9.5

Per capire meglio il significato di queste combinazioni "$m_i\, v_i$" che compaiono in queste formule, ripartiamo da "$\vec{F} = m\,\vec{a}$", usando il generico simbolo m per la massa (immaginiamo del proiettile, ma è irrilevante):

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} && (132)\\ &= \frac{\mathrm{d}(m\,\vec{v})}{\mathrm{d}t} && (133)\\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} && (134) \end{aligned}$$

avendo chiamato indicato $\vec{p} = m\,\vec{v}$ la **quantità di moto** dell'oggetto di massa m. Questo è un altro modo (quello orininario di Newton!) di introdurre il secondo principio della meccanica.
Se $\vec{F}$ è costante segue

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p} &= \vec{F}\,\Delta t && (135)\\ \vec{p}(t_2) &= \vec{p}(t_1) + \vec{F}\times(t_2 - t_1) \quad (F \text{ costante})\,. && (136) \end{aligned}$$

La quantità "$\vec{F}\,\Delta t$", per $\vec{F}$ costante in Δt, è chiamata **impulso della forza**: $\rightarrow$ causa una variazione di quantità di moto.
Ne segue, per la velocità

$$\begin{aligned} \Delta\vec{v} &= \frac{1}{m}\vec{F}\,\Delta t && (137)\\ \vec{v}(t_2) &= \vec{v}(t_1) + \frac{1}{m}\vec{F}\times(t_2 - t_1) \quad (F \text{ costante})\,. && (138) \end{aligned}$$

Abbiamo trovato un modo semplice per ricavarsi la quantità di moto (e quindi la velocità del proiettile).

Se invece la forza non è costante, è sufficiente sommare, in analogia a quanto visto per le variazioni di posizione e di velocità, gli impulsi in piccoli intervalli di tempo.

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p}\,\big|_{t_1}^{t_2} &= \sum_i \Delta\vec{p}_i = \sum_i \vec{F}_i\,\Delta t_i && (139)\\ &\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t\,. && (140) \end{aligned}$$

Questa espressione definisce l'impulso di una forza anche per forze variabili con il tempo. Quindi, in generale:

$$\Delta \vec{p}\,\big|_{t_1}^{t_2} \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{141}$$

(variazione quantità di moto $\leftrightarrow$ impulso della forza).

9.6

Vediamo ora più in generale la variazione di quantità di moto di due corpi interagenti.
Principio di azione e reazione (terzo principio della meccanica): forze uguali e contrarie:

$$\vec{F}_A^{(B)} \;=\; -\vec{F}_B^{(A)}\,, \tag{142}$$

ove $\vec{F}_A^{(B)}$ sta per "forza su A dovuta a B", e analogo per $\vec{F}_B^{(A)}$. Analizziamo le variazioni di quantità di moto di A e B:

$$\Delta \vec{p}_A^{(B)}\Big|_{t_1}^{t_2} \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,_A^{(B)}(t)\mathrm{d}t \tag{143}$$

$$\;=\; -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,_B^{(A)}(t)\mathrm{d}t \tag{144}$$

$$\;=\; -\,\Delta \vec{p}_B^{(A)}\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{145}$$

ovvero

$$\Delta \vec{p}_A^{(B)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \Delta \vec{p}_B^{(A)}\Big|_{t_1}^{t_2} = 0\,. \tag{146}$$

In una interazione fra due corpi la quantità di moto viene scambiata da un corpo all'altro. Se il sistema fisico è formato soltanto da due corpi (ovvero essi non hanno, almeno approssimativamente, interazioni con il resto del mondo), la loro *quantità di moto totale si conserva*.
Si noti come l'espressione di sopra sia in effetti vettoriale: la conservazione si applica alle tre componenti: se le interazioni con 'il resto del mondo' avviene soltanto in una o due delle componenti, la conservazione vale nelle rimanenti. Si noti inoltre come, per arrivare all'espressione di conservazione si è assunto che il principio di azione e reazione valga istante per istante.

Quantità di moto del cannoncino:

- posto su piano senza attrito, e coordinata x orizzontale, positiva nella direzione di moto del proiettile:
  - lungo x i due oggetti sono soggetti soltanto alla loro forza reciproca: $\rightarrow$ sistema isolato $\rightarrow$ p_x si conserva (chiamiamolo semplicemente p). Essendo proiettile e cannone inizialmente fermi

$$p_1 + p_2 = 0 \tag{147}$$

$$p_2 = -p_1 \tag{148}$$

$$M\,v_2 = -m\,v_1 \tag{149}$$

$$v_2 = -\frac{m}{M}\,v_1 \tag{150}$$

  - lungo la componente verticale la risultante delle forze è nulla: il moto di proiettile e cannoncino si mantiene sull'asse x.

- ancorato saldamente al terreno: in pratica il cannoncino è solidale con il terreno e quindi, con buona approssimazione, con la Terra (a meno che l'esplosione sia talmente potente da sollevare la piattaforma sulla quale il connoncino era ancorato. . .): in pratica si considera che cannoncino e Terra formino un solo corpo di massa 'infinita' rispetto al proiettile: $m/M \rightarrow 0$: il cannoncino non si sposta (ma il sistema cannoncino-Terra acquista la quantità di moto $-m\,v_1$: un oggetto di massa 'infinita' può variare la sua quantità di moto senza (apprezzabilmente) variare la sua velocità.
  Esempio di persona che saltella: la Terra varia continuamente la propria quantità di moto senza subire spostamenti.

Conservazione della quantità di moto: caso generale.
Se abbiamo un sistema isolato di oggetti, ovvero tali che essi interagiscono solo con gli altri oggetti di tale sistema, ma non con il resto del mondo, per ogni intervallo di tempo dt possiamo estendere la (146) a tutte le coppie ij, ovvero

$$\mathrm{d}\vec{p}_i^{\,(j)} + \mathrm{d}\vec{p}_j^{\,(i)} = 0\,. \tag{151}$$

Ne risulta che, istante per istante, è nulla la variazione della quantità di moto totale del sistema $\mathrm{d}\vec{p} = \sum_{i,j} \mathrm{d}\vec{p}_i^{\,(j)}$.

Sistema isolato:

$$\rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{p} = 0 \tag{152}$$

$$\rightarrow \quad \vec{p}(t) = \mathit{costante}. \tag{153}$$

$$\tag{154}$$

Altri esempi: persona inizialmente ferma su laghetto ghiacciato che riesce a muoversi lanciando un oggetto; razzo nel vuoto che accelera 'spruzzando' del gas (o altro) ad alta velocità; Terra che 'assorbe' le variazioni di quantità di moto di quanti saltellano sulla terra.

9.7

Centro di massa del sistema (media pesata delle posizioni):

$$x_{CM}(t) = \frac{\sum_i m_i x_i(t)}{\sum_i m_i} \tag{155}$$

$$v_{x_{CM}}(t) = \frac{\mathrm{d}x_{CM}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{156}$$

$$= \frac{\sum_i m_i \,\mathrm{d}x_i(t)/\mathrm{d}t}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i v_{x_i}(t)}{\sum_i m_i} = \frac{p_{x_{tot}}(t)}{M_{tot}} \tag{157}$$

idem per y e z

$$\vec{v}_{CM}(t) = \frac{\vec{p}_{tot}(t)}{M_{tot}}\,. \tag{158}$$

Sistema isolato: $\vec{p}_{tot}$ costante: $\rightarrow \vec{v}_{CM}$ costante.

Esempi: urto auto ($m_1 = 1000\,\mathrm{kg}$) e camion ($m_1 = 10000\,\mathrm{kg}$), trascurando attriti ed assumendo rimangano attaccati: casi $v_1 = 50\,\mathrm{km/h}$ e $v_2 = 0$ e velocità scambiate: $\rightarrow \Delta v$ per i due mezzi nei due casi (ma nota: le forze che subiscono le persone dipendono da accelerazioni, $\Delta v/\Delta t$: importanza di 'attutire' l'urto, ovvero aumentare Δt).

9.8

Sistema di punti materiali interagenti e soggetti a forze reciproche (**interne**) ed **esterne**:

$$\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_i^{(j)} + \vec{F}_i^{(ext)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_i\,. \tag{159}$$

Sommando su tutti i punti materiali otteniamo

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i \tag{160}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sum_i \vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j} \vec{F}_i^{(j)} + \sum_i \vec{F}_i^{(ext)}\,, \tag{161}$$

ma, per il principio di azione-reazione, le forze interne si annullano a coppie nella sommatoria in quanto $F_i^{(j)} = -F_j^{(i)}$. La variazione nel tempo della quantità di moto totale del sistema è dovuta soltanto alle forze esterne:

$$\begin{aligned}
\sum_i \vec{F}_i^{(ext)} &= \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} && (162)\\
\vec{F}^{(ext)} &= \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} && (163)\\
&= M\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{CM}}{\mathrm{d}t} && (164)\\
&= M\,\vec{a}_{CM}\,, && (165)
\end{aligned}$$

ove $\vec{F}^{(ext)}$ è la *risultante* delle forze esterne e M è la somma delle masse del sistema. È come se il CM si comportasse come un punto materiale di massa M (seconda legge della meccanica generalizzata ad un sistema di punti materiali).

Nel caso in cui le particelle formino un sistema isolato, ovvero $\sum_i \vec{F}_i^{(ext)} = 0$, la quantità di moto totale si conserva $\vec{P} = k$, ovvero $\sum_i \vec{p}_i = k$.

9.9

Definizione del **lavoro** in caso *unidimensionale* e per forza costante: $L = F\,\Delta s$ ("forza per spostamento"). Lavoro nel caso di forza che dipende dalla posizione: $L = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n F_i \Delta_{x_i}$ e limite ($n \to \infty$; $\Delta_{x_i} \to 0$):

$$L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (166)$$

Definizione dell'energia cinetica e connessione al lavoro mediante il cosiddetto teorema dell'energia cinetica (o delle 'forze vive'), consequenza di "$F = m\,a$":

$$\begin{aligned}
L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x && (167)\\
&= \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\,\mathrm{d}t && (168)\\
&= \int_{x_1}^{x_2} m\,v\,\mathrm{d}v && (169)\\
&= \frac{1}{2}\,m\,v^2\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}\,m\,v^2(x_2) - \frac{1}{2}\,m\,v^2(x_1) && (170)\\
&= E_c(x_2) - E_c(x_1)\,, && (171)
\end{aligned}$$

avendo definito $E_c = 1/2\, mv^2$ come **energia cinetica**:

$$\rightarrow \quad L|_{x_1}^{x_2} \;=\; \Delta E_c|_{x_1}^{x_2} \,. \tag{172}$$

Unità di misura del lavoro e dell'energia: Joule = Newton×m, simbolo J. Ne segue: $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$.

Lavoro in 3D: somma dei lavori delle componenti:

$$\mathrm{d}L \;=\; \mathrm{d}L^{(x)} + \mathrm{d}L^{(y)} + \mathrm{d}L^{(y)} = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z\,. \tag{173}$$

Quindi in generale,

$$L|_1^2 \;=\; \int_1^2 [F(x)\,\mathrm{d}x + F(y)\,\mathrm{d}y + F(z)\,\mathrm{d}z] \tag{174}$$

$$\;=\; \int_1^2 \vec{F}(x)\cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{175}$$

avendo riscritto, nell'ultima equazione la somma dei tre contributi al lavoro come un 'prodotto scalare' (segue alla prossima lezione).
Comunque, applicando alle altre due componenti quanto visto per x, e ricordandoci che $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$, otteniamo che, in generale,

$$L|_1^2 \;=\; \Delta\left(\frac{1}{2}\, m\, v^2\right) \tag{176}$$

$$\;=\; \Delta E_c|_1^2 \,. \tag{177}$$

9.10 Problemi

1. Una forza varia nel tempo secondo la seguente espressione: $F(t) = \alpha + \beta/(1+t)$, con $\alpha = 2\,\mathrm{N}$ e $\beta = 3\,\mathrm{N\,s}$. Sapendo che essa agisce per un secondo (dall'istante $t = 0$) su un corpo di massa 10 g inizialmente a riposo, calcolare la velocità finale del corpo.

2. Un oggetto di 100 g, che viaggia inizialmente ad una velocità di 10 m/s è soggetto per 5 secondi ad una forza costante lungo la direzione del moto. Dopo i 5 secondi il corpo ha una velocità di -0.2 m/s. Calcolare il valore della forza.

3. Un cannoncino spara un proiettile di 20 g a 600 km/h e rincula a 10 m/s. Calcolare la massa del cannoncino.

4. Trovare il centro di massa di tre particelle poste lungo l'asse x: $x_1 = -1\,\mathrm{cm}$, $m_1 = 100\,\mathrm{g}$; $x_2 = 3\,\mathrm{cm}$, $m_2 = 50\,\mathrm{g}$; $x_3 = 10\,\mathrm{cm}$, $m_3 = 10\,\mathrm{g}$.

5. Un'auto di 1000 kg viaggia a 80 km/h verso un furgone, di 8 tonnellate, fermo in un tratto di strada ghiacciata (ovvero ignoriamo gli attriti). Calcolare la velocità del centro di massa auto-furgone.
   L'auto non frena e urta il furgone. Dopo l'urto auto e forgone rimangono attaccati e scivolano sul ghiaccio senza attrito. Calcolare la variazione di velocità (prima/dopo l'urto) dell'auto e del furgone.

6. Risolvere il problema precedente nel caso di furgone a 80 km/h e auto ferma.

7. Una forza costante di $100\,N$ agisce per 2 metri, con verso concorde allo spostamento, su una particella di 100 g. Calcolare la variazione di velocità della particella.

8. Sia data la seguente forza, il cui valore dipende dalla posizione, nel seguente modo: $\vec{F}(\vec{s}) = \{-1\,\mathrm{N},\ y\mathrm{N/m},\ 1/z\mathrm{N\,m}\}$. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza su un corpo che si sposta dalla posizione $\vec{s}_1 = \{0\,\mathrm{m},\ 1\mathrm{m},\ 10\mathrm{m}\}$ a $\vec{s}_2 = \{-3\,\mathrm{m},\ 2\mathrm{m},\ 100\mathrm{m}\}$.
   Calcolare inoltre la variazione del valore assoluto della velocità del corpo, sapendo che esso ha una massa di 0.5 kg.

9. Una particella di 2 kg ha una energia cinetica di 100 Joule. Sapendo che le componenti della velocità nel piano xy valgono $v_x = 5\,\mathrm{m/s}$ e $v_y = -2\,\mathrm{m/s}$, trovare il modulo della componente della velocità lungo z.

10 Venerdi 30/3, 16:00–18:00

10.1

Ancora su principio di azione-reazione e conservazione della quantità di moto. Importanza pratica nei problemi di spinta/trazione: quando camminiamo spingiamo la Terra e siamo spinti in avanti; aerei ad elica e a jet. Possibilità di cambiare stato di moto in condizioni di mancanza di attrito: caso classico di persona su ghiaccio.