Fisica per Scienze Naturali - 24 giugno 2013

Soluzioni

1. Dati $s = v_1 \cdot v_2 \cdot \cos\theta$ e $v = |\vec{v}| = v_1 \cdot v_2 \cdot |\sin\theta|$, dal loro rapporto si ottiene

$$\frac{v}{s} = \frac{|\sin\theta|}{\cos\theta} = |\tan\theta|$$

e quindi, tenendo conto della condizione $0 \le \theta \le 90°$ e del fatto che ci interessa semplicemente l'angolo compreso (indipendentemente dall'orientamento),

$$\theta = \arctan\left(\frac{v}{s}\right) = \arctan(1.73) = 60°.$$

2. La forza esercitata sul piatto della bilancia, tenendo conto della spinta di Archimede, vale $F = \rho_p\, V\, g - \rho_A\, V\, g$, ovvero $F = (\rho_p - \rho_A)\, V\, g$, che viene indicata sulla bilancia come una massa effettiva m^* tale che $m^*\, g = F$ (tutti i simboli sono autoesplicativi). Ne segue

$$(\rho_p - \rho_A)\, V\, g = m^*\, g\,,$$

da cui

$$V = \frac{m^*}{\rho_p - \rho_A}$$
$$m_p = \rho_p\, V = \rho_p \frac{m^*}{\rho_p - \rho_A} = \frac{m^*}{1 - \rho_A/\rho_p}\,.$$

Essendo ρ_A/ρ_p pari circa a $1/20$,

$$m_p = \frac{m^*}{1 - 0.05} \approx 1.053 \times m^*$$
$$= 1.053 \times 30.4\,\mathrm{g} = 32.0\,\mathrm{g}.$$

3. Si tratta di moto uniformemente <u>decelerato</u> (accelerazione $-g$) con velocità iniziale $v_0 > 0$ (positiva verso l'alto). Dopo $t_f = 3\,\mathrm{s}$ la velocità vale $v(t_f) = -v_0$, mentre al tempo $t_f/2$ essa si annulla ($\rightarrow$ quota massima), ovvero $v(t_f/2) = v_0 - g \cdot t_f/2 = 0$, da cui

   (a) $v_0 = g \cdot t_f/2 = 14.7\, m/s$;

   (b) L'altezza massima può essere calcolata dallo spazio di discesa dal massimo, ovvero $1/2 \times g \cdot (t_f/2)^2 = 11.0\,\mathrm{m}$.
   Oppure, più in dettaglio,

$$h(t) = v_0\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$
$$h(t_f/2) = v_0 \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{t_f}{2}\right)^2$$
$$= (g \cdot t_f/2) \cdot \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{t_f}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\, g \left(\frac{t_f}{2}\right)^2$$

4. $F_r = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{2\beta}{r^3}$, nulla per $r = 2\beta/\alpha$ (pari a $4\,\mathrm{cm}$ con i dati del problema).

5. (a) L'inclinazione massima è data quindi dalla relazione

$$m\,g\sin\theta \;=\; \mu_S\, m\, g\cos\theta\,,$$

da cui

$$\tan\theta \;=\; \mu_S\,,$$

e quindi $\theta \approx 25°$.

   (b) La forza totale lungo il piano inclinato vale $mg\,\sin\theta - \mu_D\, mg\,\cos\theta$ e quindi l'accelerazione $g\,[\sin\theta - \mu_D\,\cos\theta]$, pari a circa $2.0\,\mathrm{m/s^2}$.

6. Sulla superficie di un pianeta di raggio R e densità ρ l'accelerazione di gravità g vale $G\,\rho\,V/R^2 \propto \rho\,R$.

   (a) Se R raddoppia e ρ raddoppia g si quadruplica e quindi $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ si dimezza.

   (b) Per riottenere lo stesso periodo che si aveva sulla Terra bisogna quadruplicare l.

7. Nello scambio termico fra due corpi che formano un sistema isolato il calore è trasmesso da un corpo all'altro:

$$\begin{aligned} m_1c_1\,(T_{eq}-T_1) + m_2c_2\,(T_{eq}-T_2) &= 0 \\ C_1\,(T_{eq}-T_1) + C_2\,(T_{eq}-T_2) &= 0\,, \end{aligned}$$

Ne segue, indicando con '1' l'alluminio e con '2' l'acqua

$$c_1 \;=\; \frac{m_2\,c_2\cdot(T_{eq}-T_2)}{m_1\cdot(T_1-T_{eq})}\,,$$

o, meglio ancora,

$$\frac{c_1}{c_2} \;=\; \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{T_{eq}-T_2}{T_1-T_{eq}}\,,$$

la quale fornisce direttamente il rapporto fra i due calori specifici in funzioni del rapporto delle due masse e degli inversi delle variazioni di temperatura. Ne segue

$$\frac{c_1}{c_2} \;=\; \frac{200\,\mathrm{g}}{50\,\mathrm{g}}\cdot\frac{3.8℃}{76.2℃} = 0.1995 \approx 0.20\,,$$

ovvero $c_{Al} = c_1 = 0.20\,\mathrm{cal/g℃}$, da cui si calcola il calore da esso ceduto, pari a $760\,\mathrm{cal}$.

8. La popolazione varia secondo la legge $N(t) = N_0\,e^{-t/\tau}$ e tempo di dimezzamento definito da $e^{-t_{1/2}/\tau} = 1/2$, ovvero $t_{1/2} = \tau\,\ln 2$.

   (a) Dal dato del problema otteniamo quindi $\tau = t_{1/2}/\ln 2 = 7.213\,\mathrm{h}$, ovvero $\approx 7\,\mathrm{h}$ e 13'.

   (b) In analogia al tempo di dimezzamento, il tempo di riduzione a un millesimo vale $t_{1/1000} = \tau\,\ln 1000 = 49.83\,\mathrm{h}$, ovvero poco più di due giorni.

9. (a) Dall'equazione dei punti coniugati segue $q = p\cdot f/(p-f)$, con $f = -6\,\mathrm{cm}$ e $p = 10\,\mathrm{cm}$, segue $q = -3.75\,\mathrm{cm}$.
   L'immagine è virtuale, sia in quanto si tratta di lente divergente, sia come si verifica dal segno negativo di q.

(b) L'ingrandimento (lineare) vale $G = -q/p$, ovvero 0.375 (immagine rimpicciolita e dritta).

(c) ... (verificare che torni con u valori di q e di p calcolati nei punti precedenti).

10. (a) Il momento di inerzia vale $I = 2 \times m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 0.002\,\mathrm{kg\,m^2}$.

    (b) Il momento della forza vale in modulo $M = F \cdot (l/2) = 10\,\mathrm{N/m}$ e quindi dà luogo ad una accelerazione angolare di $\dot{\omega} = M/I = 5000\,\mathrm{rad/s^2}$.