Test dell'AIDS: soluzione

Italiano scelto a caso si sottopone al test dell'AIDS.
Test non perfetto, come succede in pratica.

Ricordiamo i dati *(Modello semplificato)*:

$$
\begin{aligned}
P(\text{Pos}\,|\,\text{HIV}) &= 100\% \\
P(\text{Pos}\,|\,\overline{\text{HIV}}) &= 0.2\% \\
P(\text{Neg}\,|\,\overline{\text{HIV}}) &= 99.8\%
\end{aligned}
$$

Test dell'AIDS: soluzione

Italiano scelto a caso si sottopone al test dell'AIDS.
Test non perfetto, come succede in pratica.

Ricordiamo i dati *(Modello semplificato)*:

$$
\begin{aligned}
P(\text{Pos}\,|\,\text{HIV}) &= 100\% \\
P(\text{Pos}\,|\,\overline{\text{HIV}}) &= 0.2\% \\
P(\text{Neg}\,|\,\overline{\text{HIV}}) &= 99.8\%
\end{aligned}
$$

Dato *volutamente* **mancante:** probabilità che un italiano scelto a caso (senza nessun'altra informazione su di lui – nemmeno la possibilità di guardarlo infaccia!)

Test dell'AIDS: soluzione

Italiano scelto a caso si sottopone al test dell'AIDS.
Test non perfetto, come succede in pratica.

Ricordiamo i dati *(Modello semplificato)*:

$$
\begin{aligned}
P(\text{Pos}\,|\,\text{HIV}) &= 100\% \\
P(\text{Pos}\,|\,\overline{\text{HIV}}) &= 0.2\% \\
P(\text{Neg}\,|\,\overline{\text{HIV}}) &= 99.8\%
\end{aligned}
$$

Dato *volutamente* **mancante:** probabilità che un italiano scelto a caso (senza nessun'altra informazione su di lui – nemmeno la possibilità di guardarlo infaccia!)
Ai fini dell'esercizio prendiamo 1/600, ovvero 0.17%:

$$P_0(\text{HIV}) = 1/600 \approx 0.17\% \tag{1}$$

$$P_0(\overline{\text{HIV}}) = 1 - 1/600 \approx 99.83\% \tag{2}$$

Applichiamo il teorema di Bayes

$$
\begin{aligned}
P(\mathsf{HIV}\,|\,\mathsf{Pos}) &= \frac{P(\mathsf{Pos}\,|\,\mathsf{HIV})\cdot P_0(\mathsf{HIV})}{P(\mathsf{Pos}\,|\,\mathsf{HIV})\cdot P_0(\mathsf{HIV}) + P(\mathsf{Pos}\,|\,\overline{\mathsf{HIV}})\cdot P_0(\overline{\mathsf{HIV}})} \\
&= \frac{1\times 1/600}{1\times 1/600 + 0.002\times 599/500} \approx 45\%\,.
\end{aligned}
$$

Applichiamo il teorema di Bayes

$$P(\text{HIV}\,|\,\text{Pos}) = \frac{P(\text{Pos}\,|\,\text{HIV})\cdot P_0(\text{HIV})}{P(\text{Pos}\,|\,\text{HIV})\cdot P_0(\text{HIV}) + P(\text{Pos}\,|\,\overline{\text{HIV}})\cdot P_0(\overline{\text{HIV}})}$$

$$= \frac{1\times 1/600}{1\times 1/600 + 0.002\times 599/500} \approx 45\%\,.$$

Altro modo conveniente (e istruttivo):

$$\frac{P(\text{HIV}\,|\,\text{Pos})}{P(\overline{\text{HIV}}\,|\,\text{Pos})} = \frac{P(\text{Pos}\,|\,\text{HIV})}{P(\text{Pos}\,|\,\overline{\text{HIV}})}\times\frac{P_0(\text{HIV})}{P_0(\overline{\text{HIV}})}$$

$$= \frac{1}{0.002}\times\frac{1/600}{1-1/600}$$

$$\approx 500\times\frac{1}{600}\approx 0.83 < 1$$

$$\Rightarrow \quad P(\text{HIV}\,|\,\text{Pos})\approx 45\%\,.$$

Applichiamo il teorema di Bayes

$$P(\text{HIV}\,|\,\text{Pos}) = \frac{P(\text{Pos}\,|\,\text{HIV}) \cdot P_0(\text{HIV})}{P(\text{Pos}\,|\,\text{HIV}) \cdot P_0(\text{HIV}) + P(\text{Pos}\,|\,\overline{\text{HIV}}) \cdot P_0(\overline{\text{HIV}})}$$
$$= \frac{1 \times 1/600}{1 \times 1/600 + 0.002 \times 599/500} \approx 45\%\,.$$

Altro modo conveniente (e istruttivo):

$$\frac{P(\text{HIV}\,|\,\text{Pos})}{P(\overline{\text{HIV}\,|\,\text{Pos}})} \approx 500 \times \frac{1}{600} \approx 0.83 < 1$$

$\Rightarrow$ Anche se il dato sperimentale *spinge molto* vero l'ipotesi HIV (rapporto di probabilità aggiornato di un fattore 500!), la bassissima probabilità iniziale fa sì che a posteriore tale ipotesi sia sostanzialmente probabile quanto la sua alternativa.

Applichiamo il teorema di Bayes

$$P(\mathsf{HIV}\,|\,\mathsf{Pos}) = \frac{P(\mathsf{Pos}\,|\,\mathsf{HIV})\cdot P_0(\mathsf{HIV})}{P(\mathsf{Pos}\,|\,\mathsf{HIV})\cdot P_0(\mathsf{HIV}) + P(\mathsf{Pos}\,|\,\overline{\mathsf{HIV}})\cdot P_0(\overline{\mathsf{HIV}})}$$

$$= \frac{1\times 1/600}{1\times 1/600 + 0.002\times 599/500} \approx 45\%\,.$$

Altro modo conveniente (e istruttivo):

$$\frac{P(\mathsf{HIV}\,|\,\mathsf{Pos})}{P(\overline{\mathsf{HIV}\,|\,\mathsf{Pos}})} \approx 500\times\frac{1}{600} \approx 0.83 < 1$$

Nota: il fattore di aggiornamento del rapporto delle probabilità (500 nel nostro caso) è noto come fattore di Bayes (comodo, perché spesso è più facile convenire su tale fattore che sulle prior e quindi tale fattore dà un'idea di cosa *dicano* i dati – ma per arrivare alla probabilità servono le prior! Ricordarsi di Fantozzi e Rag. Filini privi di pani e pesci da moltiplicare. . .)