G. D'Agostini

Oscillatore smorzato e RCL impulsato

(Appunti dal Corso di Fisica per Informatici)

1

1.1

Oscillazioni smorzate
Equazioni del moto di corpo soggetto a forza elastica e forza di viscosità $-\beta\vec{v}$ (caso unidimensionale):

$$F = -k\,x - \beta\,v \tag{1}$$
$$m\,a = -k\,x - \beta\,v\,, \tag{2}$$

ovvero

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \beta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x = 0 \tag{3}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\beta}{m}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,x = 0 \tag{4}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x = 0\,, \tag{5}$$

con $\gamma = \beta/m$ e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, entrambe aventi le dimensioni dell'inverso del tempo. Il caso con $\beta = 0$, ovvero $\gamma = 0$ si riduce all'oscillatore armonico. $\beta \neq 0$ introduce lo smorzamento, come mostrato nell'esperienza in aula (moto della molla).

1.2

Introduzione (empirica) all'induttanza, come elemento del circuito ai capi del quale c'è una differenza di potenziale proporzionale alla variazione nel tempo della corrente, con coefficiente di proporzionalità L

$$F_L = -L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,. \tag{6}$$

Si può verificare che le dimensioni di L sono quelle di $\Omega\cdot$s [$L = -F_L/(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t) \rightarrow$ V/(A/s) $\rightarrow \Omega\cdot$s]. La sua unità di misura è l'Henry (H): 1 H = 1 $\Omega \times$ 1 s.

1.3

Effetto nel circuito di (auto-)induttanza, con introduzione qualitativa (l'induzione magnetica vera e propria non fa parte del corso):

- Corrente I che percorre una 'bobina': $\rightarrow$ campo magnetico.
  Esempio: elettromagnete, come quelli negli altoparlanti (segnale musicale $\rightarrow$ corrente $I(t)$ all'uscita dell'amplificatore $\rightarrow$ campo magnetico $B(t)$ modulato dal segnale musicale $\rightarrow$ magnete permanente immerso in $B(t)$ e solidale con la membrana dell'altoparlante $\rightarrow$ oscillazione membrana $\rightarrow$ suono).

- Se I cambia con il tempo: $\rightarrow$ forza elettromotrice indotta ai capi della bobina $-\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Il segno meno ha il seguente significato: se la corrente scorre dal capo A al capo B dell'induttore (la bobina) e cresce (ovvero $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t > 0$), la forza elettromotrice indotta è tale che $V(A) < V(B)$; viceversa se la corrente diminuisce.

- La forza elettromostrice indotta è "tale da opporsi alla causa che l'ha generata": se I sta scorrendo da A a B ed aumenta, la forza elettromotrice indotta tende a ridurla.

Siamo interessati a studiare l'effetto di L sul circuito dalla sola conoscenza della (6). Ad esempio, vediamo come cambia la legge di scarica del condensatore se aggiungiamo anche una induttanza in serie a C ed R. Scegliendo il verso positivo della corrente quello che carica il condensatore, ovvero quello per cui $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = I$, dalla solita condizione sulle cadute di potenziale abbiamo

$$\Delta V_C + \Delta V_R + \Delta V_L = 0 \tag{7}$$

$$-V_C - R\,I - L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{8}$$

$$-\frac{Q}{C} - R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - L\,\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{9}$$

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L\,C}\,Q = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,Q = 0 \tag{12}$$

(ove $\gamma = R/L$ e $\omega_0^2 = 1/LC$), formalmente uguale alla (5) e quindi avente analoga soluzione. Siamo quindi interessati a risolvere la generica equazione differenziale, scritta nella generica variabile z

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z \quad = \quad 0 \tag{13}$$

Prima di risolvere questa equazione differenziale, analizziamo l'analogia fra i due problemi fisici, in particolare confrontando la (10) con la (3). In un caso siamo interessati alla variazione nel tempo della posizione $x(t)$ del un punto legato all'estremo di una molla, in un altro alla carica $Q(t)$ depositata su un'armatura del condensatore. Nel caso meccanico la derivata rispetto al tempo della quantità di interesse rappresenta la velocità, nel caso elettrico la corrente elettrica. Inoltre:

- βv rappresenta la forza di attrito di viscosità, ovvero il termine che 'brucia' energia, nel senso che se $\beta = 0$ il sistema conserva l'energia meccanica, ovvero la (3) si riduce ad un oscillatore armonico ideale.

- L'equivalente elettrico di β è la resistenza R, la quale consuma energia per effetto Joule. Si evince quindi che un *ideale circuito* (resistenze nei circuiti, benché minime, sono inevitabili, cosìcome inevitabili sono gli attriti nei sistemi meccanici) avente solo C ed L (ovvero quello che si chiama un circuito 'LC', mentre il circuito con $R \neq 0$ si chiama genericamente 'RLC', o 'RCL') si comporterebbe come un oscillatore armonico nella variabile $Q(t)$, con l'energia che viene 'palleggiata' fra condensatore e induttanza, con periodo $2\pi/\omega_0$. Conosciamo bene il caso meccanico. Scriviamo le espressioni di $Q(t)$ e $I(t)$:

$$Q(t) \quad = \quad Q_0 \cos(\omega_0 t) \tag{14}$$
$$I(t) \quad = \quad -Q_0 \,\omega_0 \sin(\omega_0 t) \ : \tag{15}$$

  – inizialmente il condensatore comincia a scaricarsi e circola una corrente negativa, inizialmente nulla e che cresce in modulo con il tempo, la quale produce un campo magnetico nella bobina;

  – dopo un quarto di periodo (ovvero quando $\omega_0 t = \pi/2$) il condensatore si è completamente scaricato e la corrente è massima in modulo (è minima, se si considera anche il segno);

  – per t immediatamente maggiore di $T/4$ la corrente ricarica il condensatore, ma con polarità opposta (cariche positive cominciano ad arrivare sull'armatura inizialmene negativa), la corrente decresce in modulo e per $T/2$ il condensatore è di nuovo carico, con $Q(T/2) = -Q(0)$;

– poi tutto procede a ritroso, al tempo T il sistema ritorna esattamente nello stato iniziale e il moto si ripete all'infinito.

Si noti come varia l'energia del condensatore nel tempo. In particolare per $t = 0, \ \pi, \ \dots$ è pari all'energia iniziale $1/2\, C\, V_{C_0}^2$, mentre per $t = \pi/2, \ 3/2\pi, \ \dots$ essa è nulla: l'energia mancante è da ricercare nell'energia associata ad L (energia del campo magnetico).

- L è l'analogo della massa (inerziale) m in quanto si oppone alla variazione di I.

- Infine l'analogo della costante elastica k della molla è $1/C$: come una molla più è lontana dalla posizione di equilibrio e più è difficile tirarla/comprimerla ancora, così un condensatore più è carico e più è difficile caricarlo ulteriormente [in quanto il lavoro da compiere per aggiungere $\mathrm{d}Q$ è pari a $(Q/C)\,\mathrm{d}Q$]. Questo spiega anche perché l'equivalente della costante elastica è $1/C$: minore è C, maggiore è la tensione ai capi del condensatore a parità di carica applicata e quindi più difficile è caricarlo.

Possiamo finalmente scrivere la seguente tabella di analogie:

$$x \leftrightarrow Q \tag{16}$$
$$v \leftrightarrow I \tag{17}$$
$$a \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{18}$$
$$m \leftrightarrow L \tag{19}$$
$$k \leftrightarrow \frac{1}{C} \tag{20}$$
$$\beta \leftrightarrow R \tag{21}$$
$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 \leftrightarrow \frac{1}{2}\, L\, I^2 \tag{22}$$
$$\frac{1}{2}\, k\, x^2 \leftrightarrow \frac{1}{2}\, \frac{1}{C}\, Q^2 \tag{23}$$
$$\beta\, v^2 \leftrightarrow R\, I^2 \tag{24}$$
$$\sqrt{\frac{k}{m}} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{L\, C}} \tag{25}$$

nella quale si è introdotta l'energia $1/2\, L\, I^2$ associata ad L.

Se β, o rispettivamente R, è diverso da zero, l'oscillazione è smorzata, in quanto ogni volta che la velocità, o rispettivamente la corrente, è diversa da zero viene dissipata energia con una potenza pari a $\beta\, v^2$, ovvero $R\, I^2$.

2

2.1

Per quanto riguarda la **soluzione della (13)**, ricordiamo che il procedimento è quello di partire da una soluzione di prova complessa (la cui parte reale costituisce la soluzione fisica) del tipo

$$z(t) \;=\; K\, e^{\alpha\, t}\,, \tag{26}$$

la quale, inserita nella (13) dà luogo a

$$\alpha^2\, K\, e^{\alpha\, t} + \gamma\, \alpha\, K\, e^{\alpha\, t} + \omega^2\, K\, e^{\alpha\, t} \;=\; 0 \tag{27}$$

da cui segue l'*equazione algebrica associata*

$$\alpha^2 + \gamma\, \alpha + \omega^2 \;=\; 0 \tag{28}$$

le cui soluzioni sono

$$\alpha_{1,2} \;=\; -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\,. \tag{29}$$

Essendo sia α_1 che α_2 soluzione della (13), la soluzione generale è data da

$$z(t) \;=\; K_1\, e^{\alpha_1\, t} + K_2\, e^{\alpha_2\, t}\,. \tag{30}$$

Il tipo di soluzioni dipende dal segno del discriminante $(\gamma/2)^2 - \omega_0^2$:

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 > 0 \;\;\Rightarrow\;\; \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ reali negative: caso `sovrasmorzato'} \tag{31}$$

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0 \;\;\Rightarrow\;\; \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ complesse coniugate: caso `sottosmorzato'} \tag{32}$$

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \alpha_1 = \alpha_2 \text{ (reale negativa): caso `critico'}\,. \tag{33}$$

2.2

Soluzione dell'oscillatore smorzato, sia meccanico che elettrico, con le **condizioni iniziali**

$$\begin{aligned} z(0) &= z_0 && (34) \\ \dot{z}(0) &= 0\,, && (35) \end{aligned}$$

ovvero: allungamento iniziale della molla e velocità nulla nel caso meccanico; carica iniziale del condensatore e corrente nulla nel caso elettrico. Le due condizioni danno:

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= z_0 && (36) \\ \alpha_1\,K_1 + \alpha_2\,K_2 &= 0 && (37) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\,z_0 && (38) \\ K_2 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\,z_0\,. && (39) \end{aligned}$$

Nota: α_1 e α_2 dipendono dai parametri del sistema; K_1 e K_2 dalle condizioni iniziali e dai parametri del sistema.

Vediamo i due casi più interessanti (trattando il caso critico come caso limite di quello sottosmorzato):

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 > 0}$ Indicando con

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = -\left[\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\right] && (40) \\ \alpha_2 &= -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = -\left[\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\right] && (41) \end{aligned}$$

(si noti che $|\alpha_1| < |\alpha_2|$) e chiamando $\tau_1 = -1/\alpha_1$ e $\tau_2 = -1/\alpha_2$ (con $\tau_1 > \tau_2 > 0$), la soluzione diventa

$$\begin{aligned} z(t) &= K_1\,e^{\alpha_1\,t} + K_2\,e^{\alpha_2\,t} && (42) \\ &= z_0\left[\frac{\alpha_2}{\alpha 2 - \alpha_1}\,e^{\alpha_1\,t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\,e^{\alpha\,t}\right] && (43) \\ &= z_0\left[\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\,e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}\,e^{-t/\tau_2}\right]\,, && (44) \end{aligned}$$

ove quest'ultima scrittura mette in evidenza come $K_1 > 10$ e $K_2 < 0$: i due esponenziali negativi hanno coefficienti di segno opposto, fatto importante per riprodurre $\dot{z}(0) = 0$. Ma l'esponenziale con $K_2 < 0$ si estingue rapidamente e, dopo alcuni τ_2, prevale l'esponenziale con $K_1 > 0$.

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0}$ Introducendo

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - (\gamma/2)^2 > 0\,, \tag{45}$$

indichiamo le due soluzioni con

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + j\,\omega_1 \tag{46}$$

$$\alpha_2 = -\frac{\gamma}{2} - j\,\omega_1\,, \tag{47}$$

da cui

$$K_1 = \frac{-\frac{\gamma}{2} - j\,\omega_1}{-2\,j\,\omega_1}\,z_0 = z_0\left(\frac{1}{2} - j\,\frac{\gamma}{4\,\omega_1}\right) \tag{48}$$

$$K_2 = \frac{-\frac{\gamma}{2} + j\,\omega_1}{2\,j\,\omega_1}\,z_0 = z_0\left(\frac{1}{2} + j\,\frac{\gamma}{4\,\omega_1}\right)\,. \tag{49}$$

La soluzione è quindi

$$z(t) = \frac{z_0}{2}\left(1 - j\frac{\gamma}{2\,\omega_1}\right)\,e^{-\gamma/2\,t}\,e^{j\,\omega_1\,t} \tag{50}$$

$$+\frac{z_0}{2}\left(1 + j\frac{\gamma}{2\,\omega_1}\right)\,e^{-\gamma/2\,t}\,e^{-j\,\omega_1\,t} \tag{51}$$

la cui parte reale è (provare a fare i conti come esercizio, ricordandosi[1] che $e^{j\,x} = \cos x + j\sin x$)

$$Z(t) = \mathrm{Re}\,z(t) = z_0\,e^{-t/\tau}\,\left[\cos\left(\omega_1\,t\right) + \frac{\gamma}{2\,\omega_1}\,\sin\left(\omega_1\,t\right)\right] \tag{52}$$

[1]Espandendo in serie di Taylor $e^{j\,x}$, $\sin x$ e $\cos x$ si ottiene:

$$e^{j\,x} = 1 + j\,x - \frac{x^2}{2!} - j\,\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\,\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - j\,\frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\,.$$

da cui $e^{j\,x} = \cos x + j\sin x$.

con $\tau = 2/\gamma$. [Si verifichi che $Z(0) = z_0$ e $\dot{Z}(0) = 0$.]

Si può verificare inoltre[2] che la (52) può essere riscritta come

$$Z(t) = \frac{z_0}{\cos\varphi}\, e^{-t/\tau}\, \cos\left(\omega_1\, t + \varphi\right), \tag{53}$$

con $\varphi = \arctan(-\gamma/2\,\omega_1)$ e quindi $\cos\varphi = 1/\sqrt{1 + (\gamma/2\omega_1)^2}$.

La (53), più facile da leggere e da memorizzare dell'equivalente (52), ci mostra uno moto oscillante con ampiezza decrescente nel tempo in modo esponenziale. Si noti che $\omega_1 < \omega_0$, ovvero $T_1 > T_0$: lo smorzamento rallenta l'oscillazione.

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 = 0}$ Questa condizione si ottiene come limite per $\omega_1 \to 0$. Dalla (52), sviluppando in serie, otteniamo[3] otteniamo:

$$Z(t) \approx z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 - \frac{(\omega_1\, t)^2}{2} + \frac{\gamma}{2\,\omega_1}(\omega_1\, t)\right], \tag{54}$$

[2] Con un po' di trigonometria si può vedere come $(1/\cos\varphi)\, \cos(\omega_1 t + \varphi)$ può essere riscritta come

$$\begin{aligned}
(1/\cos\varphi)\, \cos(\omega_1 t + \varphi) &= \frac{1}{\cos\varphi}[\cos\omega_1 t \cdot \cos\varphi - \sin\omega_1 t \cdot \sin\varphi] \\
&= \cos\omega_1 t - \tan\varphi \cdot \sin\omega_1 t \\
&= \cos\omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1}\, \sin\omega_1 t\,.
\end{aligned}$$

Si ricordi inoltre che $\cos(\arctan\alpha) = 1/\sqrt{1+\alpha^2}$.

[3] Si ricorda che per $\epsilon \ll 1$

$$\begin{aligned}
\sin\epsilon &\approx \epsilon \\
\cos\epsilon &\approx 1 - \frac{\epsilon}{2}\,.
\end{aligned}$$

Altre utili approssimazioni

$$\begin{aligned}
e^{\epsilon} &\approx 1 + \epsilon \\
(1+\epsilon)^2 &\approx 1 + 2\,\epsilon \\
\sqrt{(1+\epsilon)} &\approx 1 + \frac{\epsilon}{2} \\
\frac{1}{1+\epsilon} &\approx 1 - \epsilon
\end{aligned}$$

che, per $\omega_1 \to 0$, diventa

$$Z(t) = z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 + \frac{\gamma}{2}\, t\right] \tag{55}$$

$$= z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 + \frac{t}{\tau}\right]. \tag{56}$$

[Si verifichi che $Z(0) = z_0$ e $\dot{Z}(0) = 0$.]

3

3.1

Oscillatore smorzato: considerazioni energetiche.
Riprendiamo oscillatore smorzato, caso sottosmorzato, di cui riscriviamo la soluzione nella forma (53)

$$Z(t) = \frac{z_0}{\cos\varphi}\, e^{-t/\tau}\, \cos(\omega_1\, t + \varphi) \tag{57}$$

e ci ricordiamo che a seconda dei problemi incontrati Z ha il significato dello scostamento x rispetto alla posizione di equilibrio o di carica Q. Concentriamoci sul caso meccanico (quello elettrico è assolutamente equivalente), ovvero

$$x(t) = \frac{x_0}{\cos\varphi}\, e^{-t/\tau}\, \cos(\omega_1\, t + \varphi)\,. \tag{58}$$

Energia meccanica all'istante $t = 0$ e dopo n pseudoperiodi, nell'approssimazioni che l'oscillatore è poco smorzato e quindi $\omega_1 \approx \omega_0$:

$$E_0 = E(n = 0) = \frac{1}{2}\, k\, x_0^2 \tag{59}$$

$$E(n) = \frac{1}{2}\, k\, x^2(t = nT_1) \tag{60}$$

$$= \frac{1}{2}\, k\, x_0^2\, e^{-2\, n\, T_1/\tau} \tag{61}$$

$$= E_0\, e^{-(2\pi\gamma/\omega_1)\, n} \tag{62}$$

$$\approx E_0\, e^{-(2\pi\gamma/\omega 0)\, n}\,. \tag{63}$$

Il rapporto fra $E(n+1)/E(n)$ da un periodo all'altro vale

$$\frac{E(n+1)}{E(n)} = e^{-(2\pi\gamma/\omega_0)}\,, \tag{64}$$

ovvero in un periodo abbiamo una variazione frazionaria di

$$\frac{E(n+1)-E(n)}{E(n)} \approx e^{-(2\pi\gamma/\omega_0)}-1 \tag{65}$$

$$\approx 1-\frac{2\,\pi\,\gamma}{\omega_0}-1 \tag{66}$$

$$\approx -\frac{2\,\pi\,\gamma}{\omega_0}\,, \tag{67}$$

ove abbiamo usato nel penultimo passaggio l'approssimazione $e^{-\epsilon} \approx 1-\epsilon$. Inoltre, possiamo riscrivere la (63) come

$$E(n) \approx E_0\, e^{-n/n_c} \tag{68}$$

$$(\, n_c = \frac{1}{2\,\pi}\frac{\omega_0}{\gamma}\ )\,. \tag{69}$$

ove n_c acquista il significato di 'numero di oscillazioni che l'oscillatore impiega per ridurre ad $1/e$ la sua energia iniziale: $\rightarrow$ altro andamento esponenziale! Ovviamente, essendo il numero di periodi proporzionale al tempo trascorso, in quanto $t = n\,T = n\,(2\pi/\omega_0)$, e considerando l'andamento 'medio' dell'energia, valido ad ogni numero intero di periodi (l'andamento esatto è un po' più complicato, in quanto la variazione dell'energia nell'unità di tempo è proporzionale al quadrato della velocità istantanea), otteniamo

$$< E(t) > \approx E_0\, e^{-\gamma\, t} = E_0\, e^{-t/\tau_E}\,, \tag{70}$$

con $\tau_E = 1/\gamma$: l'andamento dell'energia nel tempo è esponenziale, con una costante di tempo inversamente proporzionale al coefficiente di viscosità β (o l'equivalente elettrico R nel circuito RLC).

Fattore di qualità (o di merito) di un circuito smorzato. Definizione:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}\,. \tag{71}$$

(Da non confondere con il simbolo della carica elettrica). Possiamo riscrivere le (67) e (69) come

$$\frac{E(n+1)-E(n)}{E(n)} \approx -\frac{2\,\pi}{Q} \tag{72}$$

$$n_c \approx \frac{Q}{2\,\pi}, \tag{73}$$

ovvero

- maggiore è il fattore di merito e minore è l'energia frazionaria persa per ogni oscillazione e, di conseguenza, maggiore il numero di oscillazioni prima che il sistema abbia perso una certa frazione prefissata di energia;

- in particolare, la (73) ci dice che $Q/2\pi$ rappresenta (approssimativamente) il numero di oscillazioni necessarie affinchè l'energia del sistema si riduca di $1/e$ di quella iniziale.

Il termini dei parametri del sistema Q vale:

$$\text{Oscillatore meccanico:} \qquad Q = \frac{1}{\beta}\sqrt{m\,k} \tag{74}$$

$$\text{Oscillatore elettrico:} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{75}$$

3.2

Oscillatore forzato Riprendiamo l'equazione (2) e aggiungiamo una forza periodica sinusoidale[4] $f(t) = f_0\cos\omega t$. la forza totale sarà quindi

$$F \;=\; -k\,x - \beta\,v + f_0\cos\omega t \tag{76}$$

la (2) e seguenti diventano quindi

$$\begin{aligned}
m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \beta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x &= f_0\cos\omega t &(77)\\
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\beta}{m}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,x &= \frac{f_0}{m}\cos\omega t &(78)\\
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x &= \eta\cos\omega t\,. &(79)
\end{aligned}$$

Analogalmente, se nel circuito RCL aggiungiamo una forza elettromotrice cariabile nel tempo $f(t) = f_0\cos\omega t$, la (11) e seguenti diventano

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L\,C}\,Q &= f_0\cos\omega t &(80)\\
\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \omega^2\,Q &= \frac{f_0}{L}\cos\omega t\,, &(81)
\end{aligned}$$

[4]L'importanza dello studio di moti periodici sinusoidali è lagato al teorema di Fourier, attraverso è possibile scrivere qualsiasi funzione periodica come una opportuna combinazioni di sinusoidi.

formalmente analoga alla (79) . Risolviamo quindi la generica

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega^2 z = \eta_0 \cos\omega t\,, \tag{82}$$

ove η_0 sta per f_0/m o f_0/L, a seconda che si tratta del caso meccanico o elettrico (si noti che in entrambi i casi il denominatori rappresenta un termine di inerzia). Si noti come nel caso meccanico $f_0/m\,\cos\omega t$ rappresenta l'accelerazione dovuta alla sola forza $f(t)$.
Come è noto, la soluzione della (82) è pari alla somma della soluzione omogenera e di quella particolare. Come abbiamo visto precedentemente, la soluzione omogenea (ovvero quella con $\eta_0 = 0$) dà luogo ad una soluzione smorzata che asintoticamente si estingue. Dopo $\approx 5\,Q$ oscillazioni (ove Q è il fattore di merito) resta soltanto la soluzione particolare, 'forzata' alla stessa frequenza di $f(t)$. Quindi la soluzione sarà del tipo $z(t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Come è anche noto, i conti si semplificano se usiamo la notazione complessa, ovvero: consideriamo $\eta_0 \cos\omega t = \mathrm{Re}[\eta_0\, e^{j\omega t}]$; usiamo la variabile complessa $z = z_0\, e^{j\omega t}$, ove z_0 è essa stessa una variabile complessa, e contenente quindi la fase φ; risolviamo la (82) per variabili complesse e infine prediamo la parte reale del risultato.
Sostituendo la soluzione di prova $z = z_0\, e^{j\omega t}$ nella (82) otteniamo

$$-\omega^2 z_0\, e^{j\omega t} + j\omega\,\gamma\, z_0\, e^{j\omega t} + \omega_0^2\, z_0\, e^{j\omega t} = \eta_0 \cos\omega t \tag{83}$$

$$z_0\,(-\omega^2 + j\omega\,\gamma + \omega_0^2) = \eta_0 \tag{84}$$

$$z_0 = \frac{\eta_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\,\gamma}\,, \tag{85}$$

dalla quale si ricavano[5] ampiezza di z, che scriviamo con Z_0 e la sua fase φ:

$$Z_0 = \frac{\eta_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \tag{86}$$

$$\varphi = \arctan\frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\,, \tag{87}$$

[5] Si ricorda che i numeri complessi possono essere rappresentati in un piano cartesiano ('piano complesso') come un punto avente per ascissa la sua parte reale e per ordinata la sua parte immaginaria. Il modulo rappresenta quindi la distanza del punto dall'origine e la fase l'angolo formato fra il segmento congiungente punto-origine e l'asse delle ascisse. Modulo e fase sono quindi calcolati dalle usuali formule di geometria e trigonometria.

Valgono inoltre le seguenti regole pratiche: 1) il modulo di un prodotto o di un rapporto di n umeri complessi è pari, rispettivamente, a prodotto o rapporto dei moduli; 2) la fase di un prodotto o di un rapporto di n umeri complessi è pari, rispettivamente, a somma o differenza delle fasi.

ovvero la soluzione completa è

$$z(t) = \frac{\eta_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \cos\left[\omega t + \arctan\frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right] \qquad (88)$$

Discussione del risultato: $\rightarrow$ **risonanza**.
Per $\omega = \omega_0$ (ω_0 è detta frequenza di risonanza) l'ampiezza di oscillazione ha un massino e vale $\eta_0/\gamma\omega_0$, inversamente proporzionale al coefficiente del termine dissipativo (β o R nei due casi).