

Appunti di Fisica ad uso del corso per SMIA

Giulio D'Agostini

8 marzo 2024

Note:

- Questa nota è basata su lezioni di livello simile a quello del corso per SMIA. Si noti quindi come l'ordine delle lezioni è legato a tale corso e non al corso per SMIA.
- L'ordine di presentazione degli argomenti può differire e talvolta ci sono note con chiarimenti per gli studenti di SMIA, identificabili con tale acronimo.
- Per **ulteriore documentazione**, anche sotto forma di link a risorse su internet, si veda il sito del corso, a partire dai **Dettagli delle lezioni** e dalla **Galleria di immagini e link associati**

1 Lezione 1

1.1 Dettagli su questioni matematiche

1.1.1 Potenze, radici e logaritmi

- potenze, radici e logaritmi e loro relazione:
data $x^y = z$:

- potenza: $(x, y) \longrightarrow z$;
- radice: $(y, z) \longrightarrow x$;
- logaritmo: $(x, z) \longrightarrow y$,

da cui, in generale, $\log_b(b^x) = x$, con b la *base*. I logaritmi in base 10 sono detti *decimali*, talvolta indicati per chiarezza con $\log_{10}()$; quelli in base e sono chiamati *naturali* (o *neperiani*), talvolta indicati, sempre per chiarezza, con $\ln()$. Si noti comunque che nelle applicazioni scientifiche $\log()$ sta per logaritmo naturale.

Semplici esempi numerici:

potenza	radice	logaritmo
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} \equiv 4^{1/2} = 2$	$\log_2(4) = 2$
$2^3 = 8$	$4^{1/3} = 2$	$\log_2(8) = 3$
$2^{-2} = 1/4$	$(1/4)^{-2} = 2$	$\log_2(1/4) = -2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} \equiv 9^{1/2} = 3$	$\log_3(9) = 2$
$3^3 = 27$	$27^{1/3} = 3$	$\log_3(27) = 3$

Altri esempi

potenza	radice	logaritmo
$10^4 = 10000$	$10000^{1/4} = 10$	$\log_{10}(10000) = 4$
$10^{-3} = 1/1000 = 0.001$	$(1/1000)^{-1/3} = 10$ $0.001^{-1/3} = 10$	$\log_{10}(1/1000) = -3$ $\log_{10}(0.001) = -3$

- Sull'importanza di e , delle sue potenze e dei logaritmi nella sua base (*logaritmi naturali*) si tornerà nel seguito. Per ora lo si consideri come un preciso numero, approssimato a due cifre decimali come 2.72.
- Alcune proprietà delle potenze e dei logaritmi (illustrate con semplici esempi numerici).

$$2^3 \times 2^5 \times 2^{-1} = 2^{3+5-1} = 2^7 = 128$$

$$\frac{1}{4} \times 8 \times 16 \times \frac{1}{32} = 2^{-2} \times 2^3 \times 2^4 \times 2^{-5} = 2^{-2+3+4-5} = 2^0 = 1$$

$$\begin{aligned} \log_2(2^3 \times 2^5 \times 2^{-1}) &= \log_2(2^{3+5-1}) \\ &= 3 + 5 - 1 = \log_2(2^3) + \log_2(2^5) + \log_2(2^{-1}) \end{aligned}$$

$$2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = \begin{cases} (2^3)^5 \\ 2^{3+3+3+3+3} = 2^{5 \times 3} \end{cases} \Rightarrow (2^3)^5 = 2^{5 \times 3}$$

$$\log(\sqrt{4}) = \log(4^{1/2}) = 1/2 \times \log(4) = \log(2)$$

- Più in generale, per quanto riguarda i logaritmi:

$$\begin{aligned} \log(a \cdot b) &= \log(a) + \log(b) \\ \log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log(a) - \log(b) \\ \log(1) &= 0 \\ \log\left(\frac{1}{a}\right) &= \log(1) - \log(a) = -\log(a) \\ \log(a^b) &= b \log(a) \end{aligned}$$

- Cambiamento di base (prendendo spunto dal problema menzionato a lezione di valutare l'*ordine di grandezza* nel numero di chicchi di grano richiesti dal leggendario inventore degli scacchi).

$$\begin{aligned} n &= 2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^{64} \rightarrow 2^x \\ \log_2(2^x) &= x. \end{aligned}$$

Ma possiamo scrivere 2 come una potenza di 10, ovvero $2 = 10^\alpha$, con α incognita. Ecco come ricavare α :

$$\begin{aligned} \log_{10}(n) = \log_{10}(2^x) &= \log_{10}[(10^\alpha)^x] \\ x \cdot \log_{10}(2) &= \log_{10}[10^{\alpha \cdot x}] = \alpha \cdot x \\ \Rightarrow \alpha &= \log_{10}(2). \end{aligned}$$

Ma, essendo $x = \log_2(n)$, otteniamo la relazione

$$\log_{10}(n) = \log_2(n) \cdot \log_{10}(2).$$

Questa relazione vale per qualsiasi basi b_1 e b_2 e per qualsiasi $x > 0$:

$$\log_{b_2}(x) = \log_{b_1}(x) \cdot \log_{b_2}(b_1).$$

Nel caso speciale di $b_2 = 10$ e $b_1 = 2$ il *fattore di conversione* vale $\log_{10}(2) = 0.301 \approx 0.3$.

$$\log_{10}(x) \approx 0.3 \times \log_2(x) \rightarrow \approx \approx \log_2(x)/3$$

(Simbolo ‘ $\approx \approx$ ’ inventato: *molto approssimativamente*.)

→ **Esercizio proposto:** Applicare al calcolo *approssimativo* dei famosi chicchi di grano.

1.1.2 Equazioni di primo grado (a proposito del quesito sul mattone)

Nota: quando si parla di ‘quesiti’, senz’altro specificare, ci si riferisce al test si autovalutazione.

- Soluzione di equazioni di primo grado: significato ‘fisico’ delle varie operazioni che portano alla soluzione (“portare dall’altra parte cambiando segno”, etc.). Soluzione ‘a fumetti’ del più famoso caso del “mattone che pesa un chilo più mezzo mattone”.
⇒ **da fare!**

1.1.3 Variabili che dipendono da potenze di altre variabili (→ quesiti 5,6 e 7)

- Importanza di capire la dipendenza di una grandezza dalle altre (con riferimento ai quesiti 5-7 del primo file). In particolare

– Nr. 5 (con r il raggio, d il diametro, A_b area di base, c circonferenza della base e h altezza)

$$V = A_b \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

$$V \propto r^2 \cdot h$$

$$V \propto d^2 \cdot h$$

$$V \propto r^2 \propto d^2 \propto c^2 \quad (\text{fissata } h)$$

$$V \propto h \quad (\text{fissate le dimensioni della base}).$$

– Nr. 7 (con r il raggio, d il diametro, A_S area di superficie della sfera):

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$A_S = 4 \pi r^2$$

$$V \propto r^3$$

$$A_S \propto r^2$$

$$r \propto V^{1/3}$$

$$r \propto \sqrt{A_S} = A_S^{1/2}$$

da cui

$$V \propto r^3 \propto \left(A_S^{1/2}\right)^3$$

$$\propto A_S^{3/2}$$

$$A_S \propto V^{2/3}.$$

1.1.4 Quesito del PIL (a proposito delle percentuali)

Il quesito sulla variazione (esagerata!) del PIL era essenzialmente per ricordare che una diminuzione del 15%, per essere pratici, corrisponde a un fattore $(1 - 15/100) \times$, ovvero $(1 - 0.15) \times$, o $0.85 \times$. Similmente, un aumento del 16% corrisponde a un fattore $(1 + 16/100) \times$, ovvero $(1 + 0.16) \times$, o $1.16 \times$.

Quindi nel caso del problema, il valore alla fine del secondo semestre del PIL vale

$$\begin{aligned} \text{PIL}_{fin} &= 1.16 \times (0.85 \times \text{PIL}_{in}) \\ &= (1.16 \times 0.85) \times \text{PIL}_{in} \\ &= 0.986 \times \text{PIL}_{in}, \end{aligned}$$

ovvero il PIL finale è inferiore a quello iniziale (-1.4%).

1.1.5 Quesito sulla ninfea – gli andamenti esponenziali saranno una parte importante del corso!

- Se raddoppia ogni 10 ore, ragionando a ritroso, ogni 10 ore si dimezza. Ma dopo 5 ore non aumenta del 50%!
- Inoltre (quesito addizionale) quanto era grande inizialmente? Se raddoppia ogni 10 ore, in 200 ore raddoppia 20 volte, ovvero di 2^{20} , ovvero oltre un milione di volte. (Senza a fare il conto in dettaglio, si ragiona sul fatto che $2^{20} = 2^{10} \times 2^{10}$, mentre $2^{10} = 1024$. Quindi l'aumento totale è di un fattore $1024 \times 1024 \approx 1000000$ – era davvero piccolina: classico problema ‘troppo matematico’.)

1.2 Misure di densità ... e non solo

→ Dalla densità di solidi regolari alla densità di Terra, Sole e Luna.

- Densità di solidi di forma regolare (per cominciare).
- *Principio di misura* di massa mediante una normale bilancia: equilibrio di forza peso verso il basso e reazione del piatto della bilancia verso l'alto.
- Misura densità di un sasso (**solido irregolare**).
- Misura densità di un blocco di **polistirolo**.

1.3 Legge di gravitazione universale e applicazione al caso di oggetti in prossimità della superficie terrestre

L'intento del quesito nr. 13 del primo test (Appendice A) era chiaramente, oltre a proporre un semplice esempio di ‘inversione di una formula’, di ricordare la ben nota legge di gravitazione universale di Newton fra due masse m_1 e m_e poste a distanza R . Riscriviamola con un cambiamento di simboli, indicando le masse con M e m (‘corpo grande e corpo piccolo’) e la distanza con d ;

$$F = \frac{GMm}{d^2}, \quad (1)$$

omettendo per il momento il simbolo di vettore su F , perché dobbiamo prima imparare cosa metterà a destra dell'equazione in modo tale da avere una uguaglianza fra vettori (vedi prossima lezione).

Alcune precisazioni sulla forza di gravità:

- la forza è sempre attrattiva;
- la formula (1) è valida fra due *punti materiali* posti a distanza d , ma si può dimostrare rigorosamente che essa è valida *anche fra due oggetti sferici omogenei* (in realtà è sufficiente che la densità dipenda solo dalla distanza dal loro centro);
- le due forze sono *uguali e opposte*, come rappresentato nella seguente figura



ovvero

$$\vec{F}_m^{(M)} = -\vec{F}_M^{(m)}$$

→ un sassolino attrae la Terra esattamente con la stessa forza con cui la Terra attrae un sassolino!

- Quando scriviamo semplicemente F , senza il simbolo di vettore, intendiamo la sola *intensità della forza* (‘modulo del vettore \vec{F} ’, ovvero $|\vec{F}|$). Quindi

$$F = \left| \vec{F}_m^{(M)} \right| = \left| \vec{F}_M^{(m)} \right| = \frac{G M m}{d^2}.$$

(sulla costante G torneremo nel seguito).

Come fatto precedentemente per $\vec{a} = \vec{F}/m$, è importante identificare a destra le cause e a sinistra l’effetto: la forza di intensità F è prodotta da due masse poste a distanza d .

2 Lezione 2

2.1 Basi della meccanica (‘Principi di Newton’)

- $\vec{a} = \vec{F}/m$ rappresenta il *secondo principio della meccanica* o *seconda legge di Newton*.
 - A volte (anzi, più spesso) la si trova scritta come ‘ $\vec{F} = m\vec{a}$ ’, o anche più semplicemente ‘ $F = ma$ ’, ‘tollerabile’ in moti unidimensionali (ma è sempre meglio specificare, con le frecce poste sopra i simboli, quali sono le *grandezze vettoriali*). Matematicamente è chiaramente la stessa cosa, ma fisicamente (e addirittura filosoficamente) c’è un importante ‘sfumatura’:

$$\text{effetto} \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \leftarrow \text{cause}$$

L’accelerazione è l’*effetto* della forza. Ovvero la causa dell’accelerazione è la forza, mentre la massa è la ‘concausa’:

$$\begin{aligned} \vec{a} &\propto \vec{F} && \text{(per una data } m) \\ |\vec{a}| &\propto \frac{1}{m} && \text{(per una data } \vec{F}) \end{aligned}$$

→ m ha il ruolo di *inerzia*, ovvero della ‘*riluttanza del corpo a cambiare la sua velocità*’ (il caso di oggetto fermo è un caso particolare, essendo $v = 0$).

– Alcune precisazioni:

- * sia forza che accelerazione sono *grandezza vettoriali*, ovvero caratterizzate da *modulo* (‘valore assoluto’), *direzione e verso* (un’altra grandezza fisica elementare che ha carattere vettoriale è la velocità, indicata quindi con \vec{v});
- * l’accelerazione ha stessa direzione e verso della forza applicata;
- * se ci sono tante forze che agiscono sul corpo, con F indichiamo qui la loro *risultante* (che nel caso unidimensionale corrisponde alla loro somma algebrica, con i segni legati al verso);
- * per il ruolo che essa ha, la massa m che compare nella ‘seconda legge di Newton’ è anche chiamata *massa inerziale*: maggiore è m e minore è \vec{a} a parità di $\text{vec}F$ applicata.

- *Primo principio della meccanica, o prima legge di Newton, o anche principio di inerzia di Galileo*: “niente forza, niente accelerazione” (e quindi velocità costante).

A parte il suo interesse storico, può essere visto come un caso particolare del secondo principio:

$$\vec{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{a} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \text{costante.}$$

- *Primo principio della meccanica, o prima legge di Newton, o anche principio di inerzia di Galileo*: “niente forza, niente accelerazione” (e quindi velocità costante).

A parte il suo interesse storico, può essere visto come un caso particolare del secondo principio:

$$\vec{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{a} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \text{costante.}$$

- *Terzo principio della meccanica, o terza legge di Newton, o principio di azione e reazione*:

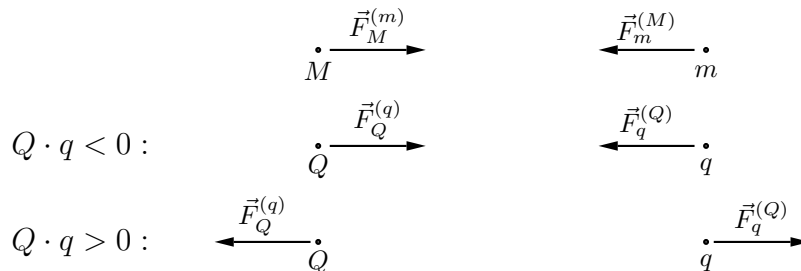
$$\vec{F}_A^{(B)} = -\vec{F}_B^{(A)}$$

(“la forza su A dovuta a B è uguale e opposta a quella su B dovuta ad A ”).

Si noti come l’ordine con cui sono noti i principi non ha nessuna implicazione nessuna dipendenza logica che segua l’ordine ‘primo’ \rightarrow ‘secondo’ \rightarrow ‘terzo’.

2.2 Forza di Newton e forza di Coulomb

Forza gravitazionale e forza elettrica fra oggetti ‘puntiformi’:



- Espressioni simili:

- stessa dipendenza dalla distanza;
- forza gravitazionale solo attrattiva;
- forza elettrica dipende dai segni delle cariche;
- Nell’espressione della forza di gravità di Newton *le masse hanno lo stesso ruolo delle cariche elettriche:*
→ *massa gravitazionale.*

- Se consideriamo il *verso positivo* da M a m (e da Q a q), ovvero *diretto a destra* in figura:

$$F_m^{(M)} = -\frac{G M m}{d^2} \quad \longleftrightarrow \quad F_M^{(m)} = +\frac{G M m}{d^2}$$

$$F_q^{(Q)} = \frac{k Q q}{d^2} \quad \longleftrightarrow \quad F_Q^{(q)} = -\frac{k Q q}{d^2}.$$

le costanti G e k valgono rispettivamente

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

$$k = 8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2},$$

2.3 Quesiti sul galleggiamento

Quesiti del ‘canottino-incudine-piscina’ e dello scioglimento del ghiaccio. L’idea chiave è *un oggetto a galla sposta una quantità d’acqua pari al proprio peso; un oggetto ‘sul fondo’ sposta una quantità d’acqua pari al proprio volume*

- nel caso dell’incudine (o di qualsiasi corpo avente densità maggiore dell’acqua) il libello si abbassa;
- nel caso dell’acqua (assumendo che l’acqua del recipiente e quella del ghiaggio sia la ‘stessa’) il livello non cambia;
- nel caso di un corpo di densità inferiore a quella dell’acqua (che è però deve essere legato, affinché rimanda sul fondo!) il livello aumenta.

3 Lezione 3

3.1 Perché è il sassolino a muoversi verso la Terra e non viceversa?

Qualcuno (e ce ne sono!) potrebbe dubitare del fatto che Terra e sassolino si attraggano con forze uguali e opposte, visto che osserviamo il sassolino ‘cadere verso la Terra, perché attirato da essa’, e non l’opposto. Questo è dovuto alle diverse *inerzie* dei due corpi. Concentrandoci soltanto sui moduli di forza e accelerazione, abbiamo infatti:

$$a_m = \frac{F}{m} = \frac{1}{m} \frac{G M m}{d^2} = \frac{G M}{d^2} = \frac{G M}{R_T^2}$$

$$a_M = \frac{F}{M} = \frac{1}{M} \frac{G M m}{d^2} = \frac{G m}{d^2} = \frac{G m}{R_T^2},$$

ove abbiamo precisato, per chiarezza, che la distanza da prendere in considerazione non è quella fra il sassolino e la Terra (metri o decine di metri), bensì quella *fra il centro del sassolino e il centro della Terra*, e quindi con ottima approssimazione pari al raggio della Terra. Quindi il motivo per cui è il sassolino a muoversi verso la Terra e non il contrario è che l'accelerazione della Terra è mooolto minore di quella del sassolino:

$$\frac{a_M}{a_m} = \frac{m}{M} \ll 1.$$

3.2 Massa inerziale e massa gravitazionale

- La *massa inerziale* è quella che compare nella seconda legge di Newton.
- La *massa gravitazionale* è quella che compare nella formula della forza di gravità.
- *Concettualmente potrebbero essere diverse, ma sperimentalmente sono proporzionali* (non 'uguali').
- Il motivo per cui per entrambe si usa la stessa *massa*, misurata in chilogrammi, è che per praticità il fattore di proporzionalità viene inglobato in G .

Questo è il motivo per cui due corpi in caduta libera sono soggetti alla stessa accelerazione (nelle seguenti equazioni distinguiamo, per chiarezza la massa inerziale m_I da quella gravitazionale m_G):

$$F_G \propto m_G$$

$$a = \frac{F_G}{m_I} \propto \frac{m_G}{m_I} \propto \frac{\propto m_I}{m_I} \propto 1 :$$

→ a indipendente dalla massa! (Vedi sul sito link a esperimenti di caduta libera.)

3.3 Unità di misura della forza

Come è (più o meno) noto, l'unità di misura della forza è il *newton* (simbolo 'N'): è pari alla forza che applicata a una massa di 1 kg provoca un'accelerazione pari a 1 m/s².

$$\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg}} = 1 \text{ m/s}^2.$$

Ne segue

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Si noti, a proposito, la differenza fra i simboli ' m ' e ' m ', il primo per la generica massa, il secondo per 'metro'. (Nella letteratura scientifica le unità di misure sono in caratteri 'normali del testo, i simboli che indicano grandezze fisiche sono invece in corsivo. Chiaramente, scrivendo a mano bisogna prestare attenzione!)

3.4 Dettagli su forze elettriche e forze gravitazionali (fra 'punti materiali')

Vedi alla fine della lezione precedente (messi lì solo per dare un certo ordine al materiale).

3.5 La forza di gravità è moolto minore della forza elettrica

Riprendiamo le costanti G e k viste sopra:

- le unità di misura sono tali per cui, inserite nelle rispettive formule, danno in entrambi i casi 'N', unità di misura della forza.
- il *valore numerico* di G è molto minore di quello di k , ma da questo non si può minimamente affermare che k è maggiore di G , in quanto *non si possono confrontare grandezze non omogenei* (alle elementari ci hanno insegnato che *non si possono sommare o sottrarre patate e pomodori*, come non si possono sommare o sottrarre metri e secondi);
- ma se prendiamo in considerazioni masse 'tipiche' e cariche 'tipiche' si vede come effettivamente la forza gravitazionale è molto minore di quella elettrica (e quindi irrilevante nel funzionamento di apparecchiature elettriche).

Ad esempio se consideriamo un elettrone e un protone posti a una certa distanza (irrilevante, in quanto si semplifica), otteniamo

$$F_e^{(p,\text{gravità})}/F_e^{(p,\text{elettricità})} = \frac{G m_p m_e}{k Q_e^2} = 4.4 \times 10^{-40},$$

essendo $Q_e = -Q_p = -1.602 \times 10^{-19}$ C, $m_e = 0.911 \times 10^{-30}$ kg e $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg. (**Esercizio raccomandato:** si verifichi il risultato, facendo i conti i dettaglio, anche per quanto riguarda le unità di misura, che alla fine si devono semplificare in quanto un rapporto fra forze è un numero puro.)

3.6 Alcune precisazioni sulle misure ('measurements' – 'misurazioni')

- Innanzitutto distinguiamo fra *misure dirette* e *misure indirette*:
 - quelle *dirette* sono quelle ottenute leggendo il valore su uno strumento, opportunamente tarato (massa su una bilancia, temperatura su un termometro, velocità su un tachimetro, etc.):
 - quelle *indirette* sono quelle ottenute elaborando opportunamente le informazioni ottenute da misure dirette.

Ad esempio:

- * misura di velocità media, basata su misure dirette di Δx e Δt , e *calcolando* quindi $v_m = \Delta x/\Delta t$;
- * misura dell'area di un foglio A4 dalle misure dirette, mediante righello, dei due lati.

Nota: in entrambi i casi non è corretto dire "ho calcolato la velocità" o "ho calcolato l'area", bensì bisogna dire "ho misurato ...", anche se per ottenere il valore finale sono stati eseguiti dei calcoli.

(Per intenderci, i fisici del CERN hanno misurato la massa del bosone di Higgs, anche se ottenerne il valore hanno eseguito tantissimi calcoli!)

- Ogni misura si basa su un *principio di misura*. Ad esempio:
 - uguaglianza di due forze peso nel caso di bilancia a due piatti avente i bracci esattamente uguali (altrimenti si tratta di uguaglianza fra due 'momenti di forze', detti anche 'coppie');

- equilibrio fra forza peso e forza di una molla nel caso di normali bilance;
- dilatazione in funzione della temperatura, nel caso di termometri a fluidi o metallici;
- variazione di una caratteristica elettrica in funzione della temperatura, nel caso di termometri elettronici.

Nota: per capire cosa si è effettivamente misurato e se ci sono eventuali effetti spuri è importante aver chiaro il principio di misura (vedi ad esempio il caso della massa del blocco di polistirolo, la quale non può essere ottenuta mediante semplice misura diretta di quanto letto sul display della bilancia!)

- I risultati delle misure vanno dati con
 - *opportuna* unità di misura;
 - un numero di cifre che corrisponda effettivamente all'informazione ottenuta dalla misura (*cifre significative!*).

Per unità di misura opportuna si intende il fatto che, se siamo interessati a una densità, è vero che nel Sistema Internazionale le unità di base di massa e lunghezza sono chilogrammi e metro, ma non per questo dobbiamo sentirci obbligati a riportare il risultato in kg/m^3 : può essere più 'informativo', nel senso di più facilmente intuibile un risultato dato in g/cm^3 o in kg/m^3 (ovvero kg/L).

Sulle cifre significative torneremo nel seguito, ma è chiaro che se una sfera ha massa 290.43 g e diametro 3.74 cm, riportare il risultato come $27.39134947 \text{ g}/\text{cm}^3$, usando il valore numerico che ci dà la calcolatrice, *non ha senso*.

→ Qual'è il *valore ragionevole* da riportare?

3.7 Unità di misura e cambiamento di unità

Il problema 5 del secondo test di autovalutazione aveva lo scopo sia di fare facili conti sulla velocità, con alcuni chiarimenti, ma soprattutto quello di cominciare ad abituarsi ad usare **sempre** le unità di misura e a imparare, quando serve, a cambiarle.

La prima domanda era banale, soprattutto se, per semplificare i conti, si arrotonda la lunghezza del percorso 'nominale' (quello effettivo dipende da corridore a corridore, ovviamente) a 42 km.¹ Nella seconda era richiesto di *non usare formule imparate a memoria* (o cercate sul web), ma di fare i passaggi che servono, ragionando sul significato dei diversi passaggi. Otteniamo quindi

$$v = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato}} = \frac{42 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 14 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 14 \text{ km/h}$$

$$= 14 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 14 \frac{10^3 \text{ m}}{3.6 \times 10^3 \text{ s}} = \frac{14 \text{ m}}{3.6 \text{ s}} \approx 3.89 \text{ m/s},$$

ove, per essere pignoli, abbiamo precisato che il *valore numerico* 3.89 non è esatto ma approssimato a due cifre decimali (ma nel seguito scriveremo semplicemente '=').

La cosa importante da capire subito è che le *unità di misura* vanno scritte subito e trattate algebricamente nei conti e *non inventate alla fine*. Per capirci, scrivere

$$v = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato}} = \frac{42}{3} = 14 \text{ km/h}$$

¹Ci si può chiedere qual'è l'errore che si commette nell'arrotondamendo. Essendo il rapporto pari $42 \text{ km} / 42.195 \text{ km} = 0.9954$, l'approssimazione è, per difetto dello 0.46%, ovvero $\approx -0.5\%$. Diciamo che ci sta più che bene per il nostro scopo didattico.

è un **doppio errore**:

- 42 e 3, senza unità di misura, non significano niente in Fisica;
- l'uguaglianza $'42/3 = 14 \text{ km/h}'$ è manifestamente falsa.

⇒ Abituarsi a scrivere sempre le *grandezze fisiche* con il loro *valore numerico* e la loro *unità di misura*.

Per quanto riguarda la terza domanda, si tratta di risolvere un 'problema inverso', rispetto a quello del calcolo della velocità: quanto tempo si impiega a percorrere la distanza di un km se si corre alla velocità costante di 14 km/h?

La prima idea che può venire in mente è quella di scrivere una proporzione (reminiscenze di scuola media):

$$14 \text{ km} : 1 \text{ h} = 1 \text{ km} : x$$

da cui²

$$x = \frac{1 \text{ h} \times 1 \text{ km}}{14 \text{ km}} = \frac{1}{14} \text{ h} = \frac{1}{14} 60 \text{ min} = 4.29 \text{ min} = 4' 17'' .$$

Ancora meglio è se si parte direttamente dalla relazione che lega la velocità allo spazio percorso e al tempo di percorrenza:

$$\text{tempo impiegato} = \frac{\text{spazio percorso}}{v} = \frac{1 \text{ km}}{14 \text{ km/h}} = \frac{1}{14} \text{ h} = \dots$$

riottenendo lo stesso risultato. Quindi il 'passo medio' tenuto dall'atleta è di $4' 17''/\text{km}$.

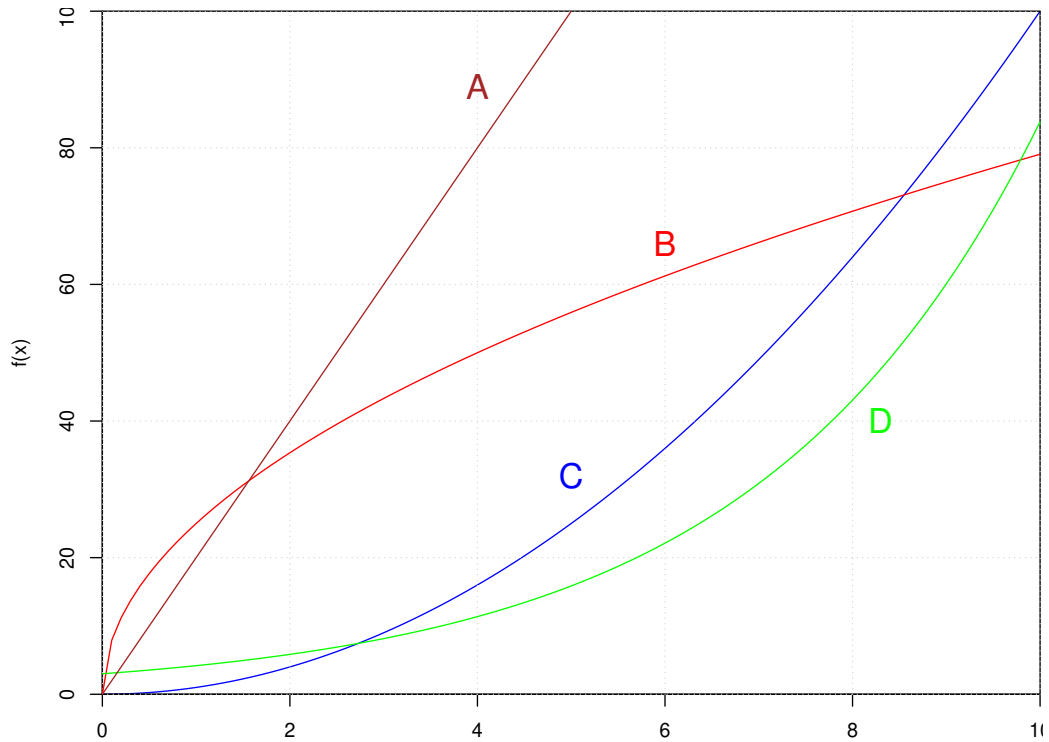
'Morale' ('**take-home messages**', come si dice):

- Quando è possibile, effettuare i conti in più modi (sì, si può sempre sbagliare in tutti i modi provati, ma è improbabile ottenere lo stesso risultato).
- Si usino sempre le unità di misura nei conti: se l'unità di misura del risultato è quella che ci si attende è un 'buon segno' (ma ci potrebbero essere errori nei conti); se è errata, il ragionamento è sicuramente sbagliato. (Ovviamente ci possono essere errori che si compensano, ma non possiamo analizzare la casistica infinita.)
- Infine si controlli sempre l'*ordine di grandezza del risultato*. Se non è ragionevole (ad esempio se fosse venuto 1 minuto al km o 2 ore al km) c'è sicuramente qualcosa di errato nel ragionamento e/ nei conti.

3.8 Pendenze medie, pendenze locali e 'derivate'

Riprendiamo la figura del test di autovalutazione dove erano rappresentate 4 curve e si chiedeva quale di esse mostra un andamento esponenziale.

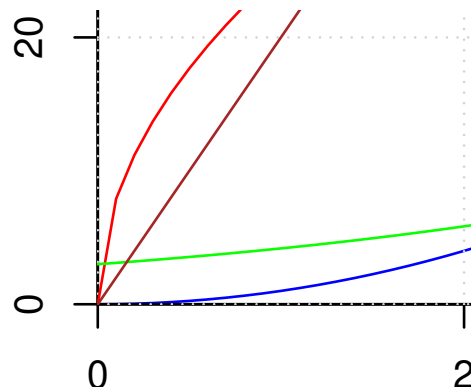
²Per quanto riguarda la trasformazione da 4.29 min a $4' 17''$, si ricorda che $'4.29 \text{ min}'$ sta per $'4 \text{ minuti e } 29 \text{ centesimi di minuto}$. Ma, essendo un minuto costituito di 60 secondi, 29 centesimi di minuti equivalgono a 60×0.29 secondi, ovvero 17.4 s, che approssimiamo tranquillamente a 17 s.



Concentriamoci sulle pendenze delle varie curve: ^x

- la curva *A* ha un andamento chiaramente rettilineo, con *pendenza positiva costante*;
- la *B* ‘parte’ con pendenza molto ripida e poi si ‘ammorbidisce’;
- la *C* parte ‘praticamente piatta’ (pendenza nulla) e poi si fa più ripida a mano a mano che x aumenta;
- anche la *D* ‘sembra partire piatta’, con pendenza che aumenta fino a diventare più ripida della *C* per i maggiori valori di x riportati in figura.

Per capire meglio zoomiamo il plot intorno all’origine:



A parte la partenza ‘a scatto’ della curva *B*, che è un artefatto del programma di grafica,³ in effetti si vede come, a differenza dell’*C*, la *D* parte con pendenza non nulla, anche se piccola. Inoltre, a differenza delle altre tre, per $x = 0$ essa è diversa da zero. Anticipiamo la curva che

³Come impareremo, tale curva parte esattamente verticalmente in $x = 0$!

ha un andamento esponenziale è proprio la D , anche se dobbiamo prima capirne la ragione. Torneremo sul significato delle varie ‘pendenze’ nella prossima lezione, in cui vedremo come valutarle quantitativamente (ma è importante prima farsi un’idea intuitiva del concetto).

3.9 Integrali

- Punto della situazione ed esempi con WolframAlpha.
- Importanza di vedere gli ‘integrali indefiniti’ come semplici... *antiderivate*.
- In Fisica saremo interessati agli *integrali definiti*, visti come *somma di infiniti termini infinitesimi*.

3.10 Integrali in fisica

- Importante aver chiara la differenza fra *antiderivata* (‘integrale indefinito’, secondo i manuali scolastici) e l’integrale, intesa come *somma di infiniti termini infinitesimi*.
- Caso di spostamento, come somma di più spostamenti Δs_i in tempi di percorrenza Δt_i a velocità v_i :

$$\Delta s = \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n v_i \Delta t_i .$$

Quando Δt diventa *infinitesimo* ($\Delta t \rightarrow dt$),

- v_i diventa una funzione continua del tempo, $v(t)$,
- $\Delta s_i \rightarrow ds = v(t) dt$,
- $\Delta \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

4 Lezione 4

4.1 Pendenze media, pendenze locali e derivate

[Lasciato a lettura personale, contenente in modo dettagliato argomenti dei quali si è parlato a lungo nelle lezioni precedenti]

Riprendiamo la figura con le quattro curve del test di autovalutazione, riportata anche nelle lezione precedente.

Concentrandoci sulle tre curve che non hanno pendenza costante, valutiamo la ‘pendenza media’ quando x varia da 0 a 10, ultimo punto del plot. È *un po’* come quando andiamo in montagna. Se dal parcheggio alla cima il dislivello è di 300 m, è chiaro che un sentiero che ci porta su facendoci percorrere una lunghezza di 1 km sarà molto più ripido di uno che invece ci fa percorrere 3 km (ma non è detto che con il primo arriviamo prima, perché potrebbe essere più faticoso e dobbiamo andare più lentamente ed eventualmente fare anche delle soste). La pendenza media, *calcolata come dislivello fratto la distanza percorsa*, nel primo caso vale 0.3, nel secondo 0.1.

In questo caso, misurando la pendenza come variazione di $y = f(x)$ fratto la variazione di x (decisamente più comoda da valutare sul grafico, mentre nel caso dei sentieri per raggiungere la cima è senz’altro più ‘comoda’ la seconda), si vede a occhio che essa è massima per

la C . Seguono poi la D e la B (abbiamo escluso la A dalle nostre considerazioni). A questo concetto grafico di ‘pendenza media’ è associato quello matematico di *rapporto incrementale*:

$$\text{‘rapporto incrementale’}: r_i = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Calcoliamolo per la funzione $y = ax$, ove a è una costante (come nella nostra curva A):

$$r_i(x_1, x_2) = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Per qualsiasi valori di x_1 e x_2 il rapporto incrementale vale sempre a , risultato della definizione matematica in accordo con l’osservazione che la curva A mostrata in figura ha pendenza costante.

Vediamo cosa succede invece nel caso di $y = x^2$:

$$r_i(x_1, x_2) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 + x_1) \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2 : \quad (2)$$

la pendenza media è pari alla somma degli estremi dell’intervallo delle x . Se associamo ora la *pendenza locale* al caso in cui i due punti sono ‘molto vicini’, ovvero $\Delta x \rightarrow 0$, essa corrisponde al caso in cui essi coincidono. Usando quindi il simbolo $p_L(x)$ per indicare la pendenza locale della funzione in corrispondenza del valore x della ‘variabile indipendente’, abbiamo

$$p_L(x) \equiv r_i(x, x) = 2x.$$

Alcune osservazioni:

- se al posto della x^2 abbiamo la funzione ax^2 , con a una costante, il numeratore della (2) sarà moltiplicato per tale costante e quindi otterremo $r_i(x_1, x_2) = a \cdot (x_1 + x_2)$, da cui $p_L(x) = 2ax$;
- se ad ax^2 aggiungiamo il termine bx al rapporto incrementale si aggiunge un termine b e quindi la pendenza locale di $ax^2 + bx$ vale $2ax + b$;
- se inoltre aggiungiamo la costante c , chiaramente essa non contribuisce al rapporto incrementale, e quindi alla pendenza locale;
- infine, quello che abbiamo chiamato ‘pendenza locale’ è noto in matematica come *derivata*, indicata con diversi simboli:
 - se $f(x)$ è la funzione ‘di partenza’, la *funzione derivata* è indicata con $f'(x)$;
 - se la variabile y è legata alla variabile ‘indipendente’ x da una certa funzione, la derivata è anche indicata con dy/dx , ove il simbolo ‘d’ sta per il limite di Δ quando esso è ‘infinitamente piccolo’, ovvero

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{dx}$$

- ugualmente la derivata della funzione $f(x)$ rispetto a x può essere scritta come

$$\frac{df(x)}{dx}$$

o

$$\frac{d}{dx}f(x);$$

- infine si può incontrare il simbolo ‘ ∂ ’ (‘derivata parziale’) al posto di ‘ d ’, come abbiamo visto con *WolframAlpha*. Serve a stressare il fatto che le altre variabili dell’espressione sono considerate fisse (delle costanti, seppur incognite). Comunque, per quello che riguarda questo corso elementare *possiamo* considerare i due simboli equivalenti e utilizzeremo sempre ‘ d ’.

Quindi, ora sappiamo calcolare la funzione derivata della generica $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, che, con le diverse notazioni risulta essere

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2ax + b \\ \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) &= 2ax + b \\ \frac{dy}{dx} &= 2ax + b. \end{aligned}$$

Per quello che riguarda questo corso è sufficiente conoscere le regole elementari di derivazione, tenendo conto che le funzioni che ci interesseranno sono: potenze, esponenziali, logaritmo, seno e coseno.

5 Lezione 5

5.1 ‘Introduzione’ alla trigonometria (nel triangolo rettangolo)

- Triangoli rettangoli simili e applicazione a misure di triangolazione;
- ‘nomi’ di alcuni rapporti di interesse (e osservazione banale che essi dipendono dall’angolo):
 - “cateto adiacente su ipotenusa”: coseno;
 - “cateto opposto su ipotenusa”: seno;
 - “cateto opposto su cateto adiacente”: tangente.

(Le altre funzioni trigonometriche possono essere tranquillamente dimenticate.)

- Definizione del radiante (alla buona, “quando arco è uguale al raggio”), sua ‘adimensionalità’; angoli notevoli (giro, piatto e retto) in radianti e calcolo del fattore di conversione.
- E, parlando di angoli: importanza di memorizzare la velocità (in gradi/giorno) della velocità angolare di Terra (intorno al Sole) e di Luna (intorno alla Terra).

5.2 Dimensioni ‘angolari’ di oggetti e dimensioni angolari di Sole e Luna

Vedi ‘Galleria’

5.3 Approssimazioni notevoli

- Approssimazioni delle funzioni seno e tangente per piccoli angoli: tendono entrambe all’angolo stesso (introdotte graficamente nelle lezioni precedenti, considerando un triangolo rettangolo e ricordando che “il seno è pari al cateto opposto sull’ipotenusa” e la tangente “il rapporto fra cateto opposto e cateto adiacente”):

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta, \text{ per } \theta \ll 1 \text{ (in radianti!).}$$

- Importanti approssimazioni, per $\epsilon \ll 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\epsilon} &\approx 1-\epsilon \\ \frac{1}{1-\epsilon} &\approx 1+\epsilon \\ (1\pm\epsilon)^2 &\approx 1\pm 2\epsilon \\ \sqrt{1\pm\epsilon} &\approx 1\pm\epsilon/2\end{aligned}$$

(→ Vedi lavagna telematica)

- Approssimazione del coseno per $\theta \ll 1$:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \sqrt{1-\sin^2\theta} \\ &\approx \sqrt{1-\theta^2} \\ &\approx 1-\theta^2/2.\end{aligned}$$

5.4 Cinematica e dinamica

5.4.1 Premessa: notazione vettoriale

Un punto nello spazio viene descritto dal vettore $\vec{s}(t)$, le cui componenti *cartesiane* (ci sono anche altri modi per descrivere il moto!) sono $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, ovvero

$$\vec{s}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}.$$

Nello stesso modo, abbiamo per velocità e accelerazione

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \{v_x(t), v_y(t), v_z(t)\} \\ \vec{a}(t) &= \{a_x(t), a_y(t), a_z(t)\},\end{aligned}$$

essendo

$$\begin{aligned}\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} &= \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\} \\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} &= \left\{ \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right\} \\ &= \left\{ \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right\},\end{aligned}$$

ove, al fine di semplificare la notazione, abbiamo ommesso di scrivere esplicitamente che tutte le grandezze possono dipendere dal tempo.

Si noti come

- la notazione vettoriale è un modo per scrivere in modo compatto ‘quello che succede’ lungo le tre coordinate cartesiane;
- *posizione, velocità e accelerazione lungo le tre coordinate si evolvono in modo indipendente*, e solo *collegate soltanto dal tempo*, che è comune;
- le evoluzioni delle varie grandezze in funzione del tempo sono chiamate *equazioni orarie* (vedremo poi le ‘traiettorie’ che sono altre cose).

5.4.2 Due classi di problemi

In genere, a seconda delle informazioni che abbiamo, possiamo avere due tipi di problemi:

$$1) \vec{s}(t) \longrightarrow \vec{v}(t) \longrightarrow \vec{a}(t) \longrightarrow \vec{F}(t)$$

$$2) \vec{F}(t) \longrightarrow \vec{a}(t) \longrightarrow \vec{v}(t) \longrightarrow \vec{s}(t)$$

Di questi due, in base alle conoscenze che si hanno al momento in questo corso, il più facile è il primo, in quanto richiede soltanto

- calcolo di derivate;
- secondo principio di Newton, usato ‘al contrario’ ($\vec{a} = \vec{F}/m \longrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$);
- conoscenza di qualche proprietà dei vettori;

Ovviamente le due classi sono una schematizzazione generale, in quanto potrebbe anche capitare di conoscere $\vec{v}(t)$ ed essere interessati a valutare $\vec{a}(t)$ e $\vec{s}(t)$, come faremo con il moto circolare uniforme.

Si noti come il problema ‘2’ è idealizzato, in quanto assume che la forza dipende soltanto dal tempo ed è la stessa dappertutto.

‘Fortunatamente’ la realtà è più varia e quindi:

- la forza può anche dipendere anche dalla posizione (si pensi alle espressioni generali della delle forze gravitazionali ed elettriche fra punti materiali);
- la forza può anche dipendere dalla velocità (si pensi alla forza di attrito dell’aria).

Lo schema ‘2’ diventa quindi (assumendo che almeno la massa del punto materiale non cambi)

$$\vec{F}(\vec{s}, \vec{v}, t) \longrightarrow \vec{a}(\vec{s}, \vec{v}, t) \longrightarrow \vec{v}(\vec{s}, t) \longrightarrow \vec{s}(t)$$

Vedremo alcuni esempi per i quali è abbastanza facile trovare la soluzione matematica esatta, mentre daremo delle indicazioni generali, con qualche esempio pratico, di come affrontare ‘numericamente’ i casi realistici meno banali.

5.5 Moto rettilineo uniforme

Il moto rettilineo uniforme rappresenta il caso più semplice di moto, caratterizzato da

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 0 \\ \vec{v} &= \text{costante} \rightarrow \{v_x, v_y, v_z\} \text{ costante.} \end{aligned}$$

Essendo quindi v_x , v_y e v_z le derivate (\rightarrow *pendenze!*) delle equazioni orarie $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, queste sono rappresentabili con delle rette del tipo

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_x t \\ y &= y_0 + v_y t \\ z &= z_0 + v_z t. \end{aligned}$$

5.5.1 Dalle equazioni orarie alle traiettorie

Consideriamo per ovvi motivi di rappresentazione grafica un moto rettilineo uniforme che avviene in un piano (x - y). Otteniamo quindi semplicemente

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_x t \\ y &= y_0 + v_y t\end{aligned}$$

Come si vede, x e y dipendono entrambe da t . Quindi ci possiamo costruire la funzione che lega y a x risolvendo la prima rispetto al tempo, e sostituendo tale espressione nella seconda, ossia

$$t = \frac{x - x_0}{v_x}$$

e

$$\begin{aligned}y &= y_0 + v_y \cdot \frac{x - x_0}{v_x} \\ &= \left(y_0 - \frac{v_y}{v_x} \cdot x_0 \right) + \frac{v_y}{v_x} \cdot x \\ &= a + b \cdot x\end{aligned}$$

avendo indicato con b il termine che moltiplica x nell'equazione precedente e con a in termine che non vi dipende.

La nuova equazione

$$y = a + b \cdot x$$

definisce la *traiettoria* rettilinea del *punto materiale* nel piano $\{x, y\}$: si immagini una strada dritta, o un linea ditta in una mappa di un terreno pianeggiante:

- nella traiettoria viene persa l'informazione temporale;
- al più è dato di sapere che il *rapporto fra le componenti* delle velocità si mantiene (o si è mantenuto) *costante*:
→ nemmeno si può dire con certezza che la velocità era costante, ma solo che il rapporto fra v_y e v_x (pari a b) è costante!
- Ogni volta che la traiettoria mostra tratti non lineari (le curve) possiamo dire in quel tratto il rapporto fra le velocità non è (o era) costante e che quindi *almeno una* delle due velocità sta (o stava) cambiando:
→ moto accelerato!

I casi con eccelerazione sono lasciati come esercizio