

RETI BAYESIANE: DA MODELLI DI CONOSCENZA A STRUMENTI INFERENZIALI E DECISIONALI

Serena Cenatiempo, Giulio D'Agostini, Aldo Vannelli



Prendere decisioni è tra le azioni più frequenti delle nostre giornate: le scelte personali, le decisioni manageriali, le diagnosi mediche sono solo i primi esempi che vengono in mente. Fattore imprescindibile in ogni decisione è la gestione delle incertezze. Queste ultime riguardano le informazioni di cui disponiamo, così come le relazioni che intercorrono tra le variabili del nostro problema. Nella maggior parte dei casi infatti tali relazioni non sono di tipo deterministico, ma probabilistico, si pensi ad esempio in campo medico alle relazioni tra malattie e sintomi, o in campo ingegneristico a quelle tra guasti e allarmi. L'incertezza può ancora riguardare quello che accadrà in prospettiva, per cui le conseguenze delle nostre scelte andranno valutate rispetto ad ogni scenario futuro che crediamo possibile. In una grande varietà di casi il problema davanti a cui ci troviamo è il seguente: avendo a disposizione una serie di dati, fatti o osservazioni, siamo interessati a risalire alla causa più probabile che li ha provocati, al fine di ottimizzare le nostre decisioni. A dispetto del fatto che si tratti di un'operazione che potremmo dire quotidiana, decidere in condizioni di incertezza è un processo tutt'altro che banale. Già in situazioni elementari - si vedano come esempi il paradosso di Ellsberg [1] o il *Monty Hall Problem* [2] - il nostro intuito porta a conclusioni non corrette dal punto di vista razionale. Affrontare problemi reali, dove al numero crescente di variabili si affianca un intricato gioco di relazioni tra le stesse, richiede strumenti che permettano di gestire le incertezze in maniera quantitativa. Un approccio quantitativo per integrare l'incertezza nel ragionamento viene dalle cosiddette reti bayesiane: potenti strumenti concettuali, matematici e applicativi che permettono di gestire problemi complessi con un grande numero di variabili legate tra loro da relazioni sia probabilistiche che deterministiche.

1 Il teorema di Bayes e l'inferenza nelle reti bayesiane

Le reti bayesiane rappresentano lo strumento logico e tecnico per strutturare i problemi e analizzare i dati in presenza di incertezze, in particolare quando le relazioni (probabilistiche) causa-effetto sono complicate, ovvero in tutti i casi realistici e di interesse [3]. Esse, infatti, permettono di aggiornare in maniera quantitativa le probabilità di tutte le variabili in gioco ogni volta che vengono acquisite nuove informazioni su alcune di esse, utilizzando un teorema della probabilità chiamato teorema di Bayes. Per capire il significato e la portata di questo importante teore-

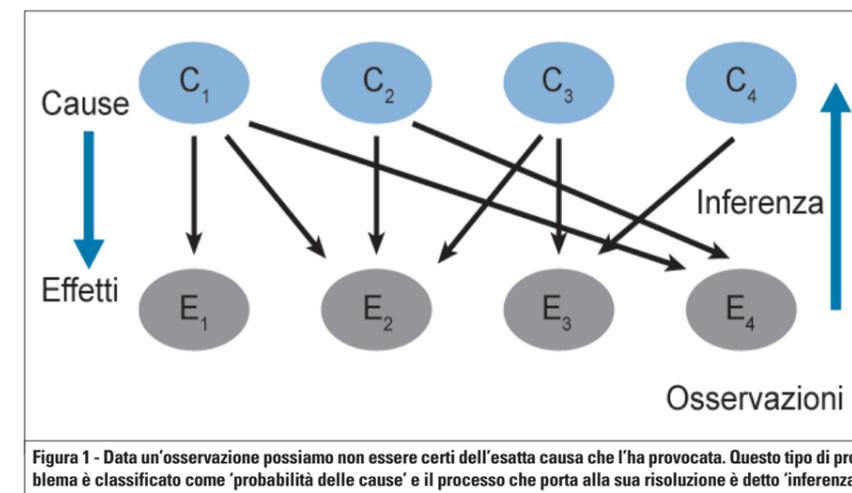


Figura 1 - Data un'osservazione possiamo non essere certi dell'esatta causa che l'ha provocata. Questo tipo di problema è classificato come 'probabilità delle cause' e il processo che porta alla sua risoluzione è detto 'inferenza'.

ma, è utile introdurre un semplice case-study in ambito medico. Un cittadino è scelto a caso nella popolazione italiana per essere sottoposto ad un test dell'AIDS. La prestazione del test, come in tutti i casi reali accade, non è perfetta. Da analisi precedenti è noto che il test risulta positivo nella totalità dei casi di infezione da HIV; al contrario esiste una piccola percentuale di persone non infette (pari allo 0,2%) per le quali il test dà risultato positivo. Volendo rappresentare il problema secondo lo schema di Figura 1 abbiamo due possibili cause (cittadino infetto o non infetto) che possono provocare, con probabilità rispettivamente del 100% e dello 0,2%, lo stesso effetto (risultato positivo del test). Le domande a cui siamo interessati sono: qual è la probabilità che il soggetto sotto esame sia infetto dal virus? È più probabile che il cittadino in questione sia infetto da AIDS o che non sia infetto? O ancora, possiamo dire che sia praticamente impossibile che la persona con test positivo sia non infetta, visto che è praticamente impossibile che una persona non infetta risulti positiva al test? Il problema che ci stiamo ponendo è un problema di 'probabilità delle cause', nel senso che siamo interessati a risalire alla causa più probabile tra quelle possibili a partire dall'osservazione dell'effetto 'risultato del test'. Il processo attraverso cui si ottengono informazioni sulle cause a partire dagli effetti prende il nome di inferenza. Se il problema viene valutato correttamente, il risultato è che la probabilità di essere infetti nel caso di un risultato positivo del test non è il 99,8%, ma si colloca intorno al 50%, cioè non si può concludere che la persona sia infetta da AIDS!

Il concetto cruciale di cui abbiamo bisogno per risolvere il problema e che rappresenta uno dei concetti di base delle reti bayesiane è quello di probabilità condizionata. Quest'ultima è la probabilità che un evento E si verifichi ipotizzando il verificarsi di un determinato 'evento-causa' C. Per esempio la probabilità che si verifichi un incidente automobilistico può essere condizionata dal meteo, dalle condizioni della strada, dal traffico e così via. La notazione matematica che corrisponde ad un'affermazione di probabilità condizionata è $p(E|C)=x$, che si legge 'data la causa

C riteniamo che l'evento E si verifichi con probabilità x'. Se C_1, \dots, C_n sono n possibili cause che hanno effetti sull'evento E e se sappiamo che E si è verificato, allora $p(E|C_i)$ è la probabilità con cui crediamo che la causa C_i produce E. La regola fondamentale del calcolo delle probabilità è:

$$p(E|C) \cdot p(C) = p(E, C) \quad (1)$$

dove $p(E, C)$ è la probabilità che gli eventi E e C siano entrambi veri. La (1) può anche essere scritta scambiando C ed E e da questa osservazione abbiamo la seguente identità:

$$p(E|C) \cdot p(C) = p(C|E) \cdot p(E) \quad (2)$$

da cui deriva il **teorema di Bayes**

$$p(C|E) = p(E|C) \cdot p(C) / p(E) \quad (3)$$

che permette di calcolare la probabilità associata ad una causa C sotto l'ipotesi che l'effetto E si verifichi, ovvero di trasformare $p(E|C)$ in $p(C|E)$ ('inversione di probabilità'). Si parla di inferenza bayesiana quando il processo di inferenza è basato sulla relazione (3). Nel caso dell'AIDS le prestazioni del test altro non sono che probabilità condizionate, ovvero:

- $p(\text{test positivo} | \text{AIDS si}) = 100\%$;
- $p(\text{test negativo} | \text{AIDS si}) = 0\%$ (**assenza di falsi negativi**);
- $p(\text{test positivo} | \text{AIDS no}) = 0,2\%$ (**percentuale di falsi positivi**);
- $p(\text{test negativo} | \text{AIDS no}) = 99,8\%$.

Applicando la regola di Bayes si ottiene la seguente espressione per la probabilità di essere infetto dato un esito positivo del test, che è l'informazione che cerchiamo:

$$p(\text{test positivo}) = \frac{p(\text{test positivo}, \text{AIDS si}) + p(\text{test positivo}, \text{AIDS no})}{p(\text{test positivo})} \quad (4)$$

	p (test AIDS)		p (AIDS)	
	AIDS sì	AIDS no	AIDS no	AIDS sì
Test positivo	100%	0,2%	1/600	599/600
Testo negativo	0%	99,8%		

Tabella 1 - Tabelle di probabilità associate ai nodi TEST ed AIDS nella rete in Figura 3.

Per calcolare questo valore è necessario conoscere la probabilità $p(\text{test positivo})$ che il test sia positivo, che è data dalla somma della probabilità che il test sia positivo e la persona infetta e della probabilità che il test sia positivo e la persona non infetta:

$$p(\text{AIDS si} | \text{test positivo}) = \frac{p(\text{test positivo} | \text{AIDS si}) \cdot p(\text{AIDS si})}{p(\text{test positivo})} \quad (5)$$

Usando la (2), quest'ultima relazione può essere esplicitata come segue:

$$p(\text{test positivo}) = \frac{p(\text{test positivo} | \text{AIDS si}) \cdot p(\text{AIDS si}) + p(\text{test positivo}, \text{AIDS no}) \cdot p(\text{AIDS no})}{p(\text{test positivo})} \quad (6)$$

Dalla (4) e dalla (6) emerge chiaramente che per rispondere alla domanda che ci siamo posti abbiamo bisogno di un'informazione che avevamo trascurato, ovvero la probabilità $p(\text{AIDS si})$ che un cittadino selezionato a caso tra la popolazione italiana (quindi senza comportamenti a rischio) abbia contratto l'AIDS. Considerando la stima realistica $p(\text{AIDS si})=1/600$, dalla (4) si ottiene

$$p(\text{AIDS si} | \text{test positivo}) = 45\%$$

È quindi ancora più probabile essere non infetti che infetti, nonostante il test abbia dato risultato positivo. Tale risultato deriva dal fatto che il teorema di Bayes bilancia in maniera appropriata le osservazioni (il risultato dell'analisi) con le conoscenze 'a priori' riguardanti il problema in considerazione (nel nostro caso la bassa diffusione dell'AIDS nella popolazione italiana).

È interessante notare che solo scegliendo $p(\text{AIDS si}) = p(\text{AIDS no}) = 50\%$ la (4) restituisce $p(\text{AIDS si} | \text{test positivo}) = 99,8\%$; d'altra parte è assurdo pensare che una per-

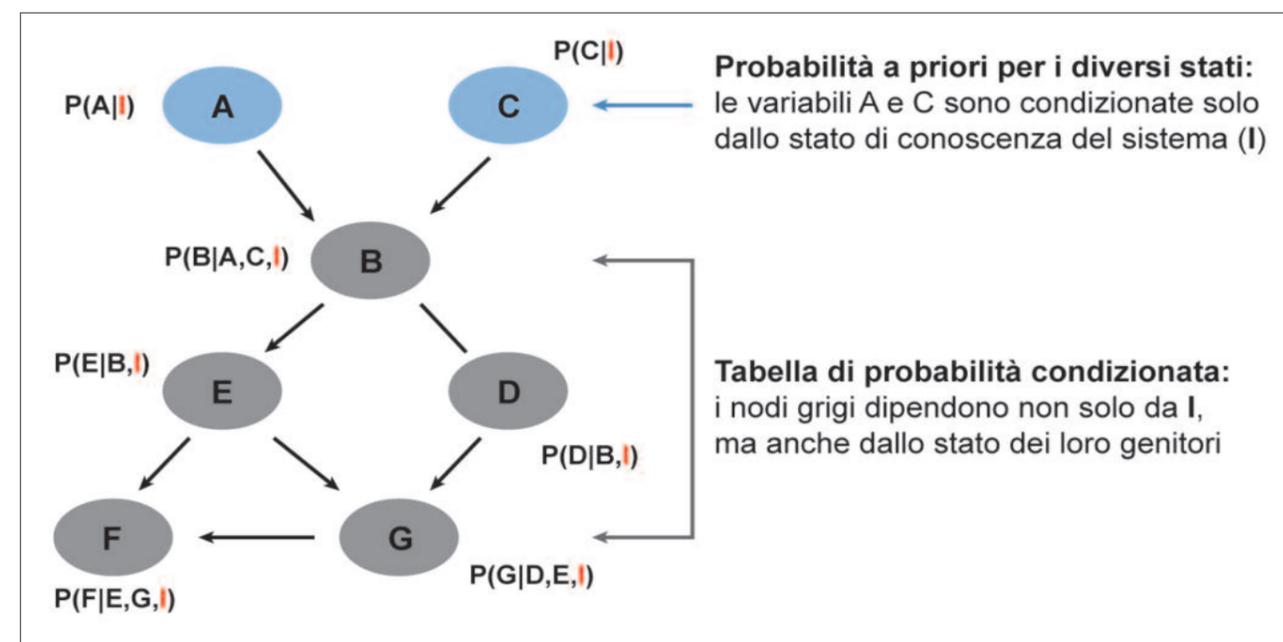


Figura 2 - Esempio di rete bayesiana. I nodi in cima alla rete (in blu) non hanno genitori, mentre i nodi grigi sono condizionati da altre variabili della rete.

sona scelta a caso abbia la stessa probabilità di essere o meno infetta dal virus dell'AIDS! Per convincerci ulteriormente del risultato ottenuto, supponiamo di sottoporre idealmente al test dell'AIDS l'intera popolazione italiana (diciamo 60 milioni di persone). Il test risulterà positivo sia per la totalità delle persone infette ($1/600 \cdot 60 \text{ milioni} = 100 \text{ mila}$) che per lo 0,2% delle persone non infette ($0,2\% \cdot 59,9 \text{ milioni di persone} = 119.800 \text{ falsi positivi}$). Il numero di falsi positivi è confrontabile con quello dei veri positivi perché, pur

essendo la probabilità di un falso positivo molto bassa, il numero di persone non infette è tre ordini di grandezza maggiore di quella delle persone infette. La probabilità di essere affetti da AIDS, se il test ha dato risultato positivo, è uguale alla proporzione di persone infette rispetto al numero totale di persone per il quale il test è risultato positivo, ovvero $100.000 / 219.800 = 0,45$.

Il problema del test dell'AIDS sopra descritto può essere schematizzato come in Figura 3, dove la variabile causa (AIDS) e la variabile osservazione (TEST) sono legate da una freccia che rappresenta la relazione causale tra i possibili stati della malattia del nodo AIDS (persona infetta o non infetta) e i due risultati del test. Alla variabile TEST è associata la Tabella 1 che quantifica la relazione espressa dalla freccia e che contiene quindi le probabilità condizionate sopra descritte. Alla variabile AIDS sono associate le due probabilità di essere infetti o meno da AIDS. Il verso della freccia in Figura 3 esprime la direzione in cui è noto il condizionamento tra le variabili in esame. Nel caso del test dell'AIDS abbiamo informazioni sulla probabilità che il test abbia un certo esito a seconda che la persona sia o meno

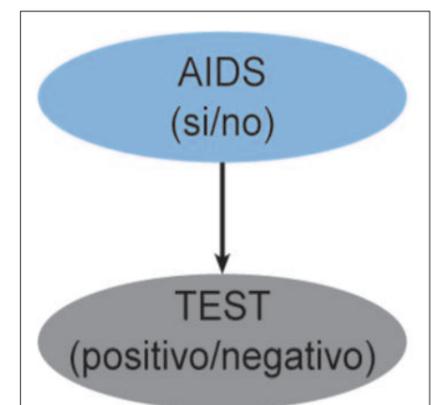


Figura 3 - Rete bayesiana per il problema AIDS.

infetta dal virus (significatività e specificità del test). Quello a cui siamo interessati è percorrere la freccia in verso contrario, ovvero valutare la probabilità del nodo AIDS a partire dalle informazioni sull'esito del test. La rete in Figura 3 è il più semplice esempio di rete bayesiana, con due sole variabili coinvolte. In situazioni più complesse ogni effetto può essere a sua volta causa di altri effetti, gli effetti possono essere tra loro dipendenti e così via. I software che implementano l'inferenza bayesiana sono in grado di propagare le informazioni in ogni nodo della rete utilizzando il teorema di Bayes, ovvero di estendere a molte variabili il processo che abbiamo applicato al problema del test dell'AIDS.

2 Reti bayesiane: struttura e primi esempi

In generale una rete bayesiana (Figura 2) consiste di un insieme di variabili dette nodi (che indicheremo con lettere maiuscole, A,B,C,...), che si possono trovare in un numero finito di stati mutuamente esclusivi (che indicheremo con lettere minuscole; ad esempio gli stati del nodo

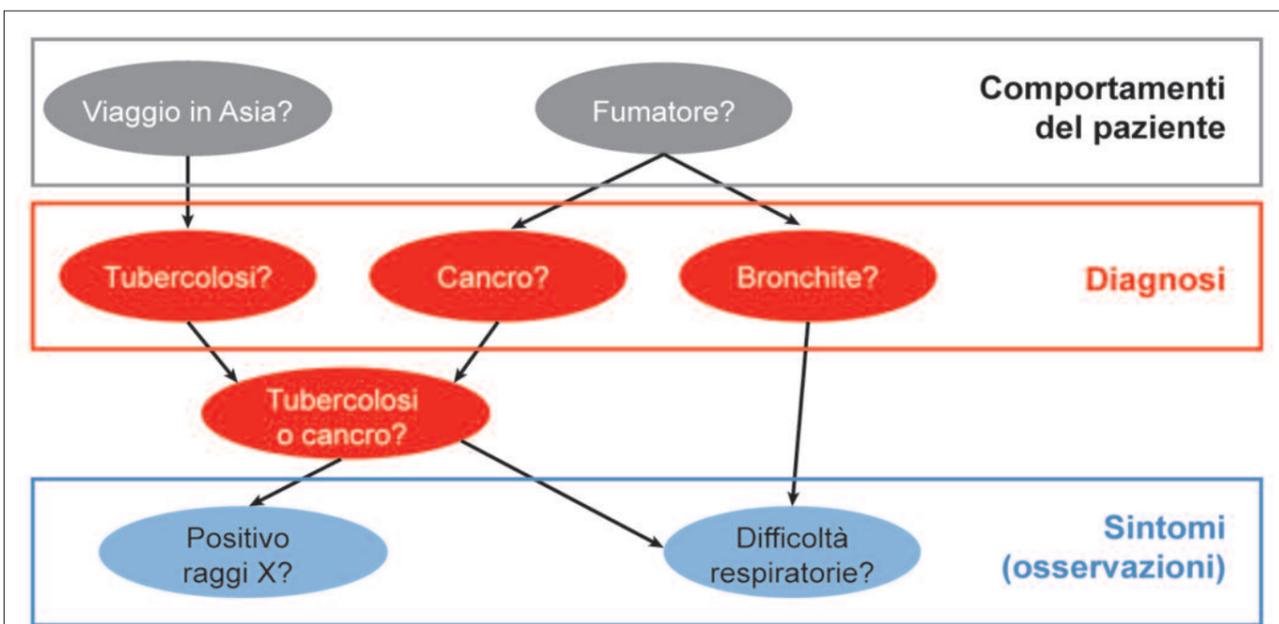


Figura 4 - La rete Asia, introdotta da Lauritzen e Spiegelhalter nel 1988, è storicamente tra i primi esempi di rete bayesiana.

Asaranno indicati con a_1, a_2, a_3, \dots . Le relazioni (probabilistiche e deterministiche) tra le diverse variabili sono rappresentate da frecce. Le variabili insieme alle frecce che le congiungono formano un grafico aciclico, ovvero un grafico in cui non esiste nessun cammino che permetta di partire da una variabile e tornare sulla stessa seguendo le direzioni delle frecce. Ad ogni variabile E condizionata da altre variabili C_1, \dots, C_n - chiamate 'genitori di E ' - è associata una tabella di probabilità condizionata $P(E|C_1 \dots C_n)$ che quantifica la dipendenza del nodo E , detto 'figlio', dai nodi genitori. Nel caso in cui la variabile E (con stati e_1, \dots, e_n) è condizionata da una sola variabile C (con stati c_1, \dots, c_m) $P(E|C)$ è una tabella ($n \times m$) contenente tutte le probabilità $P(e_i|c_j)$ associate alle diverse combinazioni di stati dei nodi C ed E .

La tabella 1 per il nodo TEST è di questo tipo. Nel caso in cui E è condizionata da due variabili C_1 e C_2 la tabella di probabilità condizionata ha n righe ed $m_1 \times m_2$ colonne e così via al crescere dei nodi genitori. Se una variabile A con n stati non ha genitori, la tabella a essa associata si riduce ad una singola colonna di n numeri, ciascuno dei quali rappresenta

la probabilità che la variabile A si trovi in uno dei suoi stati a_i , ovvero

$$P(A) = (x_1, \dots, x_n) \quad x_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

dove x_i è la probabilità che A si trovi nello stato a_i . Le probabilità x_i non sono condizionate dalle altre variabili presenti nella rete, ma sono certamente condizionate dalle informazioni che abbiamo sul modello o problema che stiamo descrivendo¹. La tabella di probabilità per il nodo AIDS è di questo secondo tipo.

Uno dei primi esempi accademici di rete bayesiana è la rete Asia [4], rappresentata in Figura 4; essa mostra in maniera efficace quali sono la potenzialità di questo strumento. Si tratta della versione semplificata di una rete per la diagnosi di malattie ai polmoni, in particolare tubercolosi, cancro e bronchite.

Ogni nodo della rete corrisponde a un comportamento del paziente o al risultato di un esame medico, mentre la direzione delle frecce descrive le relazioni tra le variabili: ad esempio essere fumatore alza la probabilità di avere un tumore ai polmoni o di soffrire di bronchite, mentre non ha alcuna relazione con la tubercolosi.

Nel momento in cui si inseriscono nella rete le informazioni sul paziente in esame (sintomi e comportamenti), queste si propagano all'interno della rete, aggiornando in maniera quantitativa le probabilità associate ai nodi non noti della rete (malattie). Le immagini 5 e 6 sono l'interfaccia grafica per la rete Asia di uno dei software utilizzati per la costruzione di reti bayesiane Hugin Expert [5], prima e dopo che siano inserite le informazioni relative al paziente e sui sintomi abbiano cambiato le probabilità iniziali di avere una delle tre malattie. La rete Asia può essere facilmente ampliata includendo risultati di ulteriori test utili alla diagnosi, semplicemente aggiungendo nuovi nodi alla struttura già esistente. I software in commercio per l'implementazione di reti bayesiane sono comprensivi di API, permettendo così di gestire i problemi a livello di programmazione, effettuare analisi di sensibilità rispetto alle variazioni di determinati parametri, o gestire informazioni real time all'arrivo di nuovi imput, con ovvie applicazioni su sistemi esperti.

L'approccio alla base della rete Asia può

opinioni diverse sulle probabilità da assegnare ad un certo evento.

a conoscenza del fatto che il dado è truccato la nostra idea sulla probabilità dell'uscita del numero 6 sarebbe diversa. Lo stato di informazione può essere diverso da soggetto a soggetto, in quanto persone diverse possono avere informazioni diverse e pertanto

¹ Ogni probabilità è sempre condizionata almeno dal nostro stato di informazione rispetto al problema che stiamo descrivendo: la probabilità che il lancio di un dado dia risultato 6 è 1/6 perché riteniamo le facce del dado equiprobabili. D'altra parte se fossimo

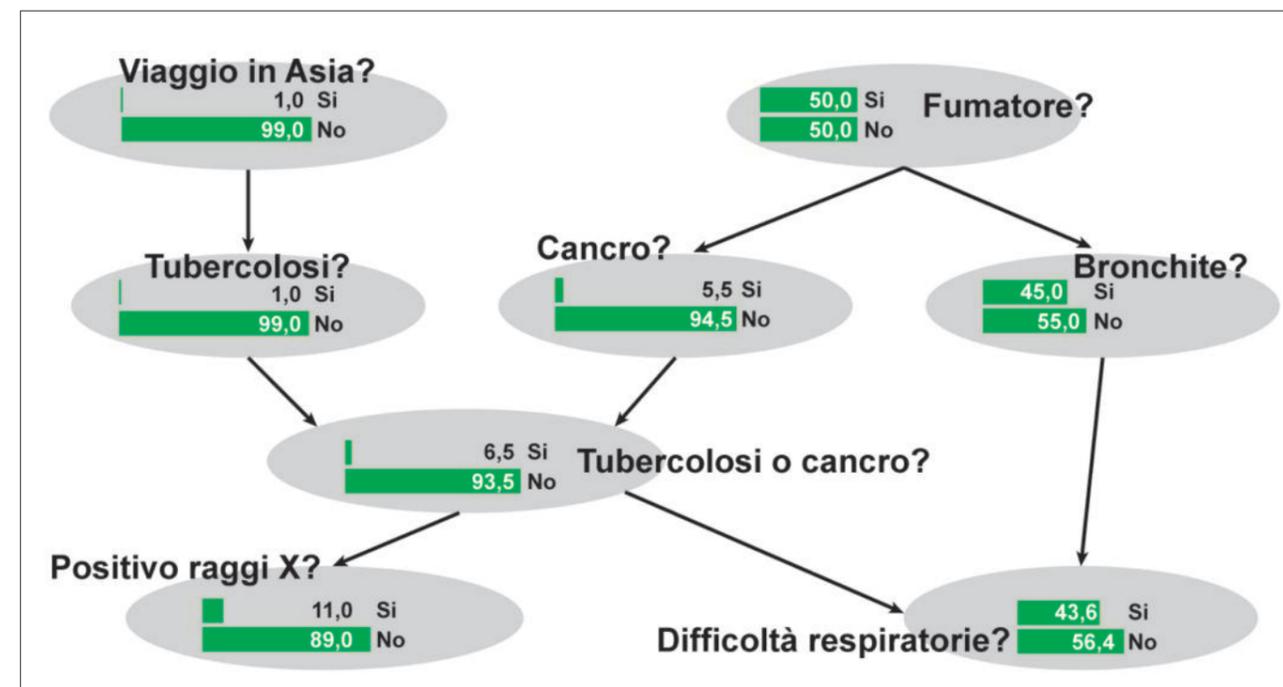


Figura 5 - Rete Asia prima di inserire le informazioni sul singolo paziente. Le probabilità per ciascun nodo figlio sono calcolate dal software bayesiano a partire dalle probabilità a priori e condizionate che sono state inserite in fase di costruzione della rete.

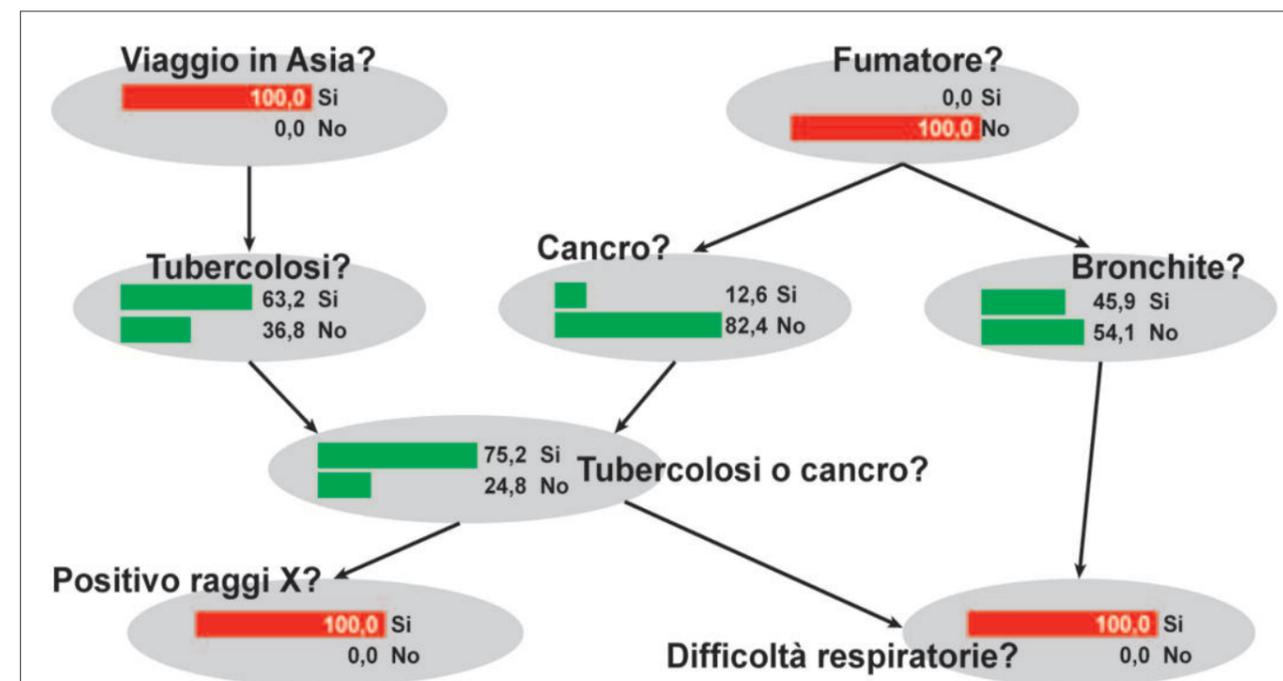


Figura 6 - Rete Asia in cui sono state inserite le informazioni sul paziente e i risultati delle analisi. La diagnosi più probabile è quella di tubercolosi, con una probabilità del 63,2%, mentre le probabilità associate alla presenza di un tumore o bronchite sono rispettivamente del 12,6% e del 45,9%.

INNOVAZIONE
MOBILE
SICUREZZA
NETWORK

INNOVAZIONE
MOBILE
SICUREZZA
NETWORK

essere facilmente generalizzato ad altri campi. Si pensi ad esempio all'analisi dei guasti in una rete di telecomunicazioni, dove gli allarmi corrispondono alle osservazioni sul Sistema di Gestione e i guasti delle diverse componenti tecnologiche rappresentano le cause di cui si vogliono inferire le probabilità. Le reti bayesiane rappresentano inoltre lo strumento ottimale per l'integrazione di dati provenienti da rivelatori e sensori di diverso genere. Un esempio di integrazione di algoritmi bayesiani e sensori di posizione è il progetto *Wearable Museum* del MIT [6], in cui i dati riguardanti gli spostamenti di un visitatore in un museo e i tempi di sosta davanti alle diverse opere esposte consentono di ottenere informazioni utili (ad es. la tipologia di opere preferite dal visitatore, nonché il tempo a sua disposizione) per adattare i contenuti di una guida interattiva ai suoi specifici interessi.

L'ipotesi cruciale del progetto è che i visitatori possano essere classificati in alcune tipologie definibili in base alle caratteristiche della visita (percorso e durata); possibili tipologie di visitatori sono ad esempio l'appassionato d'arte, il visitatore selettivo, interessato alle sole opere principali, così come il visitatore con poco tempo a disposizione, che vuole avere solo un'idea generale delle opere esposte. Una rete bayesiana appositamente sviluppata (Figura 7) permette di stimare con alta probabilità la categoria di appartenenza del visitatore, sulla base dai dati misurati da un sensore di posizione, e di fornire informazioni adeguate al contesto di fruizione.

Le probabilità necessarie per il funzionamento della rete *Museo* sono definibili sulla base di ricerche di anteriorità sul comportamento dei visitatori o in base a stime soggettive, permettendo la realizzazione immediata del progetto. D'altra parte, una volta in funzione, la guida interattiva fornisce una grande quantità di informazioni sui visitatori del museo e i loro comportamenti, che possono essere utilizzate per ridefinire i parametri della rete stessa.

Per un altro originale e interessante esempio di uso dell'inferenza bayesiana, questa volta in campo forense, si rimanda a [7], in cui i concetti di base delle reti bayesiane

sono introdotti attraverso un toy model (implementato con *Hugin Expert* e scaricabile online, si veda [7]) che permette di discutere alcuni punti che risultano cruciali quando si voglia estendere il ragionamento qui presentato a casi reali, quali la presenza di errori nei report forniti dai rivelatori che forniscono i dati sperimentali e l'effetto di report concordi o discordi sull'aggiornamento delle probabilità.

3 Vantaggi delle reti bayesiane

Diversi sono i motivi che fanno delle reti bayesiane strumenti privilegiati nella gestione dell'incertezza. Ne elenchiamo di seguito i principali, evidenziando in particolare le differenze essenziali tra reti bayesiane e reti neurali.

Le reti bayesiane offrono la possibilità di integrare in un approccio unitario probabilità provenienti da fonti diverse: conoscenze teoriche, frequenze in un database, così come stime soggettive sul verificarsi di un evento². Al contrario le reti neurali sfruttano pesantemente i dati sperimentali, senza i quali non potrebbero essere addestrate e quindi utilizzate, ma non consentono di utilizzare le conoscenze a priori rispetto al problema in esame.

Per costruire una rete bayesiana è necessario inserire le sole probabilità condizionate associate alle variabili legate tra loro da una freccia causale. Questo comporta un grosso vantaggio computazionale. Nel caso della rete *Asia* ad esempio è necessario inserire solo 28 valori di probabilità, contro le $2^8=256$ configurazioni di stati diversi descritti dalla rete. Nello specifico i 28 valori di probabilità per la rete *Asia* corrispondono a 2 probabilità per ciascuno dei 2 nodi genitori, $2 \times 2 \times 2$ valori di probabilità condizionata per il nodo 'difficoltà respiratorie' e 2×2 valori per gli altri 4 nodi della rete diversi da 'tubercolosi o cancro', che è un OR logico.

La costruzione di una rete bayesiana avviene a livello 'locale', individuando le relazioni tra i nodi e stimando le probabilità corrispondenti. Una volta strutturata la rete e inseriti i valori di probabilità, l'aggiornamento mediante software per-

mette un'aggiornamento globale delle probabilità, un'operazione che va al di là delle capacità della mente umana (già la semplice rete dell'appendice J di [7] mostra aspetti inizialmente controintuitivi). Questo rappresenta un grosso vantaggio, in quanto già in reti con 4 o 5 nodi si ha difficoltà a controllare le relazioni globali a livello puramente intuitivo, poiché la trasmissione delle evidenze nella rete avviene in maniera complessa.

Per poter trarre informazioni da una rete bayesiana non è indispensabile una perfetta conoscenza di tutte le probabilità legate alle diverse variabili, né occorre addestrare la rete con un enorme numero di casi, come è invece necessario nel caso delle reti neurali. Le reti bayesiane sono in grado di fornire la migliore sintesi della situazione di incertezza, sulla base delle informazioni e dei dati a disposizione.

Allo stesso tempo le probabilità inserite nella rete vengono aggiornate nel momento in cui si acquisisce nuova conoscenza sul sistema o sul processo che si sta rappresentando. Si pensi ad esempio alla rete *Asia*. La rete può essere costruita inizialmente sulla base di dati medici preesistenti; d'altra parte, man mano che si utilizza la rete su nuovi pazienti, le informazioni acquisite vengono utilizzate dalla rete per aggiornare le stime delle probabilità iniziali, così che esse siano sempre più rispondenti alla tipologia di pazienti in cura nella specifica clinica che utilizza il software.

Ingrediente indispensabile per la costruzione di una rete bayesiana è un'accurata conoscenza delle variabili rilevanti e delle loro relazioni. D'altra parte al contrario delle reti neurali, che si presentano come 'scatole nere' in cui non si ha alcun controllo del processo che porta dall'input all'output, una rete bayesiana è leggibile in ogni sua parte. Ogni nodo infatti rappresenta una variabile ben definita rispetto al problema in esame e il suo significato, nonché le sue tabelle di probabilità possono essere oggetto di discussione e di analisi anche fra non esperti informatici. In particolare è possibile:

- controllare sotto quali assunzioni valgono le conclusioni della rete;

² La probabilità soggettiva è basata sull'idea intuitiva che la probabilità quantifichi il grado di credenza che un evento accadrà. Una teoria della probabilità basata su questa idea rappresenta il contesto più generale per gestire l'incertezza. Per una breve introdu-

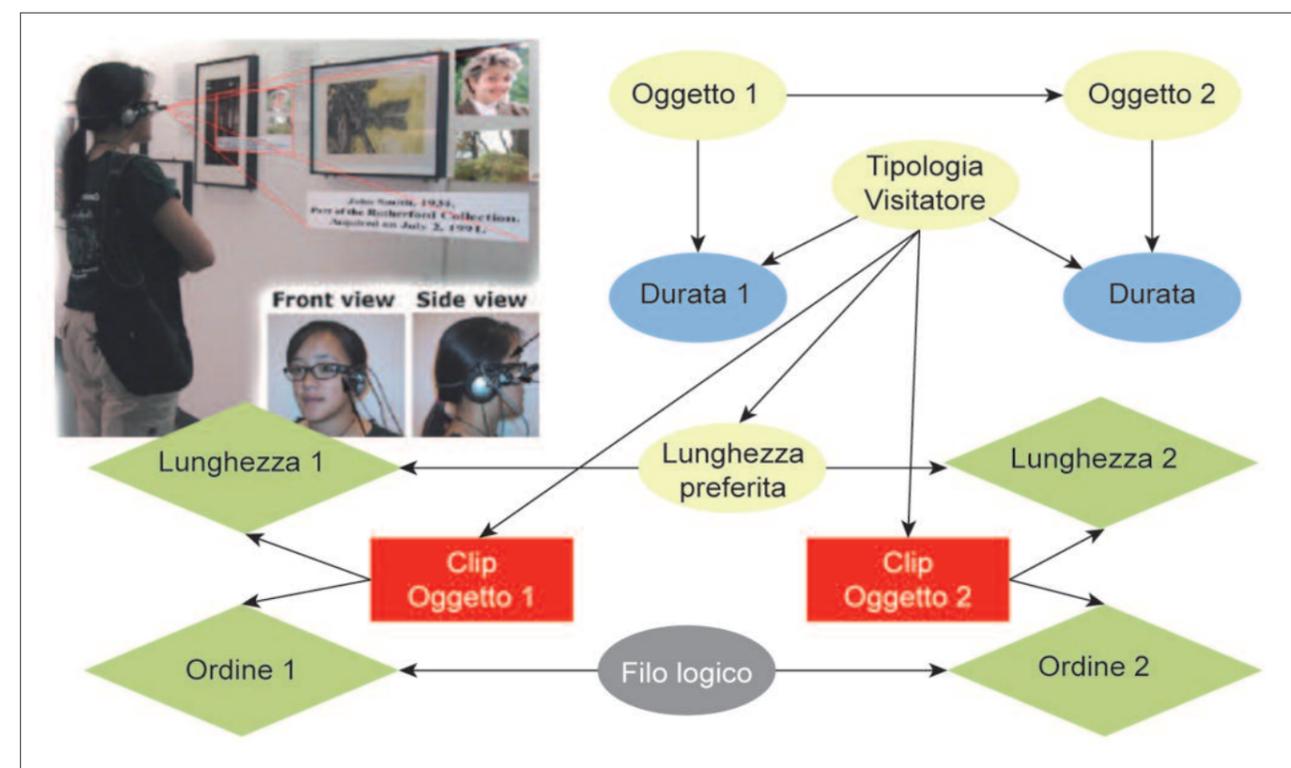


Figura 7 - Prototipo di rete bayesiana per il progetto *Museum Wearable* del MIT. I nodi in azzurro rappresentano le osservazioni, ovvero i tempi di sosta davanti agli oggetti 1 e 2. Le probabilità degli stati associati ai nodi in marrone sono ottenute attraverso il teorema di Bayes. La guida multimediale è montata su appositi occhiali e fornisce informazioni audiovisive come mostrato in foto.

- leggere l'incertezza delle conclusioni della rete e trovare le successive conclusioni più probabili; nel caso della rete *Asia* ad esempio sappiamo dire qual è la seconda diagnosi più probabile. Questo è utile in particolare nei casi in cui lo scarto tra le probabilità associate a due diverse conclusioni è piccolo;
- effettuare analisi di sensibilità, per capire quale accuratezza sulla stime di probabilità è necessaria per le conclusioni di nostro interesse, e per valutare l'opportunità di investire risorse, al fine di migliorare le stime delle probabilità a cui la rete è più sensibile.

Per lungo tempo il limite dell'applicazione dei metodi bayesiani è stato quello del carico computazionale, in gran parte legato ai problemi di integrazione numerica che intervengono nel momento in cui vengono trattate variabili continue. Oggi tale limite è in larga parte superato, sia per lo sviluppo di appositi software di calcolo (si vedano ad esempio [5] e [8]) che di effi-

cienti tecniche di stima Monte Carlo. Ci sembra infine opportuno sottolineare come l'approccio bayesiano rappresenti un metodo ormai riconosciuto e validato a livello internazionale. Non è un caso per esempio che la NASA nel 2009 abbia reputato utile pubblicare un manuale sull'inferenza bayesiana [9].

4 Applicazioni delle reti bayesiane

Le reti bayesiane rappresentano uno strumento efficace in tutti i campi in cui, dato un insieme di variabili legate da relazioni probabilistiche, si vogliono inferire informazioni su variabili di interesse a partire da dati o osservazioni, sfruttando tutta la conoscenza a disposizione. Si tratta di un problema comune a una grandissima varietà di ambiti e per questo motivo dare una lista completa delle applicazioni delle reti bayesiane è un obiettivo velleitario. Ci

limitiamo pertanto ad alcuni esempi. Oltre al campo medico, in campo scientifico l'approccio bayesiano è utilizzato in vari campi, dalla fisica alla biologia, dalla geologia alla genetica. Importanti sono inoltre le applicazioni nei settori applicativi. Nel *risk management* (in particolare *risk assessment*) in vari ambiti: riduzione del rischio associato alle catastrofi naturali, gestione delle missioni spaziali sono solo i principali. In campo informatico: gestione e controllo delle risorse in diversi tipi di processi, progetti di intelligenza artificiale e robotica. In campo ingegneristico: analisi dei guasti, *troubleshooting* in generale, affidabilità di sistemi e processi. In campo militare: integrazione di dispositivi per *combat identification* e pianificazione di operazioni a diversi livelli. In campo industriale: controllo della produzione, analisi di lancio di nuovi prodotti e analisi di *customer satisfaction*. In campo civile: analisi dei fattori di rischio per la sicurezza autostradale e controllo del crimine. In cam-

po economico: *risk assessment* e integrazione dell'incertezza nella teoria dei giochi. Le reti bayesiane possono essere estese affiancando ai nodi probabilistici fin qui introdotti, altre due tipologie di nodi: nodi di tipo decisionale, i cui stati rappresentano le varie azioni possibili rispetto ad una singola decisione; nodi di utilità, che contengono la funzione di utilità associata a ciascuna decisione e che possono dipendere dalle variabili probabilistiche in gioco. Reti bayesiane così estese prendono il nome di *diagrammi di influenza* [10] e rappresentano il framework ideale per gestire problemi di natura decisionale.

5 Applicazioni delle reti bayesiane nelle TLC

Anche nel campo delle telecomunicazioni l'approccio bayesiano si sta progressivamente affermando in vari ambiti:

- nello sviluppo di sistemi automatici di supporto all'analisi dei malfunzionamenti in reti particolarmente complesse, sia dal punto di vista tecnologico che architetture (ad es. nelle grandi reti telefoniche di operatori nazionali ed internazionali);
- come supporto decisionale nella scelta dei dati per le attività di prevenzione e controllo di situazioni di degrado della qualità dei servizi (ad. es. nelle reti IP per la riduzione dei rischi di fenomeni di congestione del traffico);
- nella scelta dei criteri di ottimizzazione e tuning di infrastrutture tecnologiche caratterizzate da un numero elevato di elementi interdipendenti (ad es. nell'attività di pianificazione cellulare delle reti radiomobili);
- nella modellizzazione e nella valutazione di affidabilità di sistemi tecnologici complessi (ad es. per confrontare l'affidabilità di un insieme di elementi tecnologici integrati secondo diversi criteri);
- nello sviluppo di servizi avanzati basati su dati inferiti dal comportamento della clientela (ad es. nello sviluppo di servizi di infomobilità, che traggono informazioni dai dati di mobilità dei clienti delle reti cellulari);

- nei sistemi di elaborazione delle immagini (ad es. nella ricostruzione di immagini tridimensionali a partire da immagini 2D).

Conclusioni

Le reti bayesiane vantano un numero sempre maggiore di applicazioni in campo ingegneristico e manageriale, in quanto rappresentano uno strumento inferenziale e decisionale estremamente flessibile. Esse non solo rappresentano uno strumento valido nella gestione di problemi complessi, caratterizzati da un grande numero di variabili legate da relazioni sia logico/deterministiche che probabilistiche, ma forniscono anche un'efficace rappresentazione grafica del fenomeno in esame, facilitando la descrizione e la sintesi del problema, aumentandone il grado di comprensione e permettendo di individuare le variabili cruciali tra quelle in gioco. Esse inoltre consentono al committente del progetto, agli esperti dello specifico ambito di applicazione e allo strutturista della rete di lavorare sullo stesso livello, quello della struttura grafica della rete bayesiana, senza che occorra una competenza specifica di tipo matematico o probabilistico. D'altra parte una buona comprensione delle basi concettuali e delle potenzialità delle reti bayesiane è condizione necessaria sia per individuare gli ambiti di applicazione di questo strumento, che per poter strutturare la rete. Per questi motivi abbiamo ritenuto utile introdurre le reti bayesiane attraverso una scelta di case-study semplificati, con l'obiettivo di fornire al lettore informazioni dettagliate su questa metodologia, che riteniamo essere utile nella gestione di numerosi problemi anche nel campo delle telecomunicazioni. ■

serena.cenatiempo@roma1.infn.it
giulio.dagostini@roma1.infn.it
aldo.vannelli@telecomitalia.it



Bibliografia

- [1] Risk, ambiguity and the Savage axioms. Ellsberg, D. 75, 1961, Quarterly Journal of Economics, p. 643-669. http://en.wikipedia.org/wiki/Ellsberg_paradox.
- [2] A three-door game show and some of its variants. Bapeswara Rao, V. V. e Rao, M. Bhaskara. 1992, The Mathematical Scientist, Vol. 17, p. 89-94. http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem.
- [3] Si veda ad esempio:
 - Probabilistic reasoning in intelligent reasoning: network of plausible inference. Peral, J. Morgan Kaufman. 1988;
 - Probabilistic networks and expert systems. Cowell, R.G., Dawid, A.P., Lauritzen, S.L. and Spiegelhalter, D.J. Springer. 1999;
 - Artificial Intelligence: A Modern Approach. Russel, S. e Norvig, P. Prentice Hall. 2009 (La seconda edizione, del 2002, è anche tradotta in italiano, edita da Pearson Education Italia, 2005).
- [4] Local computations with probabilities on graphical structures and their application to expert systems (with discussion). Lauritzen, S.L. e Spiegelhalter, D.J. 50, 1988, Journal of the Royal Society, Vol. Series B, p. 157-224.
- [5] Hugin Expert. Advanced Decision Support using Bayesian Networks. <http://www.hugin.com/>.
- [6] The Museum wearable: real-time sensor-driven understanding of visitors' interests for personalized visually-augmented museum experiences. Sparacino, Flavia. 2002. MIT Media Lab. Disponibile su <http://alumni.media.mit.edu/~flavia/publications.html>, Museums and the Web.
- [7] A defense of Columbo (and of the use of Bayesian inference in forensics): A multilevel introduction to probabilistic reasoning. D'Agostini, Giulio. Disponibile su <http://arxiv.org/abs/1003.2086>.
- [8] Netica. Bayesian Network Software by Norsys. [Online] www.norsys.com.
- [9] Bayesian Inference for NASA Probabilistic Risk and Reliability Analysis. National Aeronautics and Space Administration. <http://www.hq.nasa.gov/office/codeq/doctree/SP2009569.pdf>, 2009.
- [10] Influence diagrams. Howard, R.A. e Matheson, J.E. 1981, Readings on the Principles and Applications of Decision Analysis.

- [11] Teaching statistics in the physics curriculum: unifying and clarifying the role of subjective probability. D'Agostini, Giulio. 1999, American Journal of Physics, Vol. 67, p. 1260-1268. Disponibile su [arxiv:physics/9908014v2](http://arxiv.org/abs/physics/9908014v2).



Serena Cenatiempo

Laureata in Fisica, è dottoranda di ricerca presso l'Università 'La Sapienza' di Roma dove svolge attività di ricerca sui fenomeni di materia condensata. Attualmente collabora con il Campus Biomedico di Roma, tenendo esercitazioni di Fisica Generale e applicando metodi probabilistici per l'interpretazione di dati medici e con Pangea Formazione sia come docente che come consulente per l'uso delle reti bayesiane in problemi decisionali nei contesti industriali e aziendali.



Giulio D'Agostini

Professore associato alla Sapienza, fisico sperimentale delle particelle elementari, ha collaborato ad esperimenti su acceleratori nei laboratori internazionali del CERN di Ginevra e di DESY ad Amburgo. I principali temi di fisica sui quali ha portato dei contributi sono: studio della forza fra quark e gluoni; frammentazione dei quark; decadimenti di quark pesanti; funzioni di struttura del protone e del fotone; ricerca di nuove particelle. Da anni si occupa di questioni probabilistiche e di sviluppo di metodi di analisi dei dati. Sostenitore del così detto approccio bayesiano, ha tenuto conferenze sul tema e ha pubblicato il libro "Bayesian reasoning in data analysis".



Aldo Vannelli

Laureato in Fisica e in Ingegneria dell'informazione, nel 2001 entra in TIM per occuparsi dello sviluppo e dell'innovazione di applicazioni e servizi multimediali su tecnologie 2.5G/3G. In questo ambito ha coordinato numerosi progetti nazionali e internazionali riguardanti l'integrazione multiservizio di voce/video/dati su mobile, la distribuzione di contenuti video su IP mediante Content Delivery Network e lo sviluppo di soluzioni per il Mobile Content Distribution. Da gennaio 2010 opera all'interno della funzione Broadband Content di Telecom Italia dove si occupa delle tecnologie per lo sviluppo delle offerte IPTV, Connected TV e CuboVision.