

Indice

I	Dal concetto di probabilità ai problemi di probabilità inversa	1
1	Incertezza e probabilità	3
1.1	Determinismo e probabilismo nei metodi di indagine scientifica	3
1.2	Incertezze in Fisica e nelle altre scienze naturali	4
1.3	Limiti all'accuratezza delle misure - un esempio	6
1.4	Imparare dagli esperimenti: il problema dell'induzione	7
1.5	*Limiti del metodo di falsificazione	9
1.6	Decisioni in condizioni di incertezza	10
1.7	Concetto di probabilità	10
1.8	Semplici valutazioni di probabilità	13
1.9	Ricapitolando	15
1.10	Problemi	17
2	Valutazioni e interpretazioni della probabilità	19
2.1	Primi interessi in stime quantitative di probabilità	19
2.2	Valutazione combinatoria	20
2.3	Probabilità e frequenza	21
2.4	Legge empirica del caso e "definizione" frequentista	23
2.5	Interpretazione oggettivista e soggettivista della probabilità	25
2.6	Concetto di probabilità condizionata	26
2.7	Eventi di probabilità nulla	28
2.8	Probabilità e scommesse eque	29
2.9	○ Probabilità e quote di scommessa	30
2.10	Definizione soggettiva di probabilità	31
2.11	*La "definizione ISO"	32
2.12	*Note sul termine "soggettivo"	33
2.13	*Ruolo virtuale della scommessa, valore dei soldi e ordini di grandezza non intuitivamente percepibili	34
2.14	○ Speranza matematica e previsione di vincita	36
2.15	*Previsione di guadagno e decisioni	37
2.16	*Decisioni vantaggiose e etica della ricerca	39
2.17	*Regola di penalizzazione - il bastone e la carota	40
2.18	Ricapitolando	41
2.19	Problemi	43

3	Elementi di calcolo combinatorio	47
3.1	Problemi elementari tipici	47
3.2	Disposizioni e combinazioni	48
3.2.1	Regola fondamentale del calcolo combinatorio	48
3.2.2	Numero di r -disposizioni di n oggetti	48
3.2.3	Numero di r -disposizioni semplici di n oggetti	48
3.2.4	Numero di permutazioni di n oggetti	50
3.2.5	Combinazioni	50
3.2.6	Coefficienti binomiali	52
3.2.7	Note su nomenclatura e simbologia	53
3.3	Note sul calcolo dei grandi numeri	53
3.4	Ordinamenti, occupazioni ed estrazioni	55
3.5	Alcuni esempi classici	57
3.6	Ricapitolando	59
3.7	Problemi	60
4	Regole della probabilità	61
4.1	Probabilità della somma logica di due eventi incompatibili	61
4.2	Eventi e insiemi	62
4.3	probabilità come misura	67
4.4	Evento condizionato	67
4.5	Regole di base della probabilità - assiomi	69
4.5.1	*Dimostrazioni delle proprietà della probabilità	71
4.6	Relazione fra probabilità condizionata e congiunta	72
4.7	Condizionamento da eventi di probabilità nulla	74
4.8	Indipendenza stocastica (o in probabilità)	75
4.9	Altre proprietà della probabilità condizionata	76
4.9.1	Legge della moltiplicazione	76
4.9.2	Legge delle alternative	78
4.10	Indipendenza logica e indipendenza stocastica	78
4.11	Ricapitolando	78
4.12	Problemi	81
5	Probabilità delle cause e meccanismo di aggiornamento delle probabilità	85
5.1	Inferenza probabilistica	85
5.2	Teorema di Bayes	87
5.3	Chiavi di lettura del teorema di Bayes	89
5.4	Visione combinatoria del teorema di Bayes	91
5.5	Esempi tipici di applicazione	92
5.5.1	Classificazione di eventi e rapporto segnale rumore	92
5.5.2	Uso iterativo del teorema di Bayes	94
5.6	⊖ Statistica bayesiana: imparare dall'esperienza	95
5.7	⊖ Il caso del sospetto baro	96
5.7.1	I "fatti"	96
5.7.2	Riaggiornamento della probabilità	96
5.7.3	Confronto fra inferenza diretta e inferenza iterativa	97
5.7.4	Dipendenza dalla probabilità iniziale	98
5.7.5	Pregiudizio, indizi e conclusioni	98

5.7.6	Probabilità e decisione	98
5.8	*Recupero e superamento del metodo di falsificazione	99
5.9	○ Osservazioni indipendenti e prodotto delle verosimiglianze	100
5.10	*Fattore di Bayes e incremento logaritmico delle quote di scommessa	100
5.11	○ Indifferenza iniziale e massima verosimiglianza	101
5.12	*Problema della verificabilità ed estensione del concetto di evento	101
5.13	Ricapitolando	102
5.14	Problemi	104

II Variabili casuali - I 109

6 Variabili casuali e distribuzioni di probabilità di variabili discrete 111

6.1	Numeri aleatori	111
6.2	Distribuzione di probabilità	112
6.3	○ Distribuzione di probabilità e distribuzioni statistiche	113
6.4	Esempi di costruzione di distribuzioni di variabili casuali	115
6.5	Proprietà delle distribuzioni di probabilità discrete	118
6.6	Distribuzioni elementari notevoli	119
6.6.1	Distribuzione uniforme discreta	119
6.6.2	*Distribuzione uniforme discreta - caso generale	119
6.6.3	Processo di Bernoulli	120
6.6.4	Combinazione di molti processi di Bernoulli indipendenti e di uguale probabilità	121
6.7	Distribuzione geometrica	122
6.8	Sintesi di una distribuzione di probabilità: previsione e incertezza di previsione	123
6.9	Previsione (o valore atteso) come baricentro della distribuzione	126
6.9.1	Osservazioni su terminologia e notazioni	127
6.9.2	Valore atteso di una funzione di una variabile casuale	128
6.10	Valore atteso di distribuzioni elementari	128
6.10.1	Distribuzione uniforme discreta	129
6.10.2	Processo di Bernoulli	129
6.10.3	Distribuzione geometrica	130
6.11	Incertezza “standard” di previsione	130
	Varianza e deviazione standard	130
6.12	Proprietà formali di varianza e deviazione standard	132
6.13	* Momenti di una distribuzione e altri indicatori di forma	133
6.14	* Entropia come misura dello stato di incertezza	134
6.15	Deviazione standard delle distribuzioni elementari	134
6.15.1	Distribuzione uniforme fra 1 e n	135
6.15.2	* Distribuzione uniforme di n valori fra a e b	135
6.15.3	Processo di Bernoulli	135
6.15.4	Distribuzione geometrica	136
6.16	○ Processo di Bernoulli e percezione di probabilità prossime a 0 o a 1	137

6.17	* Previsione e incertezza di previsione di vincita in giochi d'azzardo	137
6.17.1	Gioco della roulette	137
6.17.2	I sistemi "per vincere" al lotto	139
6.18	○ Misure di centralità e di dispersione di distribuzioni statistiche	141
6.19	Ricapitolando	143
6.20	Problemi	145
7	Distribuzioni di probabilità di variabili discrete - II	147
7.1	Distribuzione binomiale	147
7.2	○ Distribuzione binomiale – da capo	149
7.3	Proprietà della distribuzione binomiale e note sul suo uso	151
7.3.1	Valore atteso e deviazione standard	151
7.3.2	Usi tipici della distribuzione binomiale	154
7.4	Distribuzione di Poisson	154
7.5	○ Processo di Poisson - prima parte	156
7.6	* Formule ricorsive per la distribuzione binomiale e di Poisson	161
7.7	○ Proprietà riproduttiva delle distribuzioni di probabilità binomiale e di Poisson	161
7.8	* Altre distribuzioni di interesse	162
	Distribuzione di Pascal	162
	Binomiale negativa	164
	Distribuzione ipergeometrica	165
7.9	* Cammino casuale e problema della rovina del giocatore	166
7.10	Quanto credere in " $X = \mu \pm \sigma$ "?	168
7.10.1	Alcuni esempi numerici	168
7.10.2	Disuguaglianza di Markov	170
7.10.3	Disuguaglianza di Cebicev	170
7.11	Intervalli di probabilità, o di credibilità	171
7.12	* Previsione, penalizzazione e valore sul quale scommettere	172
7.13	○ Previsione di frequenza relativa e legge dei grandi numeri	173
7.14	○ Previsione di una distribuzione statistica	174
7.14.1	Introduzione al concetto di correlazione fra variabili casuali	175
7.15	○ Un esempio storico di distribuzione di Poisson come introduzione al problema della verifica delle leggi statistiche	176
7.15.1	Previsione del tipo di distribuzione	176
7.15.2	Stima "puntuale" del parametro della distribuzione	176
7.15.3	Previsione quantitativa della distribuzione statistica, subordinata a $\lambda = \bar{d}$, e confronto con le osservazioni	177
	Inferenza probabilistica su λ	178
	Previsione della distribuzione statistica subordinata all'incertezza su λ	179
7.16	○ Estensione dei teoremi sulla probabilità alle funzioni di probabilità discrete	179
7.17	Ricapitolando	181
7.18	Problemi	184

8	Distribuzioni di probabilità di variabili continue	187
8.1	Variabili casuali continue e densità di probabilità	187
8.1.1	Probabilità nulle con diversi gradi di fiducia	187
8.1.2	Dal grado di fiducia alla probabilità finita	188
8.1.3	Funzione densità di probabilità	189
8.1.4	Proprietà della funzione densità di probabilità e della funzione di ripartizione	190
8.1.5	Valori attesi	190
8.2	Distribuzione uniforme continua	192
8.3	* Simulazione al computer di processi stocastici	193
8.3.1	Costruzioni di altre semplici variabili casuali	194
	Generica distribuzione uniforme fra a e b	194
	Processo di Bernoulli e distribuzione binomiale	194
	Distribuzione uniforme discreta	194
	Marcia a caso	194
8.3.2	Scelta pesata con $f(x)$	195
8.3.3	Scelta uniforme lungo $F(x)$	195
8.4	○ Distribuzioni triangolari	196
8.5	Distribuzione esponenziale	197
8.6	* Distribuzione esponenziale doppia	198
8.7	Distribuzione normale	199
8.8	Distribuzione normale standardizzata	202
8.9	Uso delle tabelle dell'integrale della distribuzione normale stan- dardizzata	204
8.10	* Derivazione della gaussiana come limite di funzione bino- miale o poissoniana	208
8.11	○ Proprietà riproduttiva della distribuzione normale	209
8.12	○ Processo di Poisson - Seconda parte	210
8.12.1	Distribuzione del tempo di attesa del primo successo	210
8.12.2	Relazione fra esponenziale e poissoniana	211
8.12.3	Relazione fra esponenziale e geometrica	212
8.12.4	Tempo di attesa del k -mo successo	213
8.12.5	Intensità di più processi di Poisson indipendenti	214
8.12.6	Vita media di decadimento	215
8.13	* Funzione generatrice dei momenti	215
	Binomiale	217
	Poissoniana	217
	Gaussiana	217
	Altre proprietà e applicazioni	218
8.14	○ Altre distribuzioni di interesse	219
8.14.1	Beta	219
8.14.2	Gamma	221
8.14.3	Chi ²	221
8.14.4	t di Student	224
8.14.5	F	225
8.15	Ricapitolando	226
8.16	Problemi	227

III	Variabili casuali - II	229
9	Variabili casuali multiple	231
9.1	Vettori aleatori	231
9.1.1	Variabili casuali doppie discrete	232
9.1.2	Variabili casuali doppie continue	233
9.2	Distribuzioni marginali	234
9.3	Estensione dei teoremi sulla probabilità alle distribuzioni di probabilità	236
9.3.1	Distribuzioni condizionate	236
9.3.2	Variabili casuali indipendenti	237
9.3.3	Formula delle alternative e teorema di Bayes	237
9.4	Previsione e incertezza di previsione	238
9.5	○ Covarianza e coefficiente di correlazione	239
9.5.1	Variabili correlate e misura della correlazione	239
9.5.2	Proprietà formali di covarianza e coefficiente di corre- lazione	242
9.6	○ Matrice di covarianza e matrice di correlazione	244
9.7	○ Esempi di variabili doppie discrete	244
9.8	○ Esempi di distribuzione bidimensionale continua	249
9.8.1	Distribuzione uniforme in un rettangolo	249
9.8.2	Distribuzione uniforme in un triangolo	250
9.9	* Distribuzione multinomiale	251
9.10	* Distribuzione normale bivariata	256
9.11	* Caso generale di distribuzione multivariata	261
	Derivate di Q^2 rispetto alle variabili casuali	263
9.12	○ Distribuzioni statistiche multivariate	263
9.13	varie	264
10	Funzioni di variabili casuali e teoremi limite	265
10.1	Propagazione delle incertezze	265
10.2	Soluzione generale per variabili discrete	266
10.2.1	Regola generale	266
10.2.2	* Convoluzione di due funzioni di probabilità	267
10.2.3	Trasformazione di una variabile distribuita unifor- mente	269
10.3	* Soluzione generale per variabili continue	271
10.3.1	Cambiamento di variabile	271
	Trasformazioni di una distribuzione uniforme	272
	Applicazioni alle simulazioni di variabili casuali	272
	Trasformazione lineare di una variabile distribuita nor- malmente	274
10.3.2	Caso di funzioni non monotone	274
10.3.3	Somma di due variabili	275
	Somma di due variabili distribuite uniformemente	275
	Somma di due variabili distribuite normalmente	276
10.4	* Uso della funzione generatrice dei momenti	277
10.4.1	$Z = X + Y$, con X e Y poissoniane	277
10.4.2	$Z = aX + bY + c$, con X e Y gaussiane	278

10.5	* Stime a bruta forza: metodi di Monte Carlo	278
10.6	Riepilogo di alcune proprietà delle funzioni di variabili casuali	280
10.7	Valore atteso e varianza di combinazioni lineari	280
	Valore atteso e varianza della distribuzione binomiale	283
	Valore atteso e varianza della distribuzione di Erlang	283
	Previsione di una media aritmetica di variabili aleato- rie analoghe	283
10.8	○ Correlazione fra diverse combinazioni lineari di variabili casuali	284
	Covarianza di due medie aritmetiche	286
	Correlazione fra una variabile e una combinazione li- neare che la contiene	287
10.9	Legge dei grandi numeri	287
	10.9.1 Limite della media aritmetica	288
	10.9.2 Teorema di Bernoulli	289
	Lancio di una moneta	290
	Sul recupero dei numeri ritardatari	290
10.10	Teorema del limite centrale	292
	10.10.1 Distribuzione della media aritmetica	295
	10.10.2 Convergenza in distribuzione della binomiale e della poissoniana	295
10.11	Estensione del teorema del limite centrale a variabili non indi- pendenti	297
10.12	* Simulazione di numeri aleatori distribuiti secondo una di- stribuzione normale	297
10.13	○ Linearizzazione	298
10.14	○ Esempio di applicazione alle incertezze di misure	299
10.15	○ Moto browniano, “pallinometro” ed errori di misura	301
10.16	* Distribuzione di velocità delle molecole di un gas perfetto	304
10.17	Problemi	307

IV Applicazioni di statistica inferenziale 309

11	Impostazione del problema. Caso di verosimiglianza gaussiana	311
11.1	Introduzione	311
11.2	Verosimiglianza normale con σ nota	313
11.3	Effetto di una prior rilevante: combinazione di risultati	316
11.4	* Derivazione di Gauss della gaussiana	318
11.5	* Caso di forte vincolo dato dalla prior	320
11.6	Caso di σ ignota	322
	11.6.1 Ragionamento intuitivo	323
	11.6.2 Possibili dubbi sul modello normale	324
	11.6.3 * Inferenza simultanea su μ e σ	324
	Prior uniforme in σ	325
	Prior uniforme in $\log \sigma$	327
	Incertezza su σ	328
	11.6.4 Distribuzione di $1/\sigma^2$	331
	11.6.5 Conclusioni e raccomandazioni	333

11.7	Distribuzione predittiva	333
11.8	Combinazione scettica	335
11.9	Problemi	338
12	Verosimiglianza binomiale e poissoniana. Approssimazioni	339
12.1	Misure di conteggi, di proporzioni e di efficienze	339
12.2	Inferenza su p e λ (o r) in condizioni di normalità.	339
12.2.1	Caso poissoniano	340
12.2.2	Caso binomiale	340
12.3	○ Caso generale di inferenza con verosimiglianza binomiale	341
12.3.1	Caso di routine	342
12.3.2	Casi critici	343
12.3.3	Combinazione di misure indipendenti	344
12.3.4	* Uso della prior coniugata Beta	344
12.4	○ Caso generale di inferenza con verosimiglianza poissoniana	346
12.4.1	Caso di routine	346
12.4.2	Caso di $x = 0$ con prior uniforme	347
12.4.3	Combinazione di risultati	348
12.4.4	* Uso della prior coniugata Gamma	348
12.4.5	Inferenza sull'intensità del processo di Poisson da osservazioni effettuate con diversi tempi di osservazione	349
13	Sufficienza statistica, limite a normale e metodi frequentistici	351
14	Effetti sistematici e di rumore	353
14.1	Considerazioni generali	353
14.2	Soluzioni esatte sotto ipotesi di normalità	353
14.2.1	Incertezza sullo zero dello strumento	353
14.2.2	Correzione per errori sistematici noti	355
14.2.3	Correlazione fra i risultati introdotta dalla non perfetta conoscenza dello zero dello strumento	356
14.3	Effetto del background nella misura dell'intensità di un processo di Poisson	358
14.4	Propagazioni di incertezza, approssimazioni e linearizzazioni	361
14.5	Matrice di covarianza di dati correlati	361
	Offset uncertainty	361
	Normalization uncertainty	362
	General case	363
15	Adattamento di curve ai dati sperimentali e stima dei parametri	365
15.1	Inferenza sui parametri di una legge	365
15.2	* Come tener conto anche di possibili incertezze sulle X	367
15.3	Formule dei minimi quadrati	368
15.3.1	σ_Y nota e costante	368
15.3.2	σ_{Y_i} ignote e supposte costanti	369
15.3.3	σ_{Y_i} diverse e note a priori	369

16 Test di ipotesi	371
16.1 Riepilogo dell'approccio probabilistico	371
16.2 Schema di test di ipotesi nell'approccio frequentista	371
16.3 Conclusioni	371
V Soluzione dei problemi	373