '2' l'acqua (e quindi $T_i$ del testo sta per $T_2$ della formula generale), risolvendo rispetto a $T_2$, che è la nostra incognita, otteniamo

$$\begin{aligned} T_i = T_2 &= \frac{m_1 c_1}{m_2 c_2}(T_e - T_1) + T_e\\ &= \frac{50\,\mathrm{g} \times 0.20\,\mathrm{cal/g^\circ C}}{200\,\mathrm{g} \times 1\,\mathrm{cal/g^\circ C}} \times (23.8\,^\circ\mathrm{C} - 100\,^\circ\mathrm{C}) + 23.8\,^\circ\mathrm{C}\\ &= \approx -3.81\,^\circ\mathrm{C} + 23.8\,^\circ\mathrm{C} \approx 20\,^\circ\mathrm{C} \end{aligned}$$

4. L'integrale dell'accelerazione rispetto alla coordinata spaziale$^{(*)}$ è pari alla variazione di $v^2/2$, ovvero lungo l'asse $x$

$$\Delta\left(\frac{1}{2}v_x^2\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} \equiv \frac{1}{2}v_x^2(x_2) - \frac{1}{2}v_x^2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} a_x(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\alpha}{x}\,dx$$

Quindi

$$\begin{aligned}
v_x^2(x_2) &= v_x^2(x_1) + 2\,\alpha\ \ln(x)|_{x_1}^{x_2} \\
&= v_x^2(x_1) + 2\,\alpha\,(\ln(x_2) - (\ln(x_1)) \\
&= v_x^2(x_1) + 2\,\alpha\ \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\
&= 4\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 + 2 \times 5\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 \times \ln\left(\frac{12\mathrm{m}}{2\mathrm{m}}\right) \approx 22.0\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2\,,
\end{aligned}$$

da cui $v_x(x_2) \approx 4.7\,\mathrm{m/s}$
(*) Chi non ricorda tale relazione può pensare a quella sostanziamlente equivalente che lega il lavoro (inteso come integrale della forza per lo spostamento) alla variazione di energia cinetica, nella quale la massa si semplifica.

5. (a) Il lavoro della forza peso quando la massa $m$ scende di $h$ in prossimità della superficie terrestre vale $mgh$ e quindi per ogni metro cubo di acqua, pari a una tonnellata di massa, su 7 metri,

$$L = mgh \quad\approx\quad 1000\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m/s}^2 \times 7\,\mathrm{m} = 68600\,\mathrm{J}\,.$$

   (b) Se cadono $180\,\mathrm{m}^3$ al secondo la forza di gravità compirà quindi $180 \times 68600\,\mathrm{J}$ al secondo, corrispondente a una potenza di $1.23 \times 10^7$ W, ovvero circa 12 MW.

6. Essendo il moto unidimensionale, baricentro ('centro di massa') e sua velocità sono dati da

$$\begin{aligned}
x_{CM} &= \frac{m_1\,x_1 + m_2\,x_2}{m_1 + m_2} \\
v_{CM_x} &= \frac{m_1\,v_{1_x} + m_2\,v_{2_x}}{m_1 + m_2}
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
x_{CM} &= \frac{1\,\mathrm{kg} \times 2\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{kg} \times 4\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg}} \approx 3.33\,\mathrm{m} \\
v_{CM_x} &= \frac{1\,\mathrm{kg} \times 6\,\mathrm{m/s} + 2\,\mathrm{kg} \times (-3\,\mathrm{m/s})}{1\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg}} = 0\,.
\end{aligned}$$

7. Il nuotatore ha una velocità rispetto all'acqua $v_n$ pari a $100\,\mathrm{m}/(60\,\mathrm{s})$, ovvero circa $1.67\,\mathrm{m/s}$. Quindi le velocità rispetto alla riva nel tratto di andata e in quello di ritorno valgono rispettivamente $v_n + v_f$ e $v_n - v_f$, ove con $v_f$ indichiamo la velocità del fiume. Il tempo totale vale quindi, con ovvi simboli,

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \Delta t_a + \Delta t_r = \frac{l/2}{v_f + v_n} + \frac{l/2}{v_n - v_f} \\
&= \frac{l\,v_n}{v_n^2 - v_f^2} \\
&= \frac{l}{v_n} \times \frac{1}{1 - v_f^2/v_n^2}\,,
\end{aligned}$$

ove l'ultima scrittura serve a far notare come il tempo si riduce a quello che il nuotatore farebbe in piscina nel caso di fiume 'lentissimo' ($v_f \to 0$), ma che tende a infinito quando la velocità del fiume si avvicina a quella del nuotatore ($v_f/v_n \to 1$). Con i nostri dati abbiamo, ricordando che $l/v_n$ è pari a 60 s

$$\Delta t \approx 60\,s \times \frac{1}{1-[(1\,\mathrm{m/s})/(1.67\,\mathrm{m/s})]^2} \approx 60\,\mathrm{s} \times 1.56 = 93.75\,\mathrm{s}$$

8. (a) l'angolo è pari a 30 gradi, in quanto il raggio luminoso è deviato verso la normale quando passa dall'aria a un liquido (e in genere da indice di rifrazione minore a indice di rifrazione maggiore)

   (b) essendo per la legge di Snell $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ ed essendo $n_1$ con ottima approssimazione unitario, si ottiene

   $$\begin{aligned} n_2 &= \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \\ &= \frac{\sin 45°}{\sin 30°} \approx 1.41\,; \end{aligned}$$

   (c) la velocità della luce nei mezzi trasparenti è pari a $c/n$ e quindi

   $$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} \\ &= \frac{l_1}{c} + \frac{l_2\,n_2}{c} \\ &\approx \frac{10\,\mathrm{m}}{3\times 10^8\,\mathrm{m/s}} + \frac{1.41 \times 3\,\mathrm{m}}{3\times 10^8\,\mathrm{m/s}} \\ &\approx 3.33\times 10^{-8}\,\mathrm{s} + 1.41\times 10^{-8}\,\mathrm{s} \\ &\approx 4.74\times 10^{-8}\,\mathrm{s} \approx 47\,\mathrm{ns} \end{aligned}$$

9. a) Siccome le lenti formano immagini reali esse sono convergenti e quindi da presbite (o da ipermetrope).

   b) Dall'equazione dei punti coniugati ci possiamo ricavare l'espressione della distanza focale dalle distanze lente-oggetto e lente-immagine, ovvero

   $$f = \frac{p\,q}{p+q}\,,$$

   ove $q = 38\,\mathrm{cm}$ e $p = h - q = 262\,\mathrm{cm}$, da cui $f \approx 33\,\mathrm{cm}$;

   c) le lenti sono da circa 3 diottrie (una diottria è l'inverso della distanza focale espressa in metri, ovvero in questo caso 1m/0.33m $\approx 3$).

10. La potenza è data da coppia per velocità angolare, quest'ultima espressa nella sua 'unità naturale' (rad/s), che per 3000 giri/min corrisponde a 314 rad/s [= (3000 giri/min)/(60 s/min)$\times$ ($2\pi$ rad/giro)]. Si ottengono così circa 9.4 kW.