Si noti inoltre come la somma del lavoro per andare da 0 a x e di quello per andare da x a 0 sia nulla: $L|_0^x + L|_x^0 = 0$.

Esempio 2: lavoro della forza di gravità in prossimità della superficie terrestre, ovvero '$-mg$', con g approssimativamente costante, da una quota iniziale z_1 ad una quota finale z_2

$$\begin{aligned} L|_{z_1}^{z_2} &= \int_{z_1}^{z_2} (-m\,g)\,\mathrm{d}z && (187)\\ &= -m\,g\,(z_2 - z_1) && (188)\end{aligned}$$

Se $z_2 > z_1$ (il corpo è salito): $L = -m\,g\,h < 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c < 0$.
Se $z_2 < z_1$ (il corpo è disceso): $L = m\,g\,h > 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c > 0$.
(h, definito positivo, è la differenza di quota dal punto più alto al punto più basso.) Anche in questo caso, se il corpo ritorna nella posizione iniziale il lavoro totale è nullo.

Esempio 3: lavoro della forza di attrito mentre il corpo si sposta da x_1 a $x_2 > x_1$ (indicando con d la distanza fra i due punti):

$$\begin{aligned} L|_{x_1}^{x_2} &= \int_{x_1}^{x_2} (-\mu_D\,F_N)\,\mathrm{d}x && (189)\\ &= -\mu_D\,F_N\,(x_2 - x_1) = -\mu_D\,F_N\,d && (190)\\ (&= -\mu_D\,m\,g\,d\ ,\ \text{caso particolare}\ ). && (191)\end{aligned}$$

Se invertiamo il verso del moto anche la forza cambia segno ($F = -\mu_D\,F_N\,\hat{v}$):

$$\begin{aligned} L|_{x_2}^{x_1} &= \int_{x_2}^{x_1} (\mu_D\,F_N)\,\mathrm{d}x && (192)\\ &= \mu_D\,F_N\,(x_1 - x_2) && (193)\\ &= -\mu_D\,F_N\,(x_2 - x_1)\ : && (194)\end{aligned}$$

Lavoro sempre negativo:$L|_{x_1}^{x_2} = -\mu_D\,F_N\,d$ se si va da x_1 a x_2 e poi si ritorna a x_1 si sommano i lavori negativi: $\rightarrow L_{tot} = -2, \mu_D\,F_N\,d$.

$\rightarrow$ Discussione sui vantaggi di usare il lavoro invece di risolvere in dettaglio le equazioni del moto.

10.3

In alcuni tipi di forze (molla, gravità, elettrostatica) il lavoro compiuto su un ciclo è nullo. Inoltre, in questi casi si osserva come l'energia cinetica 'sparisca' e poi 'ricompaia' (esempio: lancio di oggetto verso l'alto) in virtù della relazione $L|_{x_1}^{x_2} = \Delta E_c|_{x_1}^{x_2}$. Si ipotizza quindi, per questo tipo di forze, che quando l'energia cinetica 'sparice' (o semplicemente diminuice), essa si trasformi in un altro tipo di energia *meccanica*: **energia potenziale**:

diminuzione di energia cinetica → aumento di energia potenziale

(e viceversa)

$$\Delta E_c|_{x_1}^{x_2} = -\,\Delta E_p|_{x_1}^{x_2} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_p|_{x_1}^{x_2} = -\,L|_{x_1}^{x_2}\,. \tag{195}$$

La (195) definisce (a meno di una costante) l'energia potenziale. Nota: sia per l'energia cinetica che per l'energia potenziale il lavoro fornisce la variazione dell'energia, ma, mentre per l'energia cinetica esiste uno 'zero naturale', corrispondente ad una velocità nulla, nell'energia potenziale tale 'zero naturale' non sempre esiste. In genere, dato un problema è conveniente fissare lo zero dell'energia potenziale in posizione del suo minimo (in quel problema).
Esempio 1 (molla)

$$\Delta E_p|_0^x = -\,L|_0^x = \frac{1}{2}\,k\,x^2 \tag{196}$$

$$E_p(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_p(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2\,. \tag{197}$$

Esempio 2 (forza di gravità "-mg"). Se il moto dell'oggetto si svolge da un livello minimo (es. tavolo, pavimento, piano stradale, etc.), conviene prendere tale livello come riferimento per lo zero dell'energia potenziale:

$$\Delta E_p|_0^h = -\,L|_0^h = m\,g\,h \tag{198}$$

$$E_p(h=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_p(h) = m\,g\,h\,. \tag{199}$$

10.4

Prodotto scalare: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\theta$ ("prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo fra essi compreso").
Può essere visto come prodotto modulo per proiezione: $a\cdot(b\cos\alpha)$, ovvero $b\cdot(a\cos\alpha)$. Commuta, ovvero $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$. Prodotto scalare di un vettore con se stesso: $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$. Vettori ortogonali: prodotto scalare nullo. Applicazione ai 'versori' [$\hat{i} = (1,\,0,\,0)$, $\hat{j} = (0,\,1,\,0)$,$\hat{k} = (0,\,0,\,1)$]: $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$; $\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$,