

Figura 2.22: L'immagine a sinistra mostra la pressione dei diversi punti di appoggio di piedi scalzi (i valori di pressione sono visualizzati su una scala a falsi colori che arriva a 15 N/cm^2). Quella al centro mostra l'effetto dinamico durante una camminata sulla sabbia con picchi di pressione sul tallone (corrispondente all'appoggio del piede, con relativa frenata) e alla parte anteriore (ripartenza). A destra è mostrata una delle basette su cui poggia un ponteggio che ha la funzione di distribuire la forza peso sul terreno, con sottobasetta in plastica per una ulteriore distribuzione della forza e soprattutto per proteggere la pavimentazione.

2.11 Pressione

Passiamo ora a parlare della pressione, termine usato correntemente nel linguaggio comune (pressione di pneumatici, pressione atmosferica, pentola a pressione) anche in senso figurativo, come ad esempio 'essere sotto pressione'. Il concetto fisico di pressione è stato abbondantemente usato nel primo capitolo, e precisamente con riferimento alla pressione dei gas. Come abbiamo fatto nei paragrafi precedenti, in cui abbiamo rivisto e precisato concetti abbastanza noti che stanno alla base della meccanica, nei paragrafi che seguono cercheremo di fare chiarezza su cosa si intende in fisica per pressione, soprattutto riguardo la pressione all'interno di *fluidi*, ovvero non soltanto gas ma anche liquidi. Accenneremo inevitabilmente al fatto qualitativo che la pressione di fluidi non è altro che l'effetto macroscopico di tanti urti di oggetti microscopici, ritornando nel seguito a dare una interpretazione quantitativa del concetto.

2.12 Forza e pressione

Come abbiamo fatto per la forza, colleghiamo anche la pressione a sensazioni fisiologiche anche se la cosa non è semplice in quanto il nostro corpo è sensibile sia alla forza totale applicata che alla 'forze localizzate'.³⁸ Per avere un'idea di cosa si intende per forza localizzata basta premersi

³⁸Per riflettere un momento sul fatto che, a livello di sensazione fisiologica, le cose non sono semplicissime si pensi al semplice esperimento di poggiare sul palmo di una mano sollevata e posta orizzontalmente un 'piccolo' oggetto, che potrebbe essere un sasso o quant'altro, ove per 'piccolo' intendiamo che *prema* al centro più intensamente del resto della mano. Le reazioni fisiologiche saranno dupli: quella dei muscoli di polso e braccio per sostenere la mano con l'oggetto sopra e quella locale su muscoli e nervi che reagiscono allo schiacciamento. (Per provare a separare la reazione dovuta alla forza peso dell'intero oggetto da quelli locali si può provare a poggiare la mano su un qualcosa di morbido.)

una mano con pollice e indice dell'altra mano posti a mo' di pinza. Su palmo e dorso della mano si sentirà la sensazione di pressione, la quale dipende dalla forza che applichiamo fra le dita e anche da dove andiamo a premere (si provi a premere la punta del naso invece della mano e la sensazione sarà notoriamente diversa a parità di forze applicate), in quanto i diversi punti del corpo umano hanno diverse sensibilità.³⁹ Se ripetiamo l'esperimento, inserendo fra una delle due dita e la mano un oggetto piano e rigido (si può usare una tavoletta o un mazzo di carte, oppure si può poggiare la mano su un tavolo e usare il piano stesso del tavolo) si sentirà per confronto l'effetto della forza più o meno distribuita.⁴⁰

Ripetendo esperimenti qualitativi con oggetti di varie forme, semplicemente poggiati o spinti, ci si convince che la sensazione di pressione, e anche l'effetto su corpi deformabili (vedi figura 2.22) dipende dalla *forza applicata ortogonalmente alla superficie di contatto* e dalla *superficie di contatto stessa*. In particolare, la pressione viene così definita come *forza (ortogonale) per unità di superficie* (attenzione al maledetto 'per' della lingua italiana, che in questo caso ha valore distributivo e sta per quindi 'diviso'...):

$$P = \frac{F_{\perp}}{A}. \quad (2.157)$$

Essa va intesa come *pressione media*, se l'area è grande e quindi all'interno di essa la forza può differire da punto a punto. Come al solito dalla grandezza media si arriva ad un concetto di pressione locale quando l'area è, come si dice, 'infinitamente piccola'.

Ad esempio, l'immagine a sinistra di figura 2.22 mostra una mappa dei valori di pressione locali che i piedi esercitano sui diversi 'punti' di una superficie orizzontale, ove per 'punti' si intendono in realtà delle piccole aree A_i compatibili con la risoluzione sperimentale dello strumento di misura. Avremo quindi, per ciascuna area

$$P_i = \frac{F_{\perp i}}{A_i}, \quad (2.158)$$

dalla quel potremmo rivarci la forza peso e quindi la massa della persona sommando su tutti gli elementi

$$F_{\perp} = \sum_i P_i A_i \quad (2.159)$$

$$m = \frac{F_{\perp}}{g}. \quad (2.160)$$

2.12.1 Unità di misura e alcuni valori di riferimento

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura pressione coerente con le altre unità corrisponde al valore prodotto da un newton su un metro quadrato e va sotto il nome di *pascal* (Pa), ovvero

$$1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2}. \quad (2.161)$$

³⁹Approfittiamo per richiamare il concetto di *sensibilità di uno strumento di misura*, incontrato nel paragrafo 1.8.3 per far notare come i due concetti siano strettamente collegati: si tratta del rapporto fra risposta e stimolo, qualsiasi essi siano (lo stimolo può essere una massa posta su una bilancia, una forza applicata ad una molla, la temperatura a cui è posto un termometro, e cos' via; la risposta può essere l'indicazione della bilancia, l'allungamento della molla, l'innalzamento della colonnina di mercurio, e così via).

⁴⁰Così pure l'esperienza comune insegna che se dobbiamo portare uno zaino o una borsa a tracolla, è preferibile preferiamo che la cinta sia abbastanza larga in modo tale che, come si dice "il peso sia meglio distribuito".

Notoriamente questa pressione è 'piccola', ove tale aggettivo si riferisce alle scale 'antropiche', ovvero rispetto ai quali il corpo umano è sensibile. Ad esempio i valori di *pressione atmosferica*⁴¹ sono intorno a 100000 Pa, chiamata *bar*, ovvero

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = \frac{10 \times 10^4 \text{ N}}{1 \text{ m}^2} = \frac{10 \text{ N}}{1 \text{ cm}^2}, \quad (2.162)$$

ovvero circa uguale alla pressione esercitata, *nel vuoto*⁴² e per effetto della forza peso, da un oggetto di 1 kg su un cm². Un sottomultiplo del bar usato correntemente è la sua millesima parte, ovvero un *millibar*, che quindi corrisponde a 100 Pa (quest'ultimo è chiamato per ovvi motivi *ettopascal* ma non sembra godere di una grande popolarità). Riassumendo

$$1 \text{ mbar} = 10^{-3} \text{ bar} = 100 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ dm}^2}, \quad (2.163)$$

ovvero circa la pressione esercitata, nel vuoto e per effetto della forza peso, da un oggetto di 100 g su un dm² (si immagini ad esempio un parallelepipedo di acqua di base 10 cm × 10 cm e altezza 1 cm).

Siccome normalmente non percepiamo l'effetto della pressione atmosferica, benché il suo valore sia decisamente elevato (10 N su un cm² non è proprio una sciocchezza! Sul motivo per il quale non la percepiamo torneremo nel seguito) cerchiamo di farci un'idea di alcuni valori di pressione che possiamo riprodurre facilmente e apprezzare con le nostre sensazioni. (Precisiamo una volta per tutte, anche se il motivo verrà chiarito nel seguito, che i valori di pressione che troveremo non saranno 'pressioni assolute', bensì i valori aggiuntivi alla pressione atmosferica.)

Carta per stampanti La normale carta per stampanti e fotocopie in formato A4 ha una densità 'superficiale' $\rho_S = 80 \text{ g/m}^2$, ovvero ogni metro quadrato ha una massa di 80 g e quindi un foglio A4, di dimensioni standard 210 mm × 297 mm, con ottima approssimazione 5 g (4.990 g per la precisione). La pressione esercitata da un pezzetto di tale carta, $P_C = (\rho_S A g)/A = \rho_S g$, *indipendentemente da forma e dimensione* (purché appoggi completamente e non in parte). Numericamente

$$P_C = 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.080 \text{ kg/m}^2 = 0.784 \text{ Pa} \approx 0.8 \text{ Pa}. \quad (2.164)$$

Insomma, un pezzettino di carta esercita sul palmo di una mano la pressione di poco inferiore a un pascal e questo dà un'idea della piccolezza di tale unità di misura.

Alcune monete Altri oggetti facilmente reperibili per 'calibrare' la nostra percezione di pressione sono le monete di uso corrente. Ad esempio un centesimo pesa 2.35 g e ha un diametro di 1.63 cm, mentre un euro pesa 7.46 g e ha un diametro di 2.33 cm. Le pressioni che esercitano sul palmo di una mano sono rispettivamente

$$P_{1cent} = \frac{9.8 \text{ m/s}^2 \times 2.35 \times 10^{-3} \text{ kg}}{\pi (1.63 \times 10^{-2} \text{ m}/2)^2} = 110 \text{ Pa} \quad (2.165)$$

$$P_{1Euro} = \frac{9.8 \text{ m/s}^2 \times 7.46 \times 10^{-3} \text{ kg}}{\pi (2.33 \times 10^{-2} \text{ m}/2)^2} = 171 \text{ Pa} \quad (2.166)$$

In pratica la pressione esercitata dalla monetina di un *centesimo* sulla mano circa un *millibar*. Diciamo che siamo già su qualcosa di apprezzabile dal punto di vista sensoriale.

⁴¹Non si confonda il valore di pressione atmosferica, continuamente variabile con il suo valore 'normale' di 1013 mbar, o più precisamente 1013.25 mbar, che, come vedremo, corrisponde a quello di una colonna di mercurio di esattamente 76 cm.

⁴²Questa precisazione è importante in quanto in condizioni normali a questa pressione si aggiungerebbe quella dovuta alla pressione atmosferica.

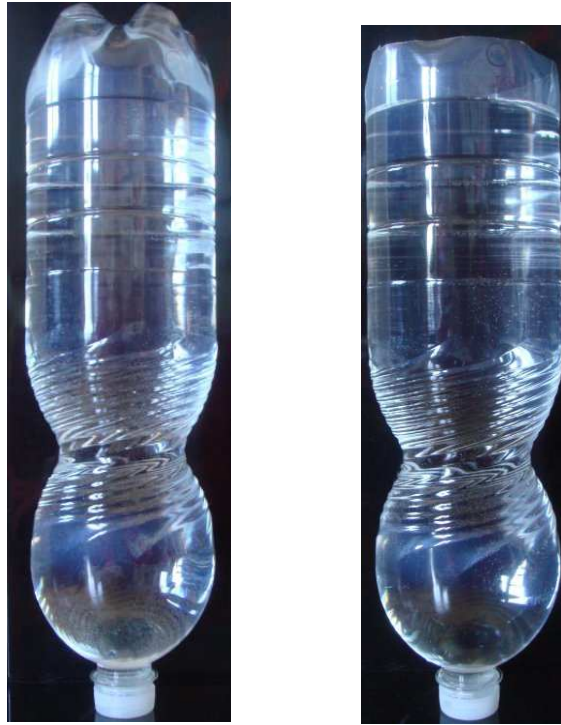


Figura 2.23: Bottiglia d'acqua di 1.5L appoggiata capovolta su una superficie piana. A sinistra la bottiglia è piena fino all'orlo. A destra alla stessa bottiglia è stato tagliato il fondo al fine di rendere palese come la superficie dell'acqua si trovi a pressione atmosferica (vedi testo).

Bottiglia d'acqua capovolta Per avere percepire pressioni maggiori bisogna aumentare la forza peso minimizzando l'aumento di superficie. Un semplice espediente, con materiale facilmente reperibile, è quello di una bottiglia d'acqua, come mostrato in figura 2.23. Quella mostrata in figura è da un litro e mezzo la quale riempita fino all'orlo 'pesa' 1551 grammi (per curiosità la sola bottiglia e tappo pesano 30 g). Il diametro del tappo della parte piana del tappo vale 2.70 cm, ovvero un raggio di 1.25 cm e un'area di 5.7 cm^2 . Tenendo quindi la bottiglia verticalmente come in figura otteniamo

$$P_B = \frac{9.8 \text{ m/s}^2 \times 1.551 \text{ kg}}{\pi (1.35 \times 10^{-2} \text{ m})^2} \approx 26500 \text{ Pa} \approx 0.265 \text{ bar} \approx 265 \text{ mbar}, \quad (2.167)$$

ovvero circa un quarto di atmosfera. Per arrivare a una atmosfera bisognerebbe quasi *quadruplicare la massa*, oppure *dimezzare il diametro della superficie di appoggio*. Non volendo esagerare, visto che quello che ci interessa è l'ordine di grandezza, possiamo poggiare la bottiglia rovesciata su alcune monete da un centesimo impilate una sopra l'altra, arrivando così a circa 0.73 bar.⁴³

(A destra nella stessa figura è mostrata la variante con il fondo della bottiglia tagliato e con l'acqua che arriva fino all'ultima riga orizzontale, per una massa totale di 1307 g e quindi

⁴³Se si aumenta la massa usando una bottiglia da due litri e si appoggia la bottiglia rovesciata su una monetina da un centesimo, la pressione esercitata dalla moneta sormontata dalla bottiglia vale circa 0.96 bar (e chi prova il trucco della monetina si accorge dall'impronta lasciata sulla mano che la pressione non è omogenea e bisognerebbe limare la moneta per togliere il rialzo al bordo!)

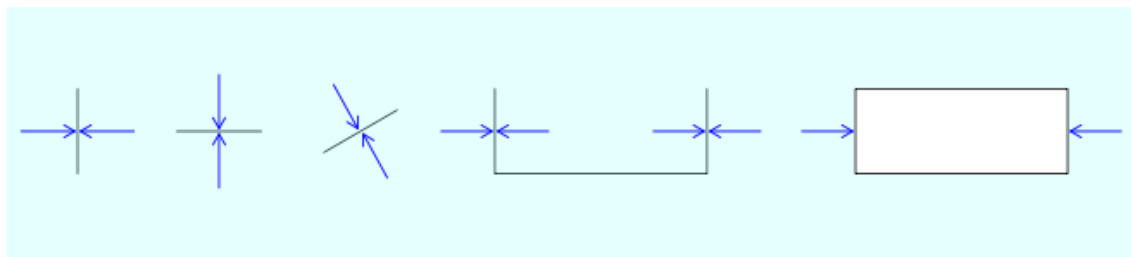


Figura 2.24: Forze su *superfici di test* dovute alla pressione all'interno di un fluido.

una pressione esercitata dal tappo di 223 mbar. Come vedremo fra poco, l'interesse di questa variante non è semplicemente quello banale di aver ridotto la pressione riducendo la massa a parità di superficie di appoggio.)

2.13 Pressione nei fluidi

Gli aspetti più interessanti e per addiritura intriganti della pressione riguardano i fluidi. Infatti tale grandezza è definita all'interno di gas e liquidi anche senza che siano presenti in maniera palese delle forze applicate su superfici ad esse ortogonali. In particolare la pressione in ciascun punto del fluido è definita mediante esperimenti concettuali, eventualmente verificabili. Si può dire che *la pressione di un fluido sia una proprietà in virtù della quale, data una (piccola) superficie piana, ipotetica o reale, a contatto con esso e comunque orientata, il fluido esercita su di essa una forza ad essa ortogonale la cui intensità è pari al prodotto della pressione per l'area della superficie.* La piccolezza della superficie nella definizione è richiesta in quanto se la superficie *di test* non è perfettamente orizzontale la pressione, come vedremo fra poco, varia da punto a punto. Se il fluido è connesso ad opportuno pistone possiamo misurare la pressione *media* come rapporto fra forza che bisogna applicare al pistone per tenerlo fermo e l'area del pistone a contatto con la superficie (come al solito si stanno trascurando le eventuali forze di attrito, nella pratica tenute a livelli accettabili mediante opportuna lubrificazione).

La figura 2.24 riporta alcuni esempi nei quali sono mostrate ipotetiche superfici, viste trasversalmente, con le forze dovute alla pressione nei punti i cui terminano le frecce dei vettori-forza. Si noti come le frecce abbiano tutte la stessa lunghezza, ad indicare che le tutte le forze raffigurate in figura hanno tutte lo stesso modulo, in quanto tutti i punti sono presi alla stessa altezza all'interno del fluido.

Il rettangolo chiaro a destra rappresenta infine una superficie chiusa e tale quindi per cui la forza sulle pareti esterne non è compensata da una forza all'interno. (Si noti comunque come, alla stessa quota, le forze esterne di pressione siano uguali e contrarie e quindi la risultante delle forze lungo il piano orizzontale è nulla, come si evince peraltro da argomenti di simmetria.) Si noti come la pressione sia una grandezza scalare in quanto la direzione della forza che deriva è legata alla superficie di test, la quale può avere un orientamento arbitrario.

Ricordiamo che il motivo per cui in genere non ci rendiamo conto della pressione atmosferica è che essa agisce da tutte le direzioni e quindi dà risultante nulla.⁴⁴ Ad esempio la forza totale sul palmo della mano vale circa 1000 N (prendiamo una superficie di circa 100 cm²), pari a quella che agisce sul dorso.

⁴⁴Non si confondano le forze dovute alla pressione con quelle di resistenza dell'aria!

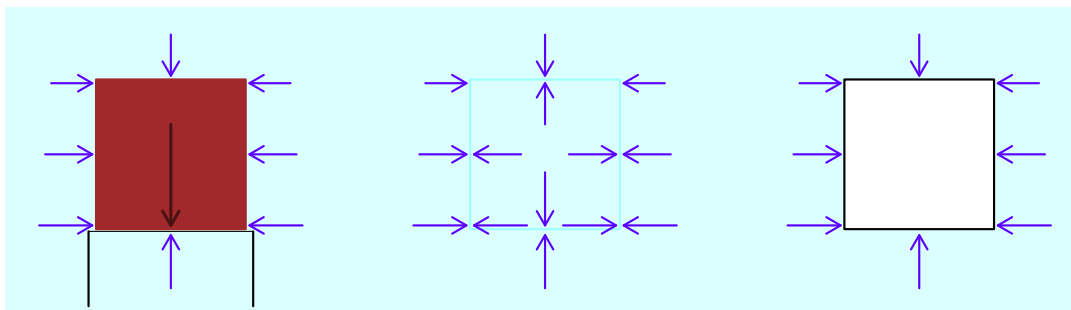


Figura 2.25: Forze di pressione su oggetti immersi in un fluido

Ma il fatto che le due forze si annullano *non è come se non ci fossero*. La risultante nulla significa ad esempio che la mano non subisce una accelerazione (in quale direzione?), ma lo schiacciamento lo subisce e come! Soltanto che il nostro organismo è fatto per vivere immersi nell'aria. Ma se essa cambia molto al valore normale se ne accorge, con risultati che possono essere anche letali.

Dopo questa introduzione sul concetto di pressione dei fluidi, passiamo in rassegna i principali aspetti fenomenologici legati a tale grandezza fisica, alcuni peraltro ben noti e che fanno parte della cultura generale.

2.13.1 Legge di Stevino e principio di Archimede

Prendiamo un oggetto immerso in un fluido *omogeneo* e *in equilibrio*, come raffigurato nel disegno a sinistra di figura 2.25, ove per semplicità è raffigurato un cubo visto da una faccia poggiato su un tavolo stilizzato. Le frecce dirette verso le facce del cubo rappresentano le forze dovute alla pressione del fluido sui diversi elementi di superficie. La lunghezza delle frecce aumenta scendendo verso il basso in quanto, come vedremo fra un attimo la pressione aumenta per effetto del peso del fluido sovrastante.

Analisi di una porzione di fluido in condizioni di equilibrio

Per capire cosa succede, conviene partire dal disegno al centro della stessa figura, il quale mostra un cubo all'interno del liquido stesso. Il ragionamento geniale, simile a quello fatto analizzando la figura 2.16 (e dovuto anche questo a Stevino, che per questo tipo di astrazioni doveva essere particolarmente portato!), consiste nel dire che se il cubo è in equilibrio con il resto del fluido le forze su di esso si devono equilibrare. Per capire meglio il ragionamento, si immagini un cubo di liquido uguale a quello in cui è immerso, contenuto in un recipiente avente le pareti che abbiano esattamente la stessa densità del fluido. Ne segue che

- la forze laterali si devono bilanciare esattamente;
- la forza dal basso verso l'alto sulla faccia inferiore deve essere maggiore di quella dall'alto verso l'alto sulla faccia superiore per compensare la forza peso del cubo di liquido:

$$F_{\downarrow} = F_{\uparrow} + mg; \quad (2.168)$$

- le pressioni in alto e in basso sono quindi legate dalla relazione

$$P_b = \frac{F_{\downarrow}}{A} = \frac{F_{\uparrow} + mg}{A} \quad (2.169)$$

$$= \frac{F_{\uparrow}}{A} + \frac{(\rho A \times h) g}{A} \quad (2.170)$$

$$= P_a + \rho g h, \quad (2.171)$$

ove abbiamo indicato con h l'altezza del cubo, con A la sua area di base e abbiamo espresso la massa come densità per volume.

Come si capisce bene, l'equazione ottenuta non dipende dalla forma della colonna di liquido, mentre richiedeva che il liquido fosse *stazionario* ('in equilibrio' – forze e pressioni all'interno di liquidi in movimento, specie se in 'moto turbolento', sono più complicate da trattare) e assumeva implicitamente che la sua densità non dipendesse dalla profondità.⁴⁵ Essa è nota come *legge di Stevino*⁴⁶ ed è spesso scritta come pressione ad una certa profondità h in funzione alla pressione per $h = 0$:

$$P = P_0 + \rho g h. \quad (2.172)$$

Essa può essere convenientemente espressa in forma differenziale, ovvero come variazione di pressione per unità di variazione dell'altezza del liquido

$$\frac{dP}{dh} = \rho g. \quad (2.173)$$

Ad esempio per l'acqua essa vale⁴⁷

$$\left. \frac{dP}{dh} \right|_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ N/kg} = 9.8 \frac{\text{kPa}}{\text{m}} = 98 \frac{\text{mbar}}{\text{m}} \approx 1 \frac{\text{mbar}}{\text{cm}}.$$

Altri valori interessanti sono quelli dell'aria ($\approx 12 \text{ Pa/m}$) e del mercurio ($\approx 1.33 \text{ bar/m}$, ovvero $\approx 1.33 \text{ mbar/mm}$).

Paradosso idrostatico

In particolare si noti come l'aumento dipende soltanto dall'altezza della 'colonna' di fluido e non dalla massa di fluido in essa contenuto (né tantomeno dalla forma – il fatto che nel nostro ragionamento siamo partiti con un cubo e abbiamo poi implicitamente esteso il discorso ad un parallelepipedo retto di base quadrata è assolutamente irrilevante, in quanto abbiamo fatto uso soltanto della sezione della 'colonna', che si semplifica, e della sua altezza).

⁴⁵Si parla in questi casi di 'fluidi incompressibili', il che farebbe pensare che non tale formula sia valida per l'aria, visto che tutti sappiamo, gonfiando ruote di auto e di bicicletta, che essa si comprime (l'equazione di stato dei gas ci dice che il numero di moli per volume vale $n/V = P/RT$). La richiesta di 'incompressibilità' di questa formula serve soltanto a garantire che a diverse quote la densità del fluido non cambi per effetto della variazione di pressione fra le due quote. Come vedremo fra poco la variazione di pressione dell'aria con l'altezza vale circa 12 Pa/m , ovvero la sua densità varia di circa una parte su diecimila per ogni metro di dislivello.

⁴⁶È curioso notare che questo nome sia una frutto di una tradizione italiana e la voce *Legge di Stevino* di Wikipedia ha un corrispondente soltanto sulla versione portoghese. Curiosando fra le versioni inglese e tedesca si vede come la legge porta il nome di Pascal (http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_law e http://de.wikipedia.org/wiki/Pascalsches_Gesetz), mentre in quella francese la (2.172) è semplicemente chiamata



Figura 2.26: Casi celebri del cosiddetto ‘paradosso idrostatico’. A sinistra, monumento al leggendario ‘Eroe di Haarlem’. A destra esperimento della ‘botte di Pascal’.

Questo fatto è abbastanza controintuitivo, tanto da essersi meritato secoli fa l’appellativo di *paradosso idrostatico*. Una dimostrazione plateale fu fatta da Pascal, il quale dimostrò come la colonna d’acqua contenuta in un tubo relativamente sottile poteva sfondare una botte se la colonna fosse stata sufficientemente elevata, come illustrato artisticamente in figura 2.26. La figura mostra anche il monumento al leggendario “Eroe di Haarlem”, la cui storia è raccontata all’interno del libro per ragazzi ‘Pattini d’Argento’. Il ragazzo olandese, essendosi accorto che una diga stava cedendo, turò la falla con un dito, rimanendo tutta la notte al freddo in attesa dei soccorsi. (La ‘straordinarietà’ del fatto è, a parte il gesto eroico del bambino, come il dito di un bambino potesse opporsi ai “milioni e milioni” di tonnellate di acqua del Mare del Nord.)

Spinta verso l’alto di corpi immersi in fluidi

Ritorniamo ora al disegno a sinistra di figura 2.25. Innanzitutto capiamo adesso come mai le frecce che indicano le forze di pressione aumentano di lunghezza a mano a mano che scendiamo,

to le *théorème fondamental de l’hydrostatique* (http://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_de_Pascal) derivato, insieme alla legge nota in Italia come *legge di Pascal* e che vedremo fra poco (*toute pression exercée sur un liquide se transmet par lui intégralement et dans toutes les directions*), da un ‘Principe de Pascal’ che suona (curiosamente) così: *Dans un liquide en équilibre de masse volumique uniforme, la pression est la même en tout point du liquide et cela aussi longtemps que ces points sont à la même profondeur.*

⁴⁷Notare $g = 9.8 \text{ N/kg}$!

mentre hanno pari lunghezza a parità di quota. Immaginiamo quindi di togliere il piano di appoggio. Va da se che l'oggetto cade (altrimenti a cosa sarebbe servito il piano?). Ma ragioniamo in maniera del tutto generale, anche aiutati dal disegno a destra della stessa figura, che mostra un cubo vuoto ma dalle pareti indeformabili e di peso trascurabile (le solite idealizzazioni della Fisica che aiutano a ragionare). È infatti importante distinguere le forze che agiscono su un singolo elemento di parete, che devono essere compensate dalla struttura del solido o da forze di pressione di un eventuale altro fluido all'interno, da quelle che agiscono sull'intero oggetto. Per quello che ci interessa al momento stiamo assumendo che l'oggetto resista alle forze esterne e constatiamo soltanto che le forze esterne orizzontali alla stessa quota si annullano. Restano soltanto le forze lungo l'asse verticale, delle quali ecco l'inventario:

- c'è naturalmente la forza peso, diretta verso il basso (nulla nel caso a destra di solido idealizzato perfettamente vuoto) e che scriveremo quindi come $-mg$, ovvero $\rho_c V g$, ove ρ sta per la densità del *corpo immerso nel fluido*;
- c'è quindi la forza sulla parete superiore, diretta verso il basso e che vale quindi $-P_{sup} A$;
- c'è infine la forza sulla parete inferiore, diretta verso l'alto e pari a $P_{inf} A$.

La forza totale lungo l'asse z , diretto verso l'alto, sarà quindi pari a

$$F_z = -mg - P_{sup} A + P_{inf} A. \quad (2.174)$$

Facendo uso della legge di Stevino otteniamo quindi, indicando con ρ_f , V_f e m_f densità, volume e massa del fluido:

$$F_z = -mg + (P_{inf} - P_{sup}) A \quad (2.175)$$

$$= -mg + (\rho_f g h) A \quad (2.176)$$

$$= -mg + (\rho_f h A) g \quad (2.177)$$

$$= -mg + m_f g. \quad (2.178)$$

In particolare, si può dimostrare⁴⁸ come l'ultimo, importante risultato non dipende dalla forma del corpo. Si tratta infatti niente di meno che del famoso *principio di Archimede*, ovvero che *un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari alla forza peso del fluido spostato*.⁴⁹

2.13.2 Principio di Pascal

Ritorniamo ora alle implicazioni del disegno al centro di figura 2.25. Esso ci mostra infatti, ragionando su questo ipotetico cubo di fluido in equilibrio, come, proprio in quanto il cubo è in equilibrio e quindi immobile, la risultante delle forze su di esso è nulla:

⁴⁸Capiamo bene come i "si può dimostrare" possano risultare antipatici. In questo caso si tratta soltanto di 'divertirsi' a scomporre le forze di pressione agenti su superfici oblique e mostrare come l'effetto totale è quello dell'enunciato del principio di Archimede.

⁴⁹Per il momento, anche se per parlare di volume spostato stiamo necessariamente pensando a corpi estesi, consideriamo la risultante delle forze applicate come se agissero su un 'punto materiale'. In generale, si può dimostrare che la spinta di Archimede può essere vista agire **lungo una retta verticale che passa per il centro di massa del liquido spostato** (il 'baricentro'). Questa nota è importante quando il corpo è disomogeneo, come ad esempio una scatola sigillata in cui ci sono all'interno oggetti messi alla rinfusa e aventi densità diverse, come ad esempio attrezzi da lavoro, palle da tennis e quant'altro. In questo caso, se si posiziona orizzontalmente la scatola in un liquido, il centro di massa del volume spostato non corrisponderà generalmente con il centro di massa dell'insieme degli oggetti contenuti nella scatola. Forza peso e spinta di Archimede non agiranno sulla stessa retta e il risultato sarà non soltanto una spinta verso l'alto ma anche una ruotazione, la quale continuerà fintanto che i due centri di massa non risulteranno allineati lungo la verticale.

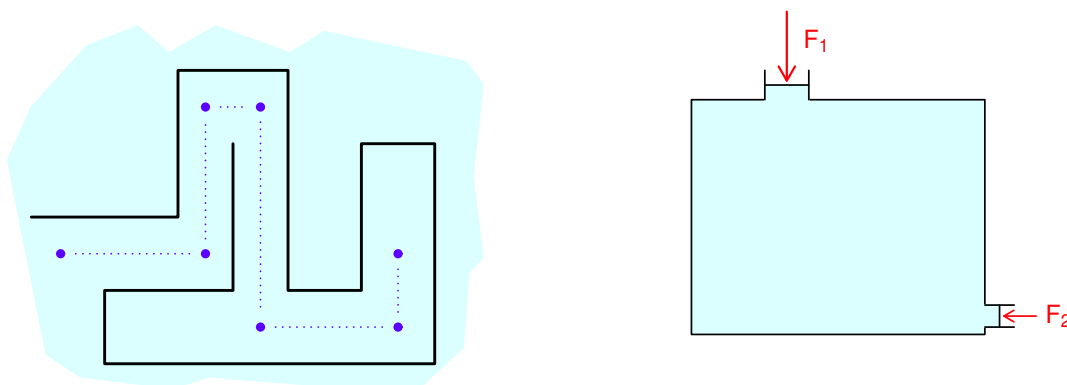


Figura 2.27: All'interno di un fluido la pressione dipende soltanto dalla quota e la differenza di pressione non dipende dai valori assoluti della pressione.

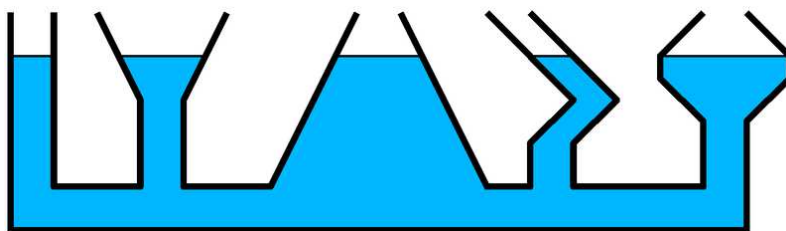


Figura 2.28: Vasi comunicanti (http://en.wikipedia.org/wiki/Communicating_vessels).

- l'annullarsi a coppia delle forze orizzontali contrapposte implica che *la pressione dipende soltanto dalla quota*;
- *l'incremento di pressione dipende soltanto dal dislivello* ed è proporzionale alla densità del fluido.

Sequendo questo filo di ragionamento all'interno di liquidi che occupano recipienti dalla forma complicata a piacere, si può facilmente mostrare come queste regole seguitino a valere in generale (vedi ad esempio disegno a sinistra di figura 2.27). In particolare ne segue il ben noto *principio dei vasi comunicanti*,⁵⁰ ricordato in figura 2.28.

Quando si ragiona “dall'alto verso il basso”, come abbiamo fatto precedentemente, guidati dai disegni di figura 2.25 le cose sembrano molto semplice. Il fatto per alcuni aspetti più intrigante è che le due regole di base dell'idrostatica (pressione uguale a parità di livello e variazione di pressione data da $\rho g h$) sia valida *comunque si cambi la pressione in un punto qualsiasi del fluido*, quindi non soltanto ‘spingendo da sopra’, ma ‘spingendo da qualsiasi parte’. Questo è mostrato nel disegno a destra di 2.27, nella quale è mostrato un fluido racchiuso in un recipiente.

Partiamo dalla forza F_1 , applicata sul *pistone* disposto verticalmente in alto, di superficie A_1 . In equilibrio esso contrasta esattamente la forza di pressione del fluido, diretta verso l'alto e quindi la pressione in alto vale $P_1 = F_1/A_1$. Stesso ragionamento vale per il pistone in basso a destra, per

⁵⁰Il fatto che molte leggi fisiche, che possono essere facilmente spiegate in termini di altre leggi più generali non deve sorprendere e riflette il corso storico del pensiero scientifico.

il quale otteniamo $P_2 = F_2/A_2$, ove, essendo il pistone orizzontale, prendiamo per P_2 il valore medio, ovvero quello all'altezza della freccia orizzontale.⁵¹ Come abbiamo imparato, P_1 e P_2 sono legate dalla legge di Stevino. Chiamando quindi h il dislivello fra la base di pistone in alto e il centro di quello a destra in basso abbiamo

$$P_2 = P_1 + \rho g h \quad (2.179)$$

da cui

$$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} + \rho g h \quad (2.180)$$

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 + (\rho g h) \cdot A_2. \quad (2.181)$$

Se, come rappresentato in figura, A_2 è molto minore di A_1 , anche F_2 è molto minore di F_1 , in quanto la diminuzione di superficie non è compensata dall'incremento di pressione con il volume. Ma immaginiamo ora di aumentare la pressione in alto di Δp aumentando la forza di ΔF_1 . La nuova condizione di equilibrio, per fluidi incompressibili, sarà data da

$$(P_2 + \Delta p) = (P_1 + \Delta p) + \rho g h, \quad (2.182)$$

ovvero

$$P'_2 = P'_1 + \rho g h, \quad (2.183)$$

avendo indicato con P'_1 e P'_2 i nuovi valori. Ovvero, comunque la pressione cambi, se il liquido è incompressibile, abbiamo

$$P'_2 - P_2 = P'_1 - P_1, \quad (2.184)$$

relazione valida *in tutti i punti del liquido*, insistendo ancora una volta sul fatto che il concetto di pressione non si applica soltanto sulle superfici, e collegato alle forze esercitate da pistoni e pareti. Esso è quello di una *grandezza scalare* definita in ciascun punto all'interno del liquido.

Ne segue quindi che *in liquidi incompressibili variazioni di pressione sono propagate in tutti i punti del liquido*. Questa affermazione è generalmente nota come '*principio di Pascal*' e merita alcuni commenti.

- Il fatto che nel nostro ragionamento abbiamo ipotizzato di aumentare la pressione nel pistone superiore e poi ci siamo scritti la condizione di equilibrio nel circuito in basso è un dettaglio irrilevante ai fini del nuovo equilibrio. Potevamo tranquillamente cominciare a ragionare dal pistone posto in basso o da un ipotetico terzo pistone posto ad una quota intermedia. La sostanza del 'principio' è che *un aumento di pressione, ovunque provocato, si propaga dappertutto*.
- Indicando con ΔF_1 e ΔF_2 le variazioni di forza nei due pistoni per ripristinare l'equilibrio esse saranno quindi legate da

$$\frac{\Delta F_1}{A_1} = \frac{\Delta F_2}{A_2}, \quad (2.185)$$

⁵¹Questo è corretto fintanto che la pressione varia linearmente con la profondità, ovvero, come abbiamo commentato precedentemente, che ρ e g siano circa costanti nel volume di interesse.

dovendo essere i due rapporti pari a ΔP . Ne segue quindi

$$\Delta F_2 = \frac{A_2}{A_1} \Delta F_1, \quad (2.186)$$

relazione che sta alla base delle ‘macchine’ idrauliche. Ad esempio, se $A_2/A_1 = 1/1000$ con un dito poggiato sul pistone in basso riusciamo a contrastare il peso di un’auto poggiata in qualche modo sul pistone in alto.

- “Dove sta il trucco?”, si chiederà qualcuno. Un conto è contrastare il peso dell’auto e un conto è sollevarla. Se ad esempio vogliamo sollevarla di un centimetro (indichiamo il sollevamento, per generalità, Δz , ove il nome della variabile ricorda che si tratta posizione lungo la verticale), il pistone in basso va spinto molto più di un centimetro. Chiamando lo spostamento del pistone orizzontale con Δx , essendo il liquido incompressibile, abbiamo che ad un aumento di volume verso il pistone in alto (il pistone sale e il liquido entra nel pistone) deve corrispondere una certa quantità di liquido che entra dal pistone posto in basso a destra, ovvero

$$V_1 = A_1 \Delta z = V_2 = A_2 \Delta x, \quad (2.187)$$

da cui

$$\Delta x = \frac{A_1}{A_2} \Delta z. \quad (2.188)$$

Ecco il trucco! Per innalzare un centimetro il pistone con sopra l’auto di, il nostro ‘pistone’ spinto da un dito dovrebbe avanzare orizzontalmente di 100 metri! Ovvero, spostando il dito di un centimetro l’auto si solleverebbe di soli 10 micron (però si solleva!). Ci dobbiamo soltanto attrezzare per sostituire l’ipotetico pistone di lunghezza ‘esagerata’ con un piccolo motore che pompi il liquido necessario.

- Nell’ultimo punto abbiamo parlato direttamente di liquido, in quanto fluido incompressibile. Cerchiamo di rivedere la nostra ipotesi di incompressibilità usata fin qui, cercando di capire cosa succede se invece di un liquido usiamo un gas, e in particolare aria, come avviene in tanti macchinari ad aria compressa. È chiaro che in condizioni statiche la (2.179) è indipendente dal fatto che il fluido sia compressibile o no, in quanto essa dipende soltanto dal fatto che la densità del fluido sia pressoché costante nel volume di interesse. Il problema è che, come sappiamo, la densità del gas varia con la pressione in quanto varia il volume a parità di materia in esso contenuta (vedi figura 2.29 che ricorda lo storico esperimento di Boyle⁵²). Per chiarirci le idee ci possiamo riscrivere quindi la (2.179) come

$$P_2 = P_1 + \rho(P) \cdot g h \quad (2.189)$$

per esplicitare che la densità dipende dalla pressione, ove P rappresenta una pressione ‘intermedia’ fra P_1 e P_2 (il dettaglio è irrilevante fintanto che i dislivelli non siano tali da far aumentare la densità del gas in funzione della quota *a causa del suo stesso peso*). Finché l’aumento di pressione in uno dei pistoni non fa cambiare apprezzabilmente la densità del gas ci ritroviamo praticamente nelle stesse condizioni di ‘fluido incompressibile’. In caso contrario, per dirlo alla buona, ‘si perde qualcosa’ e questo si capisce bene pensando alle variazioni di volumi legate ai pistoni che si spostano: se il gas si comprime lo spostamento

⁵²Per dettagli vedi ad esempio <http://chemed.chem.purdue.edu/genchem/history/boyle.html>

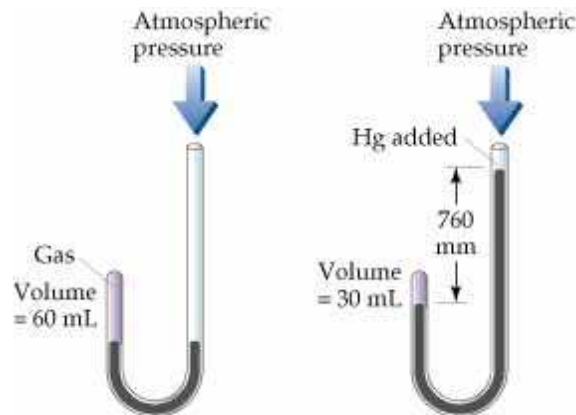


Figura 2.29: Esperimento di Boyle sulla compressibilità dei gas, il cui risultato fu da lui chiamato “spring of air” (molla di aria) per enfatizzare l’aspetto *elastico* del fenomeno. Ad esempio, raddoppiando la pressione, come in figura, si dimezza il volume, il quale ritorna al valore iniziale quando si ripristina la pressione iniziale. La scoperta di Boyle fu la relazione $V \propto 1/P$, inglobata successivamente nell’equazione di stato dei gas perfetti (in quanto $V = nRT/P$).

Δx non si ‘tradurrà’ integralmente in uno spostamento Δz secondo il rapporto inverso delle superfici dato dalla (2.188) e, più precisamente, la variazione Δz sarà inferiore di quella che si avrebbe in un liquido.⁵³

2.14 Ulteriori considerazioni e qualche problemino pratico

Della pressione abbiamo parlato a lungo dal primo capitolo ed alcuni problemi numerici sono proposti in fondo a questo capitolo. Qui vediamo alcune semplici applicazioni dei concetti incontrati.

2.14.1 Condizione di galleggiamento

Un corpo galleggia se la parte che affonda nel liquido è tale da causare una spinta che controbilanci esattamente la forza peso, come mostrato nel disegno a sinistra di figura 2.30. Esprimendo la massa totale come densità per volume e indicando con x la frazione di volume immerso nel fluido, la forza totale è data da

$$F = -\rho_c V g + \rho_f (x V) g = (\rho_c - x \rho_f) \cdot V g, \quad (2.190)$$

la quale deve essere nulla se il corpo è in equilibrio, ovvero

$$(\rho_c - x \rho_f) \cdot V g = 0, \quad (2.191)$$

da cui

$$x = \frac{\rho_c}{\rho_f}, \quad (2.192)$$

⁵³Ma in molti casi questo non è un problema e i sistemi ad aria compressa hanno altri vantaggi, come il fatto che l’aria la possiamo ‘prendere e buttare’ a piacere.

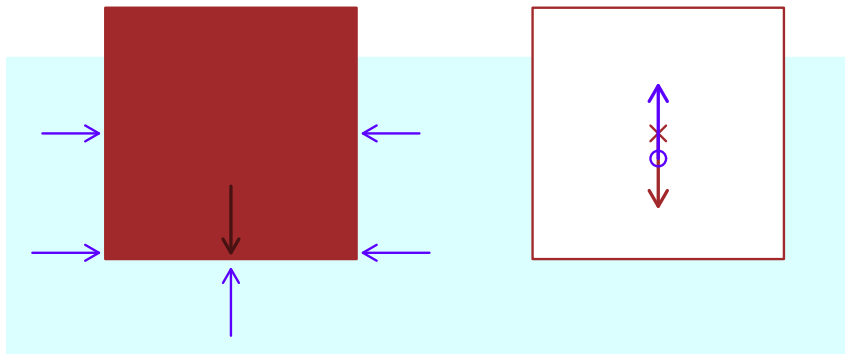


Figura 2.30: Analisi delle forze su un corpo galleggiante. In particolare il disegno a destra mostra i punti di applicazione di forza peso e spinta di Archimede (il corpo è disegnato bianco solo far vedere meglio le frecce associate alle due forze).

con la condizione che x deve essere compreso fra zero (si pensi ad un blocco di polistirolo dall'acqua, che è 'praticamente' tutto fuori dall'acqua) a 1 (caso limite di galleggiamento, corrispondente a liquido in equilibrio con se stesso).

(Il disegno a destra di figura 2.30 mostra in particolare i punti di applicazione delle forze, al fine di far notare come a causa di qualsiasi perturbazione che faccia ruotare leggermente il corpo le due forze formeranno una *coppia* che accentuerà la rotazione. Anche se non potremo entrare nei dettagli accenniamo soltanto al fatto che se i corpi galleggianti esistono significa che dopo un certo angolo di rotazione il sistema tenderà a tornare indietro, anche se qualsiasi disturbo tende a farlo dondolare. Per lo stesso motivo se il corpo galleggiante è per esempio un parallelepipedo la situazione più stabile sarà quella in cui le facce maggiori sono orizzontali.)

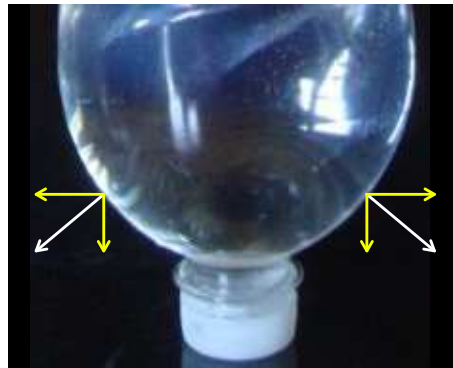


Figura 2.31: Particolare della bottiglia d'acqua poggiata sul tappo, con esempio di decomposizione delle forze di pressione sulle una pareti curve.



Figura 2.32: Misura della reazione alla spinta di Archimede

2.14.2 Pressione sopra e sotto il tappo della bottiglia rovesciata

Riprendiamo la bottiglia d'acqua posizionata verticalmente sul tappo e che ci era servita come esempio di pressione prossima a quella atmosferica (figura 2.23). Consideriamo in particolare il caso della bottiglia con il fondo tagliato (destra in figura), dando ora l'informazione aggiuntiva che l'altezza della colonna di acqua era di 28.0 cm. Sapendo che la variazione di pressione dell'acqua vale 0.98 mbar/cm ci ricaviamo una pressione sul tappo, *al netto della pressione atmosferica*, di 27.4 mbar, ben minore dei 223 mbar calcolati precedentemente, ma che ovviamente si riferivano alla pressione 'del tappo' su una superficie piana. Quindi qualcuno si può chiedere come faccia il tappo a contribuire per quasi 200 mbar.

La soluzione dell'arcano risiede nel fatto che sul tappo si 'scaricano', come si dice in gergo ingegneristico e architettonico, tutte le forze della struttura della bottiglia la quale, pur essendo di plastica, deve essere sufficientemente indeformabile. Mostriamo in figura 2.31 la parte terminale della bottiglia con indicate le forze di pressione su due punti diametralmente opposti data una certa sezione. Come si vede dalle frecce, le componenti orizzontale si annullano mentre quelle verticali si sommano e spingono verso il basso la bottiglia, la quale, data l'entità esigua delle forze in gioco, può essere considerata come un corpo rigido.

2.14.3 Sperimentando su principio di Archimede e principio di azione-reazione

Un simpatico quesito è quello di mostrare a qualcuno un bicchier d'acqua posto su una bilancia da cucina e chiedere "cosa succede" se si immerge un dito nell'acqua. Più precisamente la domanda è come cambia il valore indicato dalla bilancia. Abbiamo imparato in queste ultime pagine che il fluido eserciterà sul dito una spinta verso l'alto. Ne segue quindi, per il principio di azione-reazione che il dito esercita una forza verso il basso uguale e contraria. Abbiamo eseguito l'esperienza in aula, sia con le dita di studenti curiosi, sia con solidi di diversa forma, come mostrato in figura 2.32. In particolare, avevamo un cilindro e un cono di alluminio, affondati lungo l'asse (e anche la quota di affondamento è presa lungo l'asse e non lungo la superficie laterale – particolare importante

z (cm)	m (g)		
	cilindro	prisma	cono
0	288.9	308.1	288.4
1.0	291.5	308.5	288.5
2.0	294.8	310.1	288.9
3.0	297.2	312.8	290.4
4.0	300.8	316.2	292.2
5.0	304.0	320.9	296.2
6.0	307.2	326.3	300.7

Tabella 2.1: Valori letti sulla bilancia in funzione dell'affondamento di diversi solidi regolari.

per il cono, irrilevante per il cilindro) e un prisma di marmo a base triangolare, che abbiamo affondato in modo da mantenere il cateto maggiore ortogonale alla superficie dell'acqua e la quota di affondamento è misurata lungo questo stesso cateto. (Si noti come la densità è irrilevante in questo esperimento in quanto misureremo soltanto l'effetto del volume di acqua spostato.) I dati sperimentali sono riportati in tabella 2.14.3 e sono quindi rappresentati in forma grafica in figura 2.33, che mostra la variazione di lettura sulla bilancia (Δm) in funzione dell'affondamento. I punti sperimentali mostrano diversi andamenti,⁵⁴ che tengono conto di come varia il volume in funzione dell'altezza, ovvero essi dipendono dalle sezioni alle diverse quote:

- nel caso del cilindro la sezione è costante e quindi il volume cresce linearmente con l'altezza:

$$V_{cil} = S h \propto h; \quad (2.193)$$

- nel prisma lo spessore (che indichiamo con a) si mantiene costante, mentre la dimensione trasversale cresce linearmente con l'altezza e quindi il volume cresce quadraticamente con h :

$$V_{prisma} \propto a \times h \times h \propto h^2; \quad (2.194)$$

- infine, nel cono il raggio cresce linearmente con l'altezza, quindi la sezione cresce quadraticamente e il volume va come h^3 :

$$V_{cono} \propto h^2 \times h \propto h^3. \quad (2.195)$$

Aggiungiamo quindi nel grafico della figura delle linee continue che rappresentano i tre andamenti teorici, con i fattori di proporzionalità ricavati dai dati stessi⁵⁵ (senza entrare nei dettagli di come sono stati ricavati). I tre coefficienti, che indicheremo con α , β e γ , valgono (si presti attenzione alle diverse unità!):

$$\alpha = 3.0 \text{ g/cm} \quad (2.196)$$

$$\beta = 0.51 \text{ g/cm}^2 \quad (2.197)$$

$$\gamma = 0.059 \text{ g/cm}^3. \quad (2.198)$$

⁵⁴Il fatto che per 6 cm i punti del cono e del prisma coincidano è assolutamente casuale (è ovvio che una parabola crescente debba incontrare prima o poi una retta, come dovrà anche farlo una cubica; dove le curve si incontreranno dipende dai loro coefficienti, legati nel nostro caso ai parametri geometriche dei vari solidi).

⁵⁵I piccoli discostamenti dei punti sperimentali rispetto alle curve continue dei modelli sono dovuti ad evitabili errori sperimentali, soprattutto quello di tenere l'oggetto con la mano mentre si leggeva 'al meglio' l'affondamento.

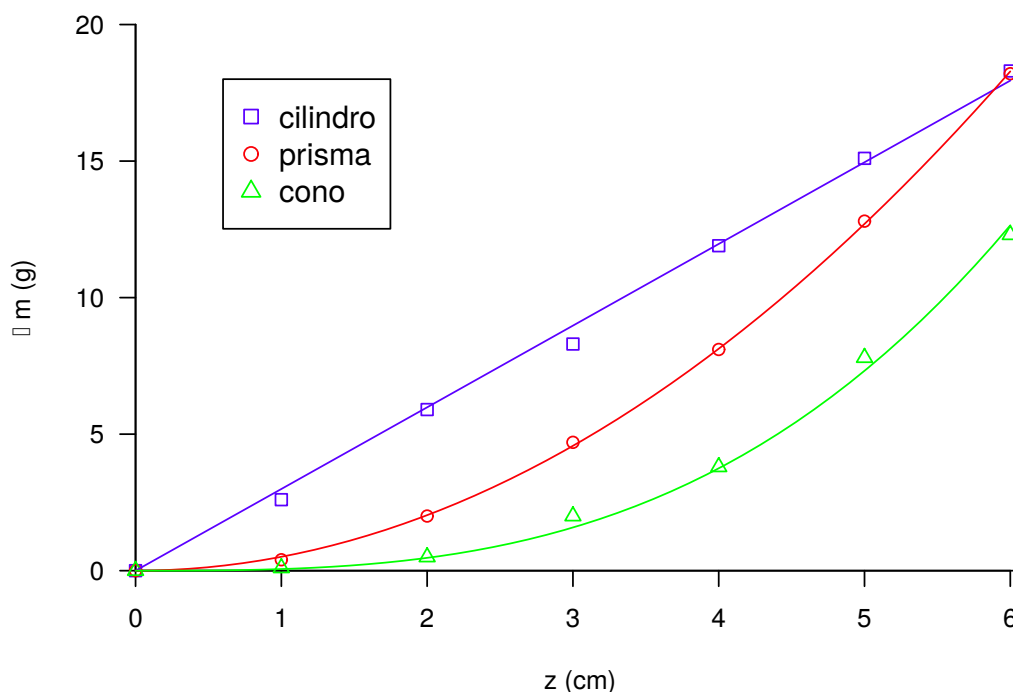


Figura 2.33: Grafico che mostra le variazioni di letture sulla bilancia in funzione dell'affondamento dei tre solidi. I punti rappresentano i dati sperimentali mentre le linee continue rappresentano le funzioni che 'meglio' approssimano i dati (*fissato il modello* – vedi testo).

Convertendo, mediante la densità dell'acqua le masse in volume si ottengono alcuni parametri geometrici dei tre solidi. Ad esempio, α ci fornisce direttamente la sezione del cilindro espressa in cm^2 , mentre γ è legata all'angolo di apertura del cono (conti lasciati come esercizio).

2.14.4 Un altro simpatico quesito

Recipiente galleggiante con zavorra a bordo o affondata.

2.14.5 Pressione all'interno del palloncino

Torniamo infine alla misura della densità dell'aria effettuata sperimentalmente mediante il palloncino ad elio. Avevamo lasciato in sospeso la stima della pressione all'interno del palloncino, dalla quale dipende la densità dell'elio in esso contenuto e quindi la densità dell'aria, in quanto ricordiamo il nostro *principio di misura* è basato sulla differenza fra la densità dell'aria e quella dell'elio (in genere si misura sempre qualcosa rispetto a qualcos'altro!). Alla luce di quanto abbiamo imparato nelle pagine precedenti sappiamo ora cosa fare, anche se per questioni pratiche la misura è stata effettuata nel seguito su un identico palloncino riempito di aria e gonfiato circa nello stesso modo (l'effetto di queste approssimazioni sarà discusso fra poco).

Ci procuriamo un tubo trasparente, lo curviamo a forma di u,⁵⁶ lo riempiamo con dell'acqua e colleghiamo un'estremità del tubo al palloncino, mentre l'altra estremità la lasciamo aperta, come

⁵⁶Il 'famoso' "tubo a u" degli esperimenti di Chimica, pronunciato talvolta velocemente tutto attaccato come 'tubadù', come raccontano colleghi di Bologna che impiegarono non poco per capire di cosa il professore di Chimica cosa intendesse con tale termine (anche perché quando diceva "useremo un tubadù" e altre frasi del genere non



Figura 2.34: Misura della pressione all'interno del palloncino per confronto con la pressione atmosferica.

mostrato in figura 2.34 (i rubinetti in altro e il raccordo dalla parte del palloncino sono irrilevanti per ripetere l'esperimento). Come si vede, l'acqua si innalza a sinistra, in quanto la pressione all'interno del palloncino supera (ovviamente) quella atmosferica e differenza di pressione fra l'aria contenuta nel palloncino e quella dell'ambiente esterno è data dalla legge di Stevino. Essendo la differenza di altezza della colonna d'acqua pari a 9.0 cm, ricavabile ad esempio direttamente dalla figura sapendo che le mattonelle hanno lati di 15 cm e che approssimiamo⁵⁷ a *circa* 9 cm, ci ricaviamo quindi

$$\Delta P = \rho g h = 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ N/kg} \times 0.09 \text{ m} \approx 9 \times 10^2 \text{ Pa} = 9 \text{ mbar}. \quad (2.199)$$

Ne segue che la pressione all'interno del palloncino è di circa lo 0.9% superiore a quella atmosferica e quindi anche la densità dell'elio è maggiore della stessa percentuale rispetto a quella valutata

mostrava nessuna figura).

⁵⁷Qualcuno si potrebbe chiedere che senso abbia "approssimare 9.0 cm a 9 cm", essendo i due numeri *matematicamente uguali*. In realtà nelle *scienze sperimentali* 9.0 cm è ben diverso da 9 cm o da 9.00 cm! Se qualcuno insiste a precisare che si tratta di 9.00 cm vuol dire che dà una *importanza agli zeri dopo la virgola*, irrilevanti invece nel fare i conti. Certo non scommetterà ciecamente qualsiasi somma di denaro sul fatto che il valore numerico valga proprio 9.00, invece di 9.01, 8.99, o anche 9.02 o 8.98. Ma riportare 9.0 cm vuol dire che l'eventuale incertezza sta già sulla *seconda cifra* (seconda cifra contando da sinistra e non 'seconda cifra decimale'!). Se poi si approssima a 9 cm, significa che non ci stupiremmo molto, o comunque non ha molta rilevanza sul risultato finale, se si trattasse di 8 o 10 centimetri, o a che di 7 o 11. Nelle scienze sperimentali si parla quindi di risultati una (il caso di 9 cm), due (il caso di 9.0 cm) a tre (il caso di 9.00 cm) **cifre significative**. (Il caso in cui di 9 cm è particolarmente istruttivo in quanto, come si capisce bene, non c'è una differenza sostanziale fra 10 cm, in cui le cifre significative sono 'apparentemente' due e 9 cm in cui è una sola. Questo è soltanto per dire che su queste questioni ci vuole un po' di buonsenso, generalmente dettato dall'esperienza.)

nel paragrafo 1.13.3, ovvero otteniamo 0.164 g/L (invece di 0.163 g/L), che non cambia il valore di 1.173 g/L che avevamo ottenuto e che avevamo comunque approssimato 1.17 g/L.

Tornando alle approssimazioni fatte per valutare questa correzione capiamo finalmente come mai non abbiamo insistito molto a fare le misure nel modo più accurato possibile, in quanto ogni eventuale ragionevole incertezza si propaga in una piccola correzione nel risultato finale. In particolare, ricordiamo che:

- la misura di pressione non è stata effettuata sul palloncino ad elio, ma su un analogo palloncino ad aria;
- per questioni organizzative questa misura è stata effettuata in aula in una lezione successiva a quella in cui abbiamo effettuato le misure di peso (e nel frattempo il palloncino ad elio si era inevitabilmente sgonfiato in quanto la plastica del palloncino è impermeabile all'elio molto meno di quanto non lo sia all'aria);
- quando si connette il palloncino al tubo quasi 'inevitabilmente' (con la strumentazione volutamente 'povera' usata) si perde un po' di aria, ed inoltre nel tubo c'è inizialmente dell'aria a pressione atmosferica che si miscela a quella del palloncino.

Comunque, anche se il valore di sovrappressione all'interno del palloncino ad elio nel lasso di tempo durante il quale sono state effettuate le misure di peso fosse stato di qualche mbar diverso dai 9 mbar stimati, l'effetto sulla densità dell'aria sarebbe stato più che trascurabile.⁵⁸

2.14.6 Densimetri a galleggiamento

Torniamo infine alle misure di densità, con le quali avevamo esordito nel primo capitolo. Avevamo accennato al fatto che per determinare la densità di un liquido lo si poteva inserire in un contenitore e quindi ricavarsi la densità nel solito modo, da misure di massa e di volume. In realtà un modo usato in pratica è di usare la spinta di Archimede e determinare la densità del liquido dall'affondamento di oggetti. La cosa più interessante è che siccome la densità del liquido dipende da alcune caratteristiche, come ad esempio la concentrazione di sale o zucchero, dalla percentuale di alcool e dalla temperatura, si possono costruire strumenti opportunamente tarati per determinare la grandezza di interesse, alcuni di questi sono mostrati in figura 2.35. Il primo a sinistra serve a misurare la percentuale di zucchero nel liquido e quindi si usa nella produzione della birra (la foto si riferisce a un densimetro fabbricato per il controllo durante la fase di preparazione di questa bevanda) o del vino, in quanto è importante conoscere il grado zuccherino dei 'mosti' (in senso lato) prima di dare inizio al processo di fermentazione (o addirittura alla raccolta, come si fa nel caso dell'uva, ove si premono degli acini di prova dei quali si misura il grado zuccherino mediante opportuni mostimetri, dei quali il più usato è proprio ad immersione). La foto mostra lo strumento immerso in acqua e che quindi galleggia al livello 1.000 (g/L). La scala cresce verso il basso (ad esempio '70' va letto '1.070') in quanto all'aumentare della densità del liquido il 'galleggiante' sale.

Al centro è mostrato un analogo strumento per la misura del grado alcolico di distillati. La scala comincia a 70 (gradi alcolici in volume) e cresce verso l'alto in quanto all'aumentare del grado alcolico il galleggiante affonda (l'alcool ha una densità di circa 0.80 g/L). La scala in basso

⁵⁸Dal punto di vista didattico è molto più importante imparare a 'barcamenarsi' in queste condizioni di incertezza, usando materiale economico che fare misure 'perfette' con materia ad hoc, difficilmente reperibile e che comunque non fa capire come operano sul campo i ricercatori, i quali usano spesso gli strumenti al limite delle loro possibilità e quindi devono pensare a tutti gli *errori sistematici* dai quali i valori misurati sono affetti e che quindi si ripercuotono inevitabilmente in *incertezze di misura*.

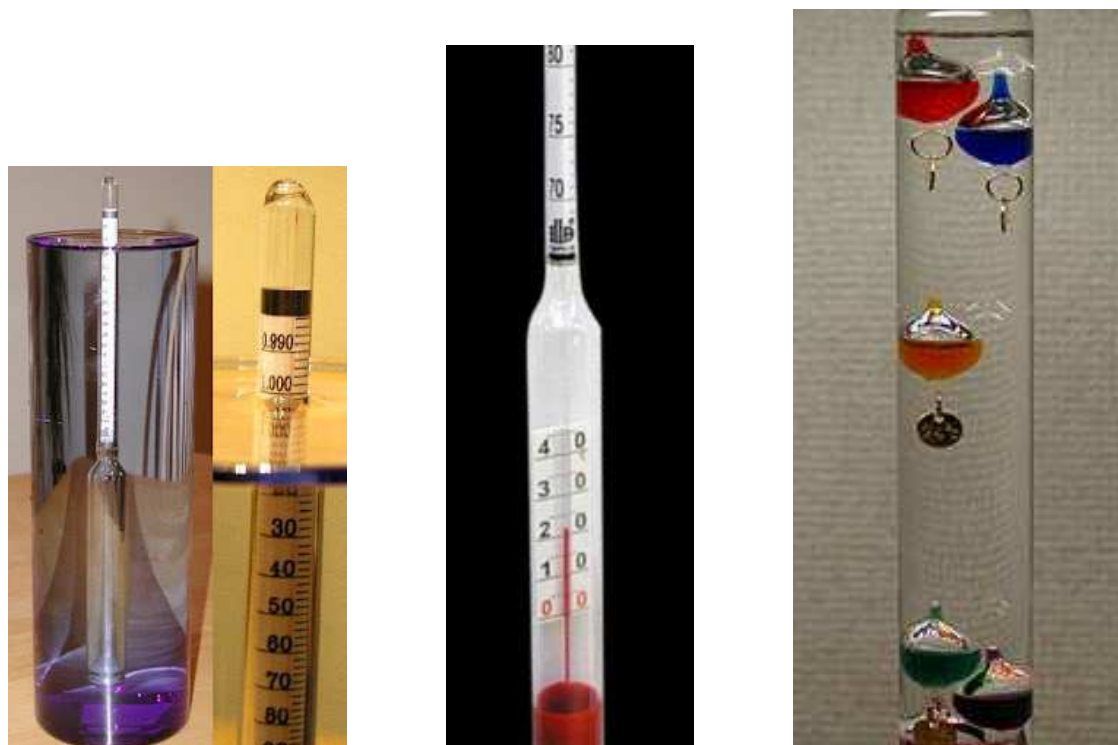


Figura 2.35: Densimetro

è quella del termometro incorporato, in quanto la conversione da densità a grado alcolico dipende dalla temperatura stessa (gli strumenti sono forniti di opportune tabelle).

Infine, a destra è mostrato un esemplare decorativo del cosiddetto termometro galileiano (vedi ad esempio http://it.wikipedia.org/wiki/Termometro_galileiano), nome dedicato a Galileo che per primo si occupò, fra le molte altre cose, della dipendenza della densità dell'acqua in funzione della temperatura (vedi lo stato dell'arte nella figura 2.36). Le diverse bolle di vetro hanno ciascuna una diversa densità per cui, in genere, ad una data temperatura ce ne sarà una che è in equilibrio nell'acqua (in questo caso quella che indica 24 gradi) mentre le rimanenti o sono sul fondo o verso la superficie. Quando la temperatura aumenta oltre la *portata* dello strumento (ovvero l'intervallo di valori ai quali è sensibile) tutte le bolle affondano, come si vede d'estate nei negozi che espongono questi simpatici oggetti ornamentali.

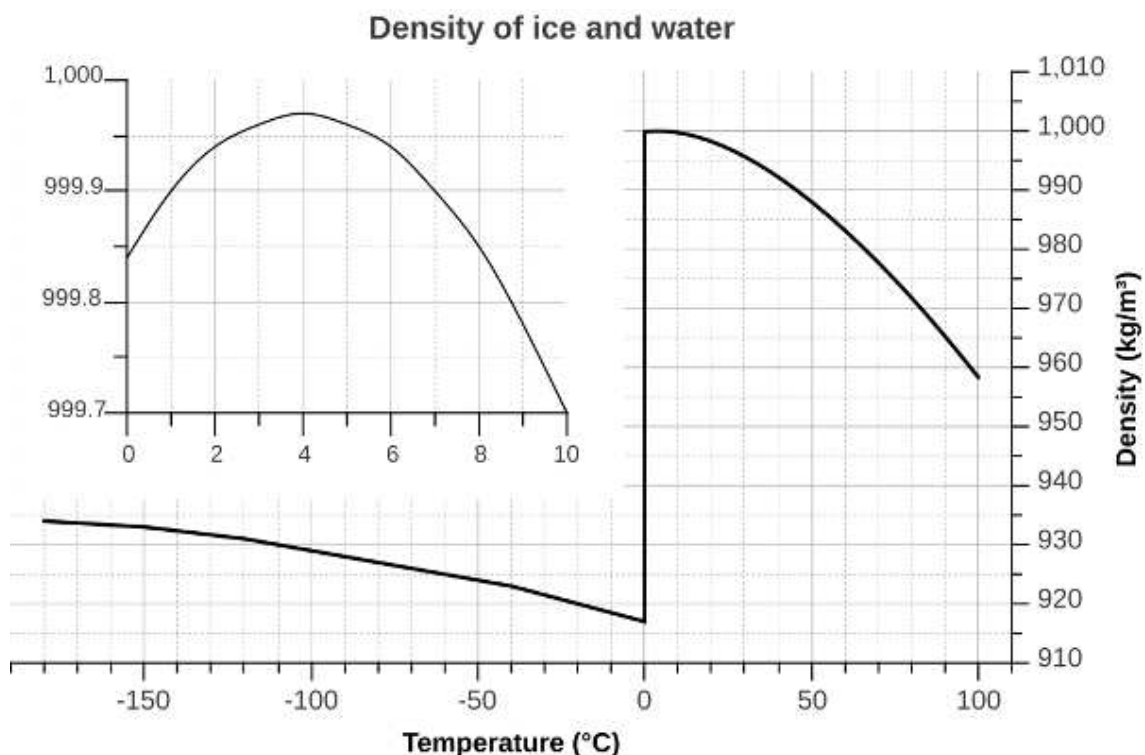


Figura 2.36: Densità di acqua e ghiaccio in funzione della temperatura (http://en.wikipedia.org/wiki/Properties_of_water). Il grafico piccolo mostra, con grande risoluzione, la densità dell'acqua fra 0 e 10 gradi nel quale si vede il famoso massimo a 4 gradi, di grande importanza per i sistemi biologici. Il grafico più grande mostra la densità dell'acqua, nello stato solido e liquido, che sostanzialmente (ovvero a parte l'aumento fra 0 e 4 gradi) mostra in entrambi gli stati una diminuzione, in funzione della temperatura, riconducibile semplicemente alla dilatazione termica.

2.15 Dall'*error vacui* alla 'rivoluzione torricelliana'

Oggi giorno siamo talmente abituati a parlare di atmosfera e di pressione atmosferica e di vuoto che facciamo difficoltà a capire come che queste idee non siano state facili né da intuire né da accettare. Ad esempio abbiamo dato per scontato, fin dal primo capitolo, che la pressione atmosferica sia dovuta alla grande massa di aria che ci sovrasta (10^5 Pa corrispondono, ricordiamo, a 10 tonnellate per metro quadrato!) dimenticando di chiederci come si sia arrivati a convincerci di ciò e come sia stato possibile misurare in modo *assoluto* tale valore di pressione. Infatti, come abbiamo appena visto per l'esperimento con il palloncino, noi siamo abituati ad effettuare *misure relative* di pressione, ovvero rispetto alla pressione atmosferica, anche se nel linguaggio comune non ce ne accorgiamo (quando gonfi le ruote dell'auto a 2.2 atmosfere, all'interno del pneumatico la pressione è di 3.2 atmosfere, in quanto il manometro misura la differenza rispetto alla pressione atmosferica).



Figura 2.37: “It’s the air pressure that pushes the Coke up the straw, dummy!” (Sheldon Glashow, fisico teorico vivente, premio Nobel — frase rivoltagli dal professore di liceo nel tentativo di spiegargli la portata della scoperta di Torricelli)

2.15.1 Perché non si riesce ad aspirare l’acqua oltre le ‘18 braccia’??

Siamo anche abituati a far salire liquidi mediante aspirazione, come quando si usa una pompa per travasare liquidi, o semplicemente per bere una bevanda con la cannuccia, che come succede per altre questioni di fisica di base, tendiamo a pensare esattamente come si pensava prima della rivoluzione scientifica avvenuta dai tempi di Galileo: il liquido tende ad occupare il vuoto perché lo aborrisce (*orror vacui*).⁵⁹ E anche quando l’esperienza dimostra che c’è un limite oltre il quale, per dirla scherzosamente, il liquido rinuncia ad andare occupare il vuoto, l’orror vacui era talmente radicato nella mente dei pensatori che si cercavano delle spiegazioni che oggi riteniamo di pura fantasia. Ecco ad esempio come si esprime in proposito Galilei, per bocca di Sagredo, nei “Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze”⁶⁰

Sagredo: Ed io mercé di questi discorsi ritrovo la causa di un effetto che lungo tempo m’ha tenuto la mente ingombra di meraviglia e vota d’intelligenza. Osservai già una cisterna, nella quale, per trarne l’acqua, fu fatta fare una tromba, da chi forse credeva, ma vanamente, di poterne cavar con minor fatica l’istessa o maggior quantità che con le secchie ordinarie; ed ha questa tromba il suo stantuffo e animella su alta, sì che l’acqua si fa salire per attrazione, e non per impulso, come fanno le trombe che hanno l’ordigno da basso. Questa, sin che nella cisterna vi è acqua sino ad una determinata altezza, la tira abbondantemente; ma quando l’acqua abbassa oltre a un determinato segno, la tromba non lavora più. Io credetti, la prima volta che osservai tale accidente, che l’ordigno fusse guasto; e trovato il maestro acciò lo raccomandasse, mi disse che non vi era altrimenti difetto alcuno, fuor che nell’acqua, la quale, essendosi abbassata troppo, non pativa d’esser alzata a tanta altezza; e mi soggiunse, né con trombe, né

⁵⁹Vedi ad esempio <http://www.imss.fi.it/vuoto/>

⁶⁰http://www.liberliber.it/mediateca/libri/g/galilei/discorsi_e_dimostrazioni/pdf/discor_p.pdf

Tromba è pompa; *cisterna*: *impulso* spinta (contrapposta ad aspirazione); *ordigno* ‘motore’; *maestro* ‘mastro’, ‘tecnico’; *diciotto braccia* ≈ 10.3 m (come sappiamo deve essere); *negozio* faccenda;

con altra machina che sollevi l'acqua per attrazione, esser possibile farla montare un capello più di diciotto braccia: e siano le trombe larghe o strette, questa è la misura dell'altezza limitatissima. Ed io sin ora sono stato così poco accorto, che, intendendo che una corda, una mazza di legno e una verga di ferro, si può tanto e tanto allungare che finalmente il suo proprio peso la strappi, tenendola attaccata in alto, non mi è sovvenuto che l'istesso, molto più agevolmente, accaderà di una corda o verga di acqua. E che altro è quello che si attrae nella tromba, che un cilindro di acqua, il quale, avendo la sua attaccatura di sopra, allungato più e più, finalmente arriva a quel termine oltre al quale, tirato dal suo già fatto soverchio peso, non altrimenti che se fusse una corda, si strappa?

Salviati: Così puntualmente cammina il negozio; e perché la medesima altezza delle diciotto braccia è il prefisso termine dell'altezza alla quale qualsivoglia quantità d'acqua, siano cioè le trombe larghissime o strette o strettissime quanto un fil di paglia, può sostentarsi, tutta volta che noi peseremo l'acqua contenuta in diciotto braccia di cannone, sia largo o stretto, aremo il valore della resistenza del vacuo ne i cilindri di qualsivoglia materia solida, grossi quanto sono i concavi de i cannoni proposti.

Come si vede, Galileo non riesce a dirimere la questione e si limita ad ipotizzare che la colonna d'acqua non riesca ad arrivare a riempire il vuoto perché si 'strappa' per effetto del suo stesso peso. In effetti l'idea di Torricelli che spiegava fu rivoluzionaria quanto quella copernicana di far ruotare la Terra intorno al Sole: *non è il vuoto che attira l'acqua, bensì la pressione dell'aria che la spinge!*

2.15.2 Esperimento di Gasparo Berti

Purtroppo Galileo (1564-1642) non visse abbastanza a lungo per conoscere la soluzione di questo *negozio* intrigante. Un esperimento interessante fu condotto a Roma fra il 1640 e il 1643 sul limite delle 18 braccia sul livello massimo raggiunto da una colonna d'acqua e somiglia a quello ben noto di Torricelli, che ricorderemo fra poco, ma eseguito con l'acqua. Un tubo di acqua attaccato ad una parete terminava in basso in un grande recipiente, mentre in alto era chiuso da una specie di grossa fiasca di vetro e connesso ad un altro tubo mediante il quale era possibile riempire d'acqua l'intero volume (figura 2.38). Il grosso recipiente di vetro serviva ad osservare il livello dell'acqua (all'epoca i tubi erano normalmente di piombo) e la sua sommità era di oltre 12 metri più elevata del livello massimo raggiunto dall'acqua nell'anfora di raccolta posta in basso. Chiudendo il rubinetto del tubo di riempimento (quello che in figura va dalla base del globo verso la finestra del secondo piano) e aprendo quello in basso si notava che l'acqua cominciava a defluire, ma poi si fermava, proprio in corrispondenza del valore già noto a Galileo (nella figura si vede che l'acqua arriva circa a metà della grande ampolla in alto). Si noti come, contrariamente agli esperimenti fatti con le pompe, non era che l'acqua non riuscisse a salire, ma semplicemente scendeva per raggiungere il punto di equilibrio. Quando poi si apriva il rubinetto superiore l'acqua scendeva. E oggi giorno capiamo facilmente il perché.

2.15.3 Peso dell'aria e 'creazione' del vuoto

Il contributo di Torricelli, che effettuò il suo esperimento più celebre nel 1644, non fu soltanto quello di sperimentare con il mercurio, 13.5 volte più denso dell'acqua, con conseguente riduzione dell'altezza limite e quindi dell'ingombro dell'apparato sperimentale, che permetteva di rovesciare facilmente i tubi o di usarne contemporaneamente di tipo e forma diversa. Soprattutto il merito di Torricelli fu quello di aver interpretato correttamente il fenomeno:

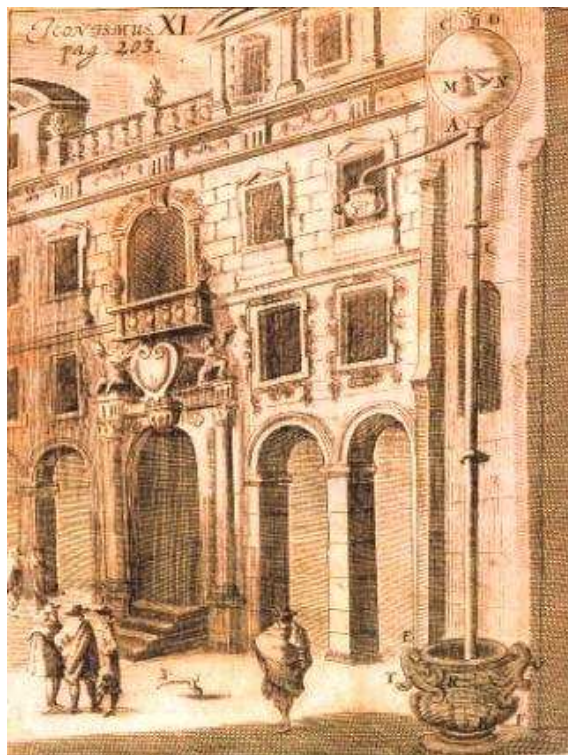


Figura 2.38: Esperimento di Berti, il quale mostra come l'acqua, che inizialmente occupava l'intera sfera di vetro in alto, una volta aperto il rubinetto inferiore scende fino a fermarsi circa a metà della sfera stessa (immagine da <http://bagliorinelvuoto.scienze.unipd.it/schede/scheda1.pdf>).

- il liquido è in equilibrio in quanto nel punto più basso la pressione è pari a quella atmosferica, mentre all'interno della colonnina, sopra il mercurio non c'era *niente*;⁶¹
- l'altezza della colonna non dipende da forma e sezione della colonna, mentre ha variazioni 'metereologiche' e in condizioni normali essa ha il ben noto valore di 760 mm, con la quale ancora si trova a volte indicata la pressione atmosferica.⁶²
- tale valore di pressione permetteva quindi di 'pesare' l'aria (si noti come il 'bar' di 'barometro' indichi 'peso', dal greco $\beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\varsigma$, come in 'baricentro' o 'barione').

Nel seguito furono ripetuti in Europa altri esperimenti (famosi quelli di Pascal del 'vuoto nel vuoto' e della dipendenza della pressione dall'altezza sul livello del mare, sui quali non possiamo entrare in dettaglio – su internet c'è molto materiale sull'argomento cercando con le opportune parole-chiave) per convincersi che le intuizioni di Torricelli fossero corrette (quella che sopra il mercurio non ci fosse niente era forse quella più difficile da digerire!).

⁶¹In realtà, oggi sappiamo che c'è inevitabilmente una pressione di vapore, di cui abbiamo parlato a suo tempo e che dipende dal liquido e dalla temperatura. Essa è comunque molto inferiore nel caso del mercurio che in quella dell'acqua.

⁶²Ricordiamo che il Torr, pari alla pressione di una colonnina di 1 mm di mercurio (ovvero 1 mmHg, che pur non essendo unità del SI si trova ancora usata, ad esempio negli sfigmometri dei medici), è oggi definita come *esattamente* 1/760 di pressione atmosferica 'normale' (standard), ovvero 101325/760 Pa (circa 1.33 mbar).

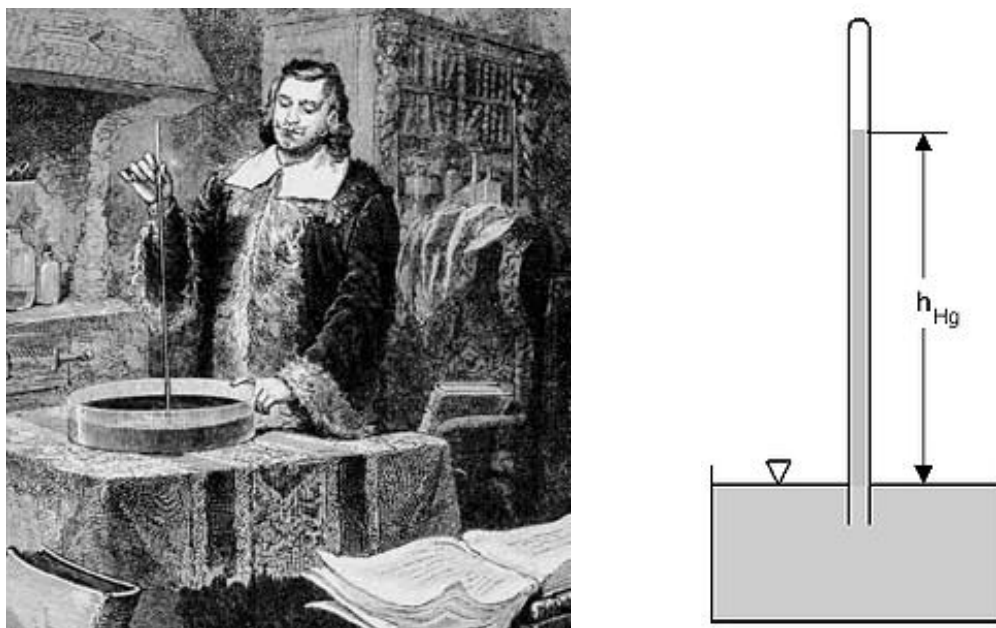


Figura 2.39: Evangelista Torricelli alle prese con il suo barometro a mercurio (schema a destra, preso da http://it.wikipedia.org/wiki/Tubo_di_Torricelli).

2.15.4 Macchine per il vuoto ed *emisferi di Magdeburgo*

La storia degli esperimenti sulla pressione e lo sviluppo delle tecniche di produzione del vuoto ci porterebbe troppo lontano. Terminiamo questo breve excursus storico ricordando soltanto della famosa dimostrazione degli *emisferi di Madgeburgo* eseguita un secolo dopo gli esperimenti di Torricelli, quando oramai la questione era ben accettata dagli scienziati. Infatti Otto von Guericke, borgomastro di Madgeburgo e che aveva inventato una macchina per fare il vuoto in modo abbastanza efficiente, nel 1656 mise semplicemente a contatto due emisferi di 50 cm di diametro, fece il vuoto al loro interno e legò ciascun emisfero a due coppie di due quadrighe. Ma la forza dei 16 cavalli non riuscì a staccare gli emisferi, spinti uno verso l'altro dalla forza di pressione dell'aria. (Si verifichi come esercizio che la forza su ciascun emisfero è pari alla forza peso che agisce su un oggetto di due tonnellate – il fatto che si tratti di due semisfere è irrilevante in quanto è facile dimostrare che la forza è la stessa che si avrebbe fra due 'piatti' di pari diametro se fra di essi si facesse il vuoto).

2.16 Riepilogo delle varie forze incontrate

mettere qui l'esperimento del piano inclinato con la determinazione del coefficiente di attrito statico



Figura 2.40: Famosa dimostrazione degli ‘emisferi di Madgeburgo’ (per ulteriori dettagli vedi omonima voce su Wikipedia).