Fisica per Scienze Naturali - 7 luglio 2015

Soluzioni [Per intenti didattici esse sono particolarmente dettagliate.]

1. (Problema analogo a quello del lancio della moneta del quaderno individuale.)

   (a) Essendo l'energia cinetica pari a $\frac{1}{2}mv^2$, se $E_{c_f} = 4.5\,E_{c_i}$, ne segue $v_f^2 = 4.5\,v_i^2$, da cui

   $$v_f \;=\; \sqrt{4.5}\,v_i = \sqrt{4.5} \times 2\,\mathrm{m/s} \approx 4.24\,\mathrm{m/s}\,.$$

   Essendo la sola forza in gioco (trascurando l'aria) quella di gravità, diretta lungo la verticale, la componente orizzontale della velocità rimane invariata e quindi pari a quella iniziale. Da cui segue (prendendo il verso positivo delle y verso il basso)

   $$\begin{aligned} v_{y_f} &= \sqrt{v_f^2 - v_x^2} = 3.74\,\mathrm{m/s} \\ \vec{v}_f &= \{2,\, 3.74\}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

   (b) Conoscendo il vettore velocità, l'angolo rispetto al piano orizzontale può essere ricavato da v_{y_f}/v_x, da v_x/v_f o da v_{y_f}/v_f:

   $$\begin{aligned} \theta &= \arctan(3.74/2) = 61.9^\circ \\ &= \arccos(2/4.24) = 61.9^\circ \\ &= \arcsin(3.74/4.24) = 61.9^\circ. \end{aligned}$$

   (c) L'altezza può essere ricavata dal bilancio energetico:

   $$\begin{aligned} mgh + \frac{1}{2}\,mv_i^2 &= 0 + \frac{1}{2}\,mv_f^2 \\ mgh + \frac{1}{2}\,mv_x^2 &= \frac{1}{2}\,m(v_x^2 + v_{y_f}^2) \\ &= \frac{1}{2}\,mv_x^2 + \frac{1}{2}\,mv_{y_f}^2 \end{aligned}$$

   ovvero

   $$mgh \;=\; \frac{1}{2}\,mv_{y_f}^2\,,$$

   la quale ci insegna che avremmo ottenuto lo stesso risultato considerando la caduta verticale di un oggetto inizialmente fermo.
   Ne risulta

   $$h \;=\; \frac{v_{y_f}^2}{2\,g} = 71.4\,\mathrm{cm}.$$

   (d) Ci ricaviamo il tempo dalla formula che dà la velocità in funzione del tempo in un moto uniformemente accelerato ("$v = g\,t$"), ovvero

   $$t_v \;=\; \frac{v_{y_f}}{g} = 0.382\,\mathrm{s}\,,$$

   oppure da quella dello spazio percorso in un moto uniformemente accelerato ("$1/2\,gt^2$"):

   $$t_v \;=\; \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.382\,\mathrm{s}\,.$$

(e) Infine, si ottiene la distanza dal tavolo dalla velocità orizzontale, costante, per il tempo "di volo", ovvero

$$d = v_x t_v = 76.4\,\mathrm{cm}.$$

2. (Problema analogo a quello dei due oggetti lasciati cadere nell'ipotetico pozzo per il centro della Terra da due distanze diverse)

   (a) I due sistemi hanno lo stesso periodo, in quanto il periodo dipende solo da k e da m e non da x_0. Siccome il primo passaggio per il punto di equilibrio si ha per $t = T/4$, il tempo sarà lo stesso nei due sistemi.

   (b) La velocità può essere valutata

   i. dai dettagli del moto, ovvero ricordando che in un oscillatore armonico

   $$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega t \\ v(t) &= -\omega\, x_0 \sin \omega t\,, \end{aligned}$$

   da cui si vede come $v_M = |v(t = T/4)| = \omega\, x_0$, e quindi la velocità massima è proporzionale all'allungamento iniziale;

   ii. da considerazioni energetiche, ovvero

   $$\frac{1}{2}\, k\, x_0^2 = \frac{1}{2}\, m\, v_M^2\,,$$

   da cui si ricava che $v_M \propto x_0$: idem.

   Quindi la velocità di transito per la posizione del sistema B è doppia rispetto a quella del sistema A.

3. (Pendolo balistico, con dati molto simili a quelli del problema sul tema risolto nel quaderno individuale).

   (a) La velocità dopo l'urto può essere trovata con considerazioni energetiche, essendo

   $$\frac{1}{2}\,(m + M)\, v_f^2 = (m + M)gh\,,$$

   da cui

   $$v_f = \sqrt{2gh} = 0.443\,\mathrm{m/s}\,.$$

   (b) La velocità iniziale del proiettile può essere trovata dalla conservazione della quantità di moto, ovvero

   $$m\, v + 0 = (m + M)\, v_f$$

   e quindi

   $$v = \frac{m + M}{m}\, v_f = 111\,\mathrm{m/s}\,.$$

   (c) La variazione di energia cinetica (finale meno iniziale) vale

   $$\Delta E_c = \frac{1}{2}\,(m + M)\, v_f^2 - \frac{1}{2}\, m\, v^2 = -23.7\,\mathrm{J}$$

   negativa essendo l'urto (completamente) anelastico.

4. La legge è del tipo $N(t) = N_0\, e^{t/\tau}$, con N_0 e τ incogniti e con le informazioni $N(t_1) = N_1$ e $N(t_2) = N_2$, con $t_1 = 2\,\mathrm{h}$, $t_2 = 7\,\mathrm{h}$, $N_1 = 3 \times 10^6$ e $N_2 = 6 \times 10^6$.

   (a) Essendo $N_1 = N_0\, e^{t_1/\tau}$ e $N_2 = N_0\, e^{t_2/\tau}$, dal rapporto abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{N_1} &= \frac{N_0\, e^{t_2/\tau}}{N_0\, e^{t_1/\tau}} = \frac{e^{t_2/\tau}}{e^{t_1/\tau}} = e^{(t_2-t_1)/\tau} \\ \ln\left(\frac{N_2}{N_1}\right) &= \frac{t_2-t_1}{\tau}\,, \end{aligned}$$

   da cui

$$\tau \;=\; (t_2-t_1)/\ln(N_2/N_1) = \frac{5\,\mathrm{h}}{\ln(6/3)} = 7.21\,\mathrm{h}\,.$$

   (b) La relazione fra τ e tempo di raddoppio, che indichiamo qui come t_D ("D" come duplicazione) è data da per definizione dalla condizione $N(t_D) = 2\,N_0$, da cui

$$N(t_D) = 2\,N_0 \;=\; N_0\, e^{t_D/\tau}\,,$$

   da cui

$$\begin{aligned} 2 &= e^{t_D/\tau} \\ \ln 2 &= t_D/\tau \\ t_D &= \tau\, \ln 2 \approx 0.693\,\tau\,, \end{aligned}$$

   nel nostro caso 5.00 ore.
   (In realtà il tempo di raddoppio poteva essere ottenuto immediatamente e senza troppi conti dai dati del problema, in quanto si diceva che la popolazione era passata da 3 milioni a 6 milioni in 5 ore!).

   (c) Per trovare N_0 basta usare τ e il valore di popolazione a un dato tempo. Ad esempio,

$$N(t_1) = N_1 \;=\; N_0\, e^{t_1/\tau}\,,$$

   da cui

$$\begin{aligned} N_0 &= N1/e^{t_1/\tau} \\ &= 3 \times 10^6/e^{2\,h/7.21\,h} \approx 2.3 \times 10^6\,. \end{aligned}$$

   (d) A questo punto $N(10\,h) = N_0\, e^{10h/\tau} = 2.3{\times}10^6\, e^{10h/7.21h} = 2.3{\times}10^6{\times}4 = 9.2{\times}10^6$ (siccome ogni 5 ore la popolazione si raddoppia, in 10 ore essa si quadruplica – e in effetti sarebbe stato sufficiente fare questo raggionamento).

5. Si tratta di un equilibrio termine, nel quale la temperatura di equilibrio è pari alla media pesata delle temperature iniziali con pesi pari alle capacità termiche [relazione che si poteva comunque ricavare dal bilancio termico, richiedendo $C_1(T_e - T_1) + C_2(T_e - T_2) = 0$].

   La parte preliminare del problema era un esercizio sul calcolo del volume di un cilindro ($\pi\,(d/2)^2\, h$), della massa data la densità ($\rho\, V$), della capacità termica dato il calore specifico ($c\,m$) e sulla conversione da joule a calorie (su Wikipedia i calori specifici sono dati in J/kg K!).

Quindi, indicando con '1' l'acciaio, abbiamo $V_1 = 28.3\,\mathrm{cm}^3$, $m_1 = 218\,\mathrm{g}$, $c_1 = 0.120\,\mathrm{cal/g\,K}$, $C_1 = 26.2\,\mathrm{cal/K}$, da cui finalmente, applicando la formula della media pesata

$$T_e = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C2} = 42.3\,°C\,.$$

6. (Esattamente esercizio del quaderno individuale, anche leggermente semplificato, essendo $R_1 = R_2$ e valori numerici "più facili").

   (a) Per trovare la corrente I_O basta valutare la resistenza totale collegata al generatore, data dalla serie di R_0 con il parallelo fra R_1 e R_2.

   $$\begin{aligned} \frac{1}{R_p} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1\,R_2} \\ R_p &= \frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2} = 10\,\Omega \\ R_T &= R_0 + R_p = 20\,\Omega \\ I_0 &= \frac{f}{R_T} = 1.2\,\mathrm{A}\,. \end{aligned}$$

   (b) Essendo R_0 e R_p uguali, ed essendo uguale la corrente che le attraversa, la tensione ai loro capi vale 12 V (ovvero $10\,\Omega \times 1.2\,\mathrm{A}$).

   (c) La corrente I_0 si divide in due fra le resistenze R_1 e R_2 e quindi $I_1 = I_2 = 0.6\,\mathrm{A}$ (valori comunque ottenibili, con ragionamento molto più generale, come tensione ai capi del parallelo diviso la resistenza di ciascuna resistenza: $12\,\mathrm{V}/20\,\Omega = 0.6\,\mathrm{A}$).

   (d) Per le potenze basta applicare una delle varie formule per ciascun elemento, ottenendo quindi $P_0 = 14.4\,\mathrm{W}$, $P_1 = P_2 = 7.2\,\mathrm{W}$.

   (e) La potenza erogata dal generatore è data dal prodotto della tensione per corrente erogata, prodotto pari $P_G = 28.8\,\mathrm{W}$, che chiaramente deve essere pari alla potenza dissipata da tutti i resistori ($P_0 + P_1 + P_2 = 28.8\,\mathrm{W}$).