

Capitolo 11: Fisica Nucleare:

**Corso di Fisica Nucleare e
Subnucleare I**

Professor Carlo Dionisi

A.A. 2004-2005

11.1 Proprieta' generali dei Nuclei

In questo capitolo affrontiamo lo studio dei nuclei. Un nucleo e' un insieme di neutroni e protoni legati (*"incollati"*), insieme dalla forza nucleare. Le grandezze che caratterizzano i Nuclei Atomici e che danno informazioni sulla loro struttura sono:

- 1) la massa, il raggio, lo spin;
- 2) la carica elettrica, il momento di dipolo magnetico, il momento di quadrupolo elettrico,

I nuclei sono indicati con il **Simbolo dell' Elemento, X**, il **Numero Atomico, Z** ed il **Peso Atomico o Numero di massa, A** nel modo seguente:



Dove **A** e' il numero di nucleoni, di cui **Z** sono protoni e **N = (A - Z)** sono neutroni. Per esempio ${}^{35}_{17} \text{Cl}$ indica un nucleo di Cloro con 18 neutroni e ${}^{37}_{17} \text{Cl}$ un nucleo di cloro con 20 neutroni.

La **Carica Elettrica** di un nucleo e' data dal Numero di protoni (**Z**) moltiplicato per la carica elementare:

$$Q = Z e \quad ; \quad e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb}$$

Il numero Atomico **Z** determina le Proprieta' Chimiche di un dato elemento:

i) nuclei con lo stesso **Z** e diverso **A** sono chiamati **isotopi**: hanno la stessa posizione nella Tavola di Mendeleev.

ii) nuclei con lo stesso **A** e diverso valore di **Z** sono chiamati **isobari**: hanno la massa approssimativamente uguale.

iii) nuclei con lo stesso numero di neutroni (**N = A - Z**) sono chiamati **isotoni**.

Il numero atomico **Z** e' stato determinato eccitando in modo opportuno (con elettroni, protoni o utilizzando radiazione di sincrotrone) gli atomi e misurando gli spettri di emissione di raggi X che sono caratteristici dell' atomo in esame.

Nel 1913 Moseley, stabilendo una relazione tra la frequenza dei raggi X ed il numero atomico degli elementi, ordinò TUTTI gli elementi allora noti nella tavola di Mendeleev. La Legge di Moseley è data da:

$$h \cdot \nu = \frac{3}{4} R_y (Z-1)^2 \quad ; \quad R_y = \frac{m_e c^2 \alpha^2}{2} = 13.6 \text{ MeV}$$

dove R_y è chiamata Energia di Rydberg

11.2 La dimensione e la forma dei nuclei

Come abbiamo visto, Rutherford aveva a disposizione nuclei di elio, particelle α , di energie di qualche MeV. La sua "sonda" non gli permetteva quindi né di raggiungere parametri di impatto di grandezza paragonabile al campo di azione delle forze nucleari, né di scoprire che le cariche delle particelle α e dei nuclei d'oro non sono puntiformi. Tuttavia, usando come bersagli nuclei più leggeri, Rutherford misurò deviazioni dalla sua legge a distanze di circa 10^{-14} metri. Queste deviazioni sono presenti sia perché a queste distanze la distribuzione di densità delle cariche elettriche del proiettile e del bersaglio si sovrappongono, sia perché entrano in gioco le interazioni forti tra le particelle α ed i nuclei.

Per misurare la dimensione dei nuclei è necessario distinguere tra i contributi alla diffusione dovuti alla distribuzione delle sorgenti dei campi elettrici, legate alla carica dei protoni, e quelli dovuti alle sorgenti dei campi nucleari, legate sia ai protoni che ai neutroni. Possiamo in linea di principio pensare di usare due diversi proiettili: uno sensibile solo alla distribuzione della carica elettrica e l'altro solo a quella forte. Gli elettroni, che si accoppiano alla carica elettrica dei protoni dei nuclei ma non hanno interazione forte, e i neutroni, che viceversa sentono solo la forza forte, sono i proiettili usati in diversi esperimenti di scattering per misurare rispettivamente le dimensioni legate ai protoni e quelle legate alla distribuzione dei nucleoni nei nuclei.

Misure precise vennero realizzate negli anni 50 con esperimenti di urto elastico usando elettroni di energie > 100 MeV.

Un altro vantaggio nell'uso di leptoni carichi (elettroni o muoni) per sondare la materia nucleare, oltre a quello già ricordato che i leptoni praticamente interagiscono con i nuclei solo attraverso la forza elettromagnetica, è legato al fatto che i leptoni non hanno struttura interna: sono cioè puntiformi.

11.2.1 La sezione d'urto di Mott

La formula che descrive la sezione d'urto differenziale per lo scattering elastico di elettroni relativistici e' stata ricavata da Mott usando la teoria di Dirac per gli elettroni relativistici. Analogamente a quella di Rutherford, la formula di Mott trascura la dimensione del nucleo e il suo rinculo dovuto all'urto, ma include invece l'effetto dello spin dell'elettrone e si scrive:

— La sezione d' urto di Mott

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \left(1 - \beta^2 \cdot \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)$$

Vediamo che a energie relativistiche, al crescere dell'angolo di diffusione, la sezione d'urto di Mott diminuisce piu' rapidamente di quella di Rutherford. Nel limite $\beta \rightarrow 1$ otteniamo

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}^* &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = \\ &= \frac{4Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 E'^2}{|qc|^4} \cdot \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \end{aligned}$$

Il fattore aggiuntivo che compare a moltiplicare la formula di Rutherford si spiega considerando il caso estremo di diffusione a 180° : infatti, dovendo conservarsi il momento angolare, possiamo vedere dalla figura 11.1 che la diffusione **per $\theta = 180^\circ$** e' possibile SOLO se il nucleo ha spin rendendo quindi possibile lo spin-flip dell' elettrone. Il fattore aggiuntivo nella formula di Mott,essendo legato allo spin, descrive la parte magnetica dell' interazione.

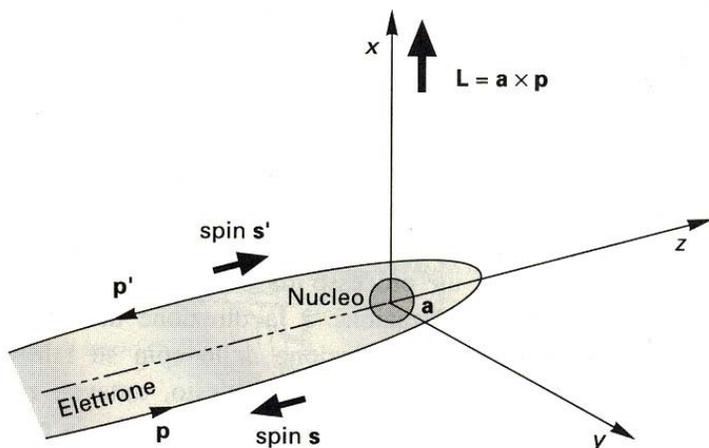


Figura 11.1: conservazione del momento angolare nella diffusione a 180° .

11.2.2 I fattori di forma nucleari

Negli esperimenti di diffusione su nuclei la sezione d'urto di Mott e' in accordo con le misure sperimentali solo nel limite $|q| \rightarrow 0$. Per valori piu' grandi le sezioni d'urto sperimentali sono sistematicamente piu' piccole di quelle previste dalla formula di Mott. Questo e' facilmente comprensibile:

data la estensione spaziale non nulla dei nuclei, non prevista dalla formula, all'aumentare del momento trasferito diminuisce la dimensione spaziale "vista" dalla sonda dell' elettrone che interagisce quindi solo con una certa frazione della carica del nucleo e questo fa si che la sezione d'urto diminuisca.

Dato un nucleo di carica Z , definiamo una **funzione di distribuzione di carica** $f(\vec{x})$

$$\rho(\vec{x}) = Zef(\vec{x}) \quad \text{con} \quad \int f(\vec{x}) d^3x = 1$$

La Trasformata di Fourier della distribuzione di carica $f(\vec{x})$

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar} f(\vec{x}) d^3x \quad \vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$$

viene chiamato FATTORE DI FORMA. Nel caso di una carica puntiforme, diffusione di Rutherford, avremo

$$f(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \quad \rightarrow \quad F=1 = \text{Costante}$$

Ruolo dei Fattori di Forma:

$$\text{Misure} \xleftrightarrow{\text{Fattori di Forma}} \text{Predizioni Teoria}$$

Nel seguito ci limiteremo a discutere solo i fattori di forma dei sistemi a simmetria sferica che dipendono solo dal modulo di q . Il valore assoluto di $F(q^2)$ e' misurabile sperimentalmente dal rapporto fra la sezione d'urto misurata e la sezione d'urto di Mott:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{esp.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}^* \times |F(\vec{q}^2)|^2$$

Le prime misure dei fattori di forma vennero fatte negli anni 50 presso l'acceleratore lineare ad elettroni della Università di Stanford in California. Con energie del fascio di circa 500 MeV, vennero misurate le sezioni d'urto avendo come bersaglio una grande varietà di nuclei.

Un esempio di una delle prime misure di fattori di forma e' mostrato in figura 11.2, dove e' riportata la sezione d'urto per il ^{12}C misurata a diversi valori dell'angolodi diffusione θ .

All'andamento come $1/q^4$ dovuto allo scattering elastico, si sovrappone una tipica figura di diffrazione associata al Fattore di Forma. C'è un minimo per $\theta \approx 51^\circ \rightarrow |q|/\hbar \approx 1.8 \text{ fm}^{-1}$.

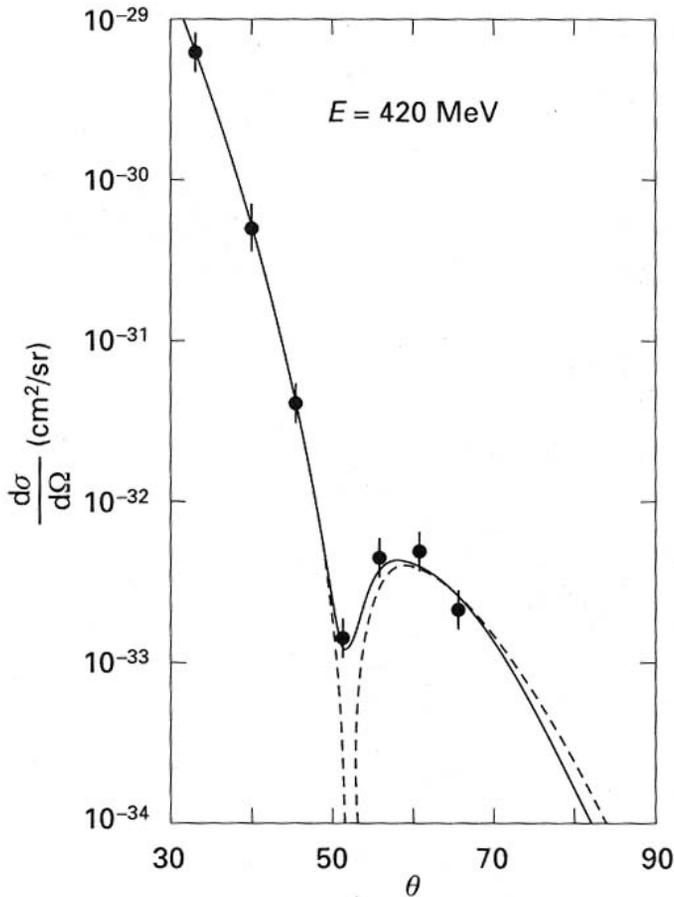


Figura 11.2: come viene calcolato in appendice x, nel caso di una distribuzione di una carica sferica ed omogenea il fattore di forma e' una funzione oscillante con minimi di diffrazione a $q \times R / (\hbar/2\pi)$. La distribuzione dei minimi ci da' quindi informazioni su R.

L'interpretazione di questo risultato permette di ricavare informazioni sul nucleo diffondente. Nella approssimazione di Born, trascurando gli effetti del rinculo del nucleo e trattando il caso a simmetria sferica ($|\vec{x}|=r$), abbiamo:

$$F(q^2) = \int e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{x}}{\hbar}} f(|\vec{x}|) d^3x$$

Integrando sull'intero angolo solido avremo:

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{x}}{\hbar}} f(r) d^3x = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}} f(r) r^2 dr = \\ &= 2\pi \int_0^\infty f(r) r^2 dr \int_{-1}^1 e^{i\frac{qr\cos\theta}{\hbar}} d(\cos\theta) = \\ &= 2\pi \int_0^\infty f(r) r^2 \frac{2\hbar}{2iqr} \left(e^{i\frac{qr}{\hbar}} - e^{-i\frac{qr}{\hbar}} \right) dr = \\ &= 4\pi \int_0^\infty f(r) r^2 \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} dr \end{aligned}$$

dove il fattore di normalizzazione e' dato da:

$$1 = \int f(x) d^3x = \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f(r) r^2 d\phi d\cos\theta dr = 4\pi \int_0^\infty f(r) r^2 dr$$

In linea di principio la distribuzione radiale di carica puo' essere ottenuta dalla trasformata di Fourier inversa del fattore di forma, utilizzando per quest'ultimo una parametrizzazione sperimentale in termini di q^2 :

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(q^2) e^{-iq\pi/\hbar} d^3q$$

Le energie dei fasci disponibili sono pero' finite e quindi ci sono solo valori sperimentali limitati dell'impulso trasferito per i quali calcolare i fattori di forma. In pratica si scrivono diverse parametrizzazioni di $f(r)$ e da queste si ricavano le diverse predizioni teoriche per i corrispondenti fattori di forma.

Si variano infine i parametri liberi dei modelli fino ad ottenere l'accordo migliore tra dati e teoria. I fattori di forma per particolari funzioni $f(r)$ sono elencati in tabella 11.1 e sono mostrati in figura 11.3.

Tabella 11.1

Relazione fra le distribuzioni di carica e i fattori di forma per alcune distribuzioni di carica a simmetria sferica, applicando l'approssimazione di Born.

Distribuzione di Carica $f(r)$		Fattore di Forma $F(q^2)$	
Puntiforme	$\delta(r)/4\pi$	1	Costante
Esponenziale	$(a^3/8\pi) \cdot \exp(-ar)$	$(1 + q^2/a^2\hbar^2)^{-2}$	Dipolare
Gaussiana	$(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot \exp(-a^2r^2/2)$	$\exp(-q^2/2a^2\hbar^2)$	Gaussiano
Sfera omogenea	$\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{per } r \leq R \\ 0 & \text{per } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ con $\alpha = q R/\hbar$	Oscillante

La diffusione su un oggetto con bordi netti produce figure di diffrazione con massimi e minimi di intensita'. **Sottolineamo che nel caso di un bersaglio puntiforme il fattore di forma diviene costante e uguale all'unita'**. Nelle formule di Rutherford e Mott non c'e' nessuna dipendenza da una lunghezza. Queste formule descrivono lo scattering su oggetti puntiformi e sono dette essere **"invarianti di scala"**. Come abbiamo appena mostrato, quando uno o entrambi gli oggetti collidenti hanno una dimensione non nulla, le formule devono essere modificate moltiplicandole per un fattore di forma $F(q^2)$. Questo fattore, pur essendo esso stesso adimensionale, e' pero' funzione di una quantita', q^2 , che e' associato ad una lunghezza: **l'introduzione del fattore di forma distrugge l'invarianza di scala.**

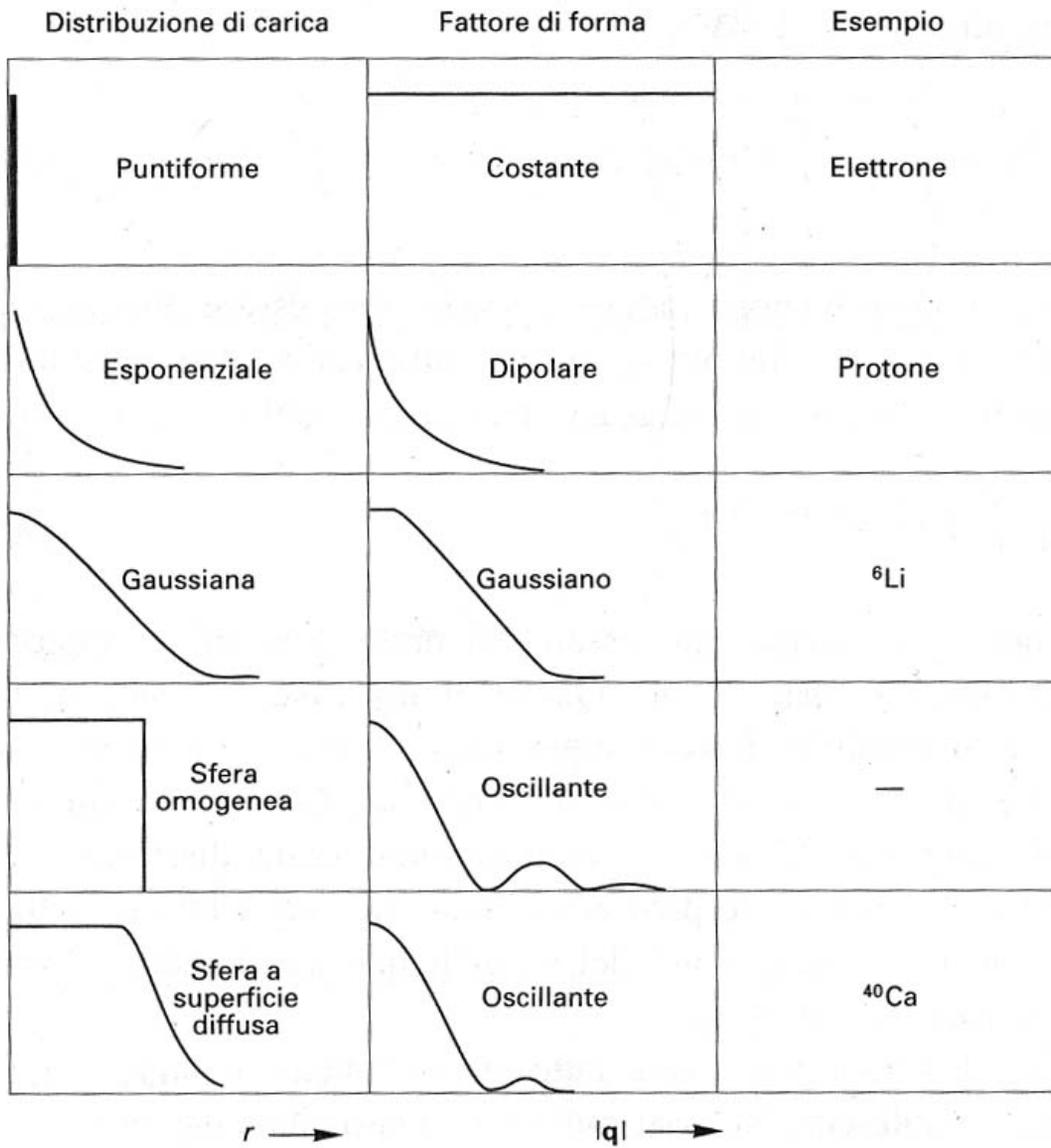


Figura 11.3

Per una sfera omogenea di raggio R , vedi appendice 3, si ha un minimo di diffrazione per

$$\frac{|q| \cdot R}{\hbar} \approx 4.5$$

In fig 11.2 Abbiamo visto che il minimo della sezione d'urto, e quindi del fattore di forma, si ha per $|q|/\hbar \approx 1.8 \text{ fm}^{-1}$. Da questo concludiamo che il nucleo di carbonio ha un raggio $R \approx 4.5 \frac{\hbar}{|q|} \approx 2.5 \text{ fm}$

Possiamo ottenere informazioni sul raggio nucleare anche studiando il comportamento dei fattori di forma per $q^2 \rightarrow 0$. Se la lunghezza d'onda e' molto piu' grande del raggio R del nucleo, avremo che:

$$\text{essendo } \tilde{\lambda} = \frac{\hbar}{|q|}, \text{ per } \frac{R}{\tilde{\lambda}} \ll 1 \text{ avremo } \frac{|q| \cdot R}{\hbar} \ll 1$$

$F(q^2)$ puo' essere allora sviluppato in serie di potenze di q :

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int f(|\vec{x}|) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{iq|\vec{x}|\cos\theta}{\hbar} \right)^n d^3x = \quad \text{con } \theta \text{ angolo tra } \vec{x} \text{ e } \vec{q} \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(r) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{qr}{\hbar} \right)^2 \cos^2\theta + \dots \right] d\phi d\cos\theta r^2 dr = \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} f(r) r^2 dr - \frac{1}{6} \frac{q^2}{\hbar^2} 4\pi \int_0^{\infty} f(r) r^4 dr + \dots \end{aligned}$$

Se definiamo $\langle r^2 \rangle$, Raggio quadratico medio della distribuzione di carica, come:

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^{\infty} r^2 f(r) r^2 dr$$

Avremo quindi:

$$F(q^2) = 1 + \frac{1}{6} \frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{\hbar^2} + \dots$$

$\langle r^2 \rangle$ si misura a piccoli valori di q^2

$$\langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \left. \frac{dF(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0}$$

11.2.3 Distribuzione di carica dei nuclei e raggi nucleari

A partire dalla meta' degli anni 50 studi sistematici, fondati su numerose misure dei fattori di forma effettuate con diversi acceleratori, hanno portato alle seguenti conclusioni:

- 1) I nuclei non sono sfere con una superficie definita in modo netto;
- 2) al loro interno la densita' di carica e' costante mentre in superficie si annulla in modo graduale;
- 3) la densita' di carica e' ben riprodotta, questo e' mostrato in Fig 11.4 per alcuni nuclei, dalla distribuzione di Woods-Saxon a due parametri:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{\frac{r-c}{a}}} \rightarrow \text{dove} \rightarrow \rho(c) = \rho(0)/2$$

per A grande $\rightarrow c = 1.07 \text{ fm} \times A^{\frac{1}{3}}; a = 0.54 \text{ fm}$

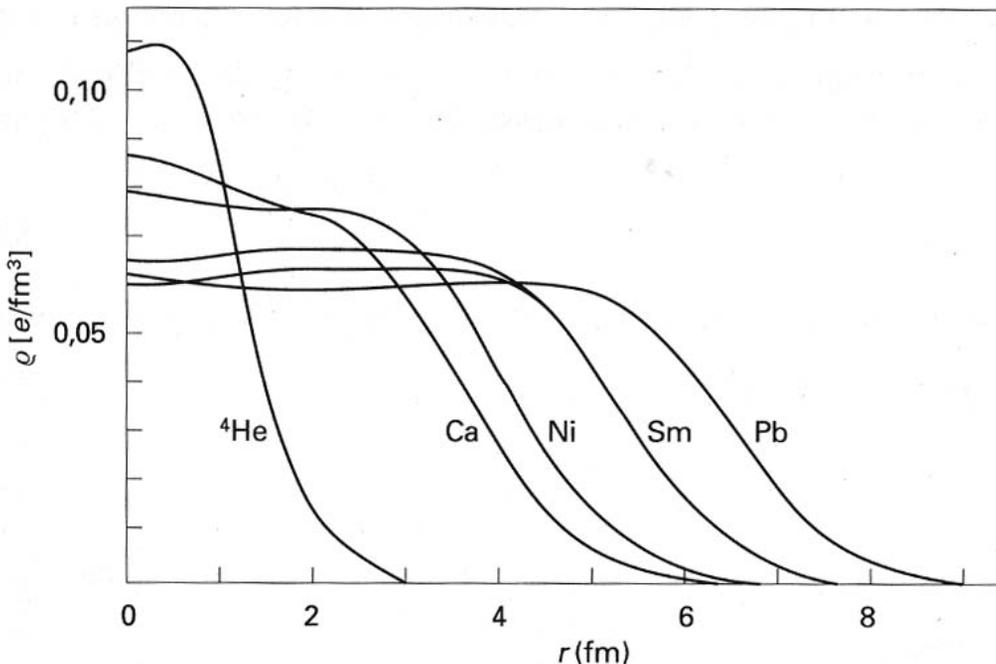


Figura 11.4

Dalla distribuzione della carica elettrica di un nucleo, determinata come visto dallo scattering con gli elettroni, possiamo farci un'idea di come la materia nucleare e' distribuita nel nucleo. Se il protone fosse un oggetto puntiforme, potremmo identificare la densita' dei protoni con quella della carica elettrica: $\rho(\text{protone}) = \rho(\text{carica})$. Poiche' le forze nucleari che legano i nucleoni insieme sono indipendenti dalla carica elettrica e a corto raggio d'azione, possiamo assumere con buona approssimazione che il rapporto tra la densita' dei neutroni e quella dei protoni e' la stessa in tutti i punti in un nucleo e quindi che: $\rho(\text{neutrone}) / \rho(\text{protone}) = N/Z$.

Quindi **la densita' totale dei nucleoni** sara' :

$$\begin{aligned} \rho_T &= \rho_n + \rho_p = N/Z \times \rho_p + \rho_p = N/Z \rho_{\text{carica}} + \rho_{\text{carica}} = \\ &= [(N + Z) / Z] \times \rho_{\text{carica}} \end{aligned}$$

$$\rho_T = A/Z \times \rho_{\text{carica}}$$

Essendo la densita' costante , avremo : $(4/3) \times \pi \times R^3 \times \rho_0 = A$
da cui, per $\rho_0 = 0.17$ nucleoni/fm³,

$$R = 1.12 \times A^{1/3} \text{ fm}$$

In Fig. 11.5 vediamo lo r.m.s. del raggio nucleare per vari nuclei in funzione di $A^{1/3}$ determinato da esperimenti di diffusione di elettroni. Un fit con una retta, forzata a passare per l' origine, da' come risultato una pendenza di $R_0 = 1.23$ fm.

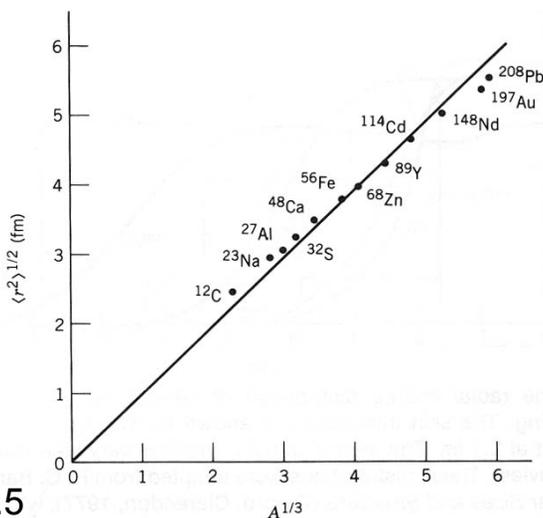


Figura 11.5

The rms nuclear radius determined from electron scattering experiments. The slope of the straight line gives $R_0 = 1.23$ fm. (The line is not a true fit to the data points, but is forced to go through the origin to satisfy the equation $R = R_0 A^{1/3}$.) The error bars are typically smaller than the size of the points (± 0.01 fm). More complete listings of data and references can be found in the review of C. W. de Jager et al., *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **14**, 479 (1974).

Se indichiamo con t lo spessore dello strato di superficie per cui $\rho(r)$ passa dal 90% al 10% del suo valore massimo, si trova che t ha lo stesso valore per TUTTI i nuclei pesanti: $t \cong 2.40 \text{ fm}$, vedi Fig. 11.6:

1) per una materia nucleare infinitamente estesa si avrebbe

$$\rho_T \cong 0.17 \times \text{nucleoni}/\text{fm}^3$$

2) i Lantanidi (Terre rare) hanno una forma ellissoide;

3) nuclei leggeri come ${}^6\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$ e in particolare ${}^4\text{He}$, sono casi particolari con $\rho(r)$ di tipo gaussiano.

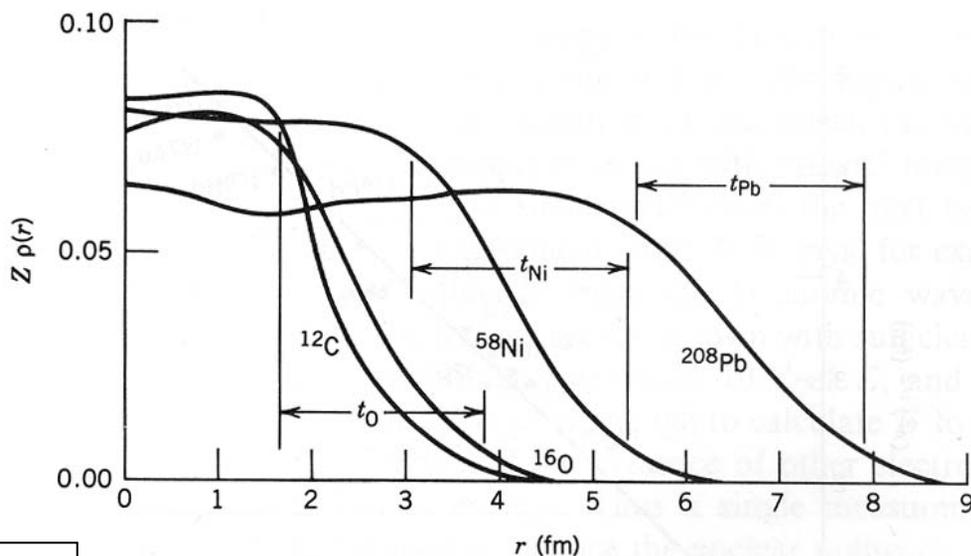


Fig. 11.6

The radial charge distribution of several nuclei determined from electron scattering. The skin thickness t is shown for O, Ni, and Pb; its value is roughly constant at 2.3 fm. The central density changes very little from the lightest nuclei to the heaviest. These distributions were adapted from R. C. Barrett and D. F. Jackson, *Nuclear Sizes and Structure* (Oxford: Clarendon, 1977), which gives more detail on methods of determining $\rho(r)$.

Appendice 3: fattore di forma per una distribuzione di carica uniforme in una sfera di raggio R_0

Condizione di normalizzazione: $\rho_0 \int \rho(r) d^3 r = 1$

$$\begin{cases} \rho(r) = \rho_0 = \frac{3}{4} \frac{1}{\pi R_0^3} & \text{per } r \leq R_0 \\ \rho(r) = 0 & \text{per } r > R_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{R_0} e^{i \frac{qr \cos \theta}{\hbar}} r^2 dr = \\ &= \rho_0 2\pi \int_0^{R_0} r^2 \frac{\hbar}{iqr} \frac{2}{2} \left(e^{i \frac{qr}{\hbar}} - e^{-i \frac{qr}{\hbar}} \right) dr = \\ &= \rho_0 \hbar \frac{4\pi}{q} \int_0^{R_0} \sin \frac{qr}{\hbar} r dr \end{aligned}$$

Ponendo $x = \frac{qr}{\hbar}$, $x_0 = \frac{qR_0}{\hbar}$

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \rho_0 \hbar \frac{4\pi}{q} \frac{\hbar^2}{q^2} \int_0^{x_0} x \sin x dx = \rho_0 4\pi \frac{\hbar^3}{q^3} [\sin x - x \cos x]_0^{x_0} = \\ &= \rho_0 4\pi \frac{\hbar^3}{q^3} \left[\sin \frac{qR_0}{\hbar} - \frac{qR_0}{\hbar} \cos \frac{qR_0}{\hbar} \right] = \\ &= \frac{3}{4} \frac{1}{\pi R_0^3} 4\pi \frac{\hbar^3}{q^3} \left[\sin \frac{qR_0}{\hbar} - \frac{qR_0}{\hbar} \cos \frac{qR_0}{\hbar} \right] \end{aligned}$$

N.B.: questo fattore di forma riproduce in modo soddisfacente la diffusione su nuclei con A grande

Esercizio: Fattore di forma elettrico

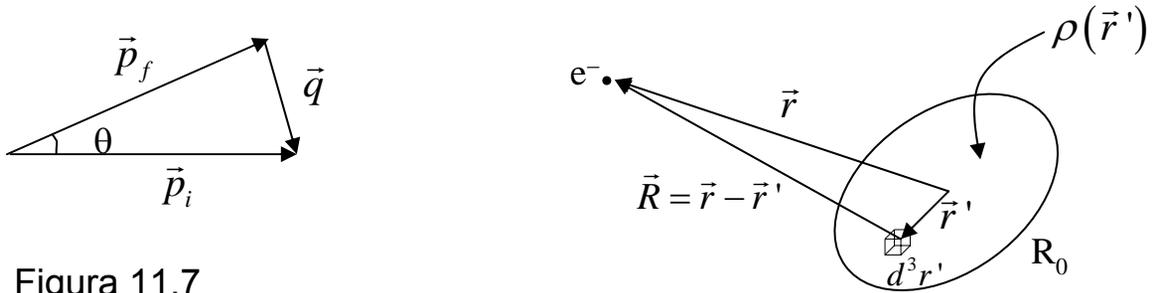


Figura 11.7

La particella targhetta sia un elettrone e quella bersaglio abbia una struttura di carica distribuita con densità $\rho(\vec{r}')$, vedi figura 11.7.

Avremo:

$$V(\vec{r}) = e^2 Z \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad \int \rho(\vec{r}') d^3 r' = 1$$

Avremo:

$$\langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle = e^2 Z \int_V e^{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar}} \int_{R_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' d^3 r$$

Calcoliamo il doppio integrale prima su \vec{r} tenendo costante \vec{r}'

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle &= e^2 Z \int_V \int_{R_0} e^{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{R}}{\hbar}} e^{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}'}{\hbar}} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} d^3 r' d^3 R = \\ &= e^2 Z \int_V \frac{e^{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{R}}{\hbar}}}{R} d^3 R \int_{R_0} e^{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}'}{\hbar}} \rho(\vec{r}') d^3 r' \end{aligned}$$

Fattore di Forma elettrico

$$\begin{aligned}\int_V \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}}}{R} d^3R &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty \frac{e^{i q R \cos\theta}}{R} R^2 dR = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty \frac{e^{i q R \cos\theta}}{R} R^2 dR = \\ &= 2\pi \int_0^\infty R^2 \frac{2\hbar}{2iqR^2} \left(e^{i\frac{qR}{\hbar}} - e^{-i\frac{qR}{\hbar}} \right) dR = \\ &= 4\pi \frac{\hbar}{q} \int_0^\infty \sin(qR/\hbar) dR = 4\pi \left(\frac{\hbar}{q} \right)^2\end{aligned}$$

Riassumendo otteniamo:

$$\langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle = 4\pi e^2 Z \left(\frac{\hbar}{q} \right)^2 \int_{R_0} e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}'}{\hbar}} \rho(\vec{r}') d^3r'$$

dove chiamiamo Fattore di Forma Elettrico la quantità $F(q^2)$ definita da

$$F(q^2) = \int_{R_0} e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}'}{\hbar}} \rho(\vec{r}') d^3r'$$

11.3 Masse dei Nuclei

La massa dei nuclei, come anticipato nel capitolo sui metodi di misura, e' determinata misurando la traiettoria degli ioni in campi elettrici e magnetici. Oggi si raggiungono precisioni fino a $\cong 10^{-6}$. Per ridurre gli errori sistematici, le misure si fanno di solito per **confronto** con nuclei di calibrazione che hanno valori di massa molto vicini a quelli dei campioni da misurare.

L' unita' di misura usata in fisica nucleare e' la Atomic Mass Unit, u , definita da:

$$u = 1/12 \text{ massa dell' isotopo } (^{12}_6\text{C})$$

In queste unita' la massa dell' atomo di idrogeno e'

$$M(^1_1\text{H}) = 1.007825 u = 938.783 \text{ MeV}/c^2$$

con fattore di conversione: $u = 931.494 \text{ MeV}/c^2$

	simbolo	massa atomica (u)	massa nucleare (MeV)
	$\frac{1}{12} [^{12}_6\text{C}]$	1	931.494
elettrone	e		0.511
protone	p		938.272
neutrone	n		939.566
idrogeno	^1_1H	1.007825	938.373
deuterio	^2_1H	2.014102	1875.613
trizio	^3_1H	3.016049	2808.921
elio	^4_2He	4.002603	3727.379

Come già' ricordato, le masse dei nuclidi instabili a vita media breve NON possono essere misurate con uno spettrometro di massa. In questi casi si possono usare le leggi della conservazione dell' energia in opportune reazioni nucleari.

Si definisce **Energia di Legame B** la grandezza data da :

$$B(Z,A) = [Z M(^1\text{H}) + (A - Z) M_n - M(A,Z)]$$

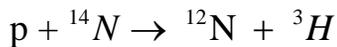
Dove $M(^1\text{H}) = M_p + M_e$ e si trascura l' energia di legame dell' atomo di idrogeno ($B_H \cong 13.6 \text{ eV}$).

Si definisce **Q-Value** di una reazione Nucleare :

$$Q = (M_{\text{iniziale}} - M_{\text{finale}}) c^2 = T_{\text{finale}} - T_{\text{iniziale}}$$

Alcuni esempi:

1) : Consideriamo il caso dell' Azoto $^{12}_7\text{N}$



Dalla conservazione dell' energia abbiamo:

$$M_p \cdot c^2 + T_p + M_{^{14}\text{N}} \cdot c^2 + T_{^{14}\text{N}} = M_{^{12}\text{N}} \cdot c^2 + T_{^{12}\text{N}} + M_{^3\text{H}} \cdot c^2 + T_{^3\text{H}}$$

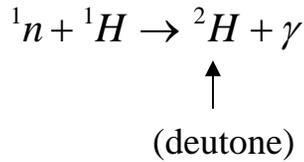
si trova $Q = -22.1355 \text{ MeV}$ da cui

$$M_{^{12}\text{N}} = M_p + M_{^{14}\text{N}} - M_{^3\text{H}} - \frac{Q}{c^2}$$

NOTA BENE: Le energie di legame degli elettroni atomici sono circa uguali a $20.8 \cdot Z^{\frac{7}{3}} \text{ eV}$.

Per l' idrogeno si ottiene $\cong 13.6 \text{ eV}$.

- 2) Misura della massa del neutrone dalla cattura in quiete di neutroni termici da parte dell'idrogeno ($E_{\text{cinetica}} \approx 1/40 \text{ eV}$) a formare un nucleo di deuterio:



L'energia del fotone e' direttamente proporzionale all'energia di legame B del nucleo di deuterio ${}^2\text{H}$:

$$B = (M_n + M_p - M_d)c^2 = hv + \frac{(hv)^2}{2M_d c^2} = 2.225 \text{ MeV}$$

dove l'ultimo termine tiene conto dell'energia di rinculo del deutone e il decadimento avviene a riposo, vedi figura 11.?

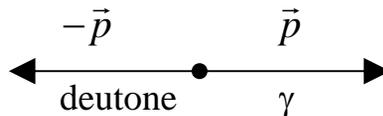
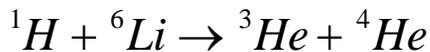


Figure 11.?

- 3) Come ultimo esempio si consideri la reazione



Il bilancio energetico di questa reazione e' dato da

$$E_{{}^1H} + E_{{}^6Li} = E_{{}^3He} + E_{{}^4He} \quad \text{dove} \quad (E = Mc^2 + T)$$

Note le masse, e misurate le energie cinetiche dei tre nuclidi noti e di quello di cui si vuole misurare la massa, è determinata l'energia di legame B.

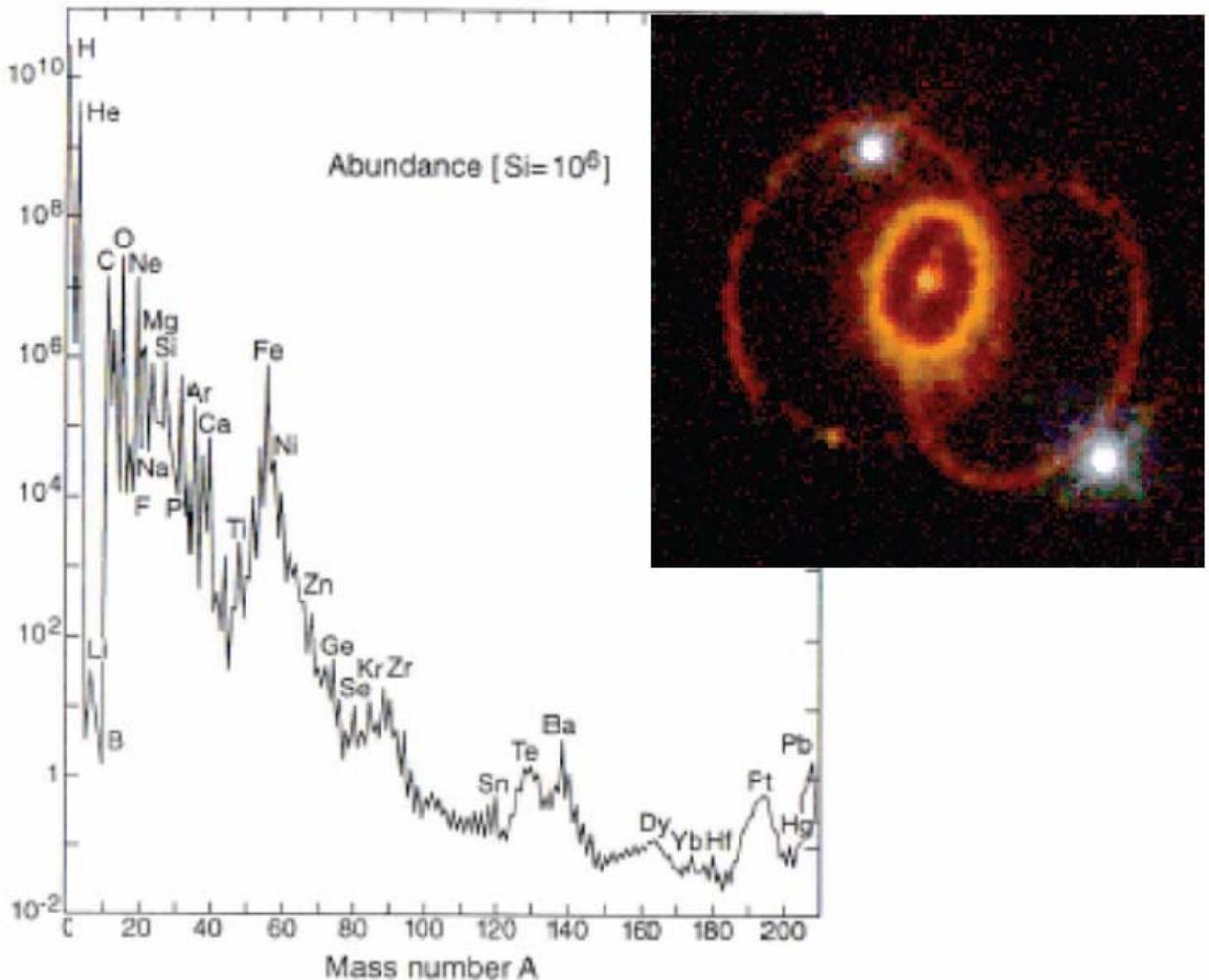
Nota Bene: In natura si trova:

- 1) Nuclei con Z dispari: hanno 1 o 2 isotopi stabili
- 2) Z dispari ed A pari: sono instabili
- 3) Z dispari ed A dispari: solo uno o due nuclei β -stabili

11.4 L' Abbondanza dei Nuclidi

L'abbondanza relativa dei vari nuclidi in funzione del numero di massa A e' mostrata in figura 11.8.

Misurate in diversi campioni nel sistema solare, esse sono identiche e coincidono con quelle riscontrate nei raggi cosmici provenienti dall'esterno del sistema solare. I nuclei piu' leggeri fino al ^{56}Fe (il nucleo piu' stabile), furono prodotti per fusione nucleare nelle stelle. I nuclei piu' pesanti furono creati nelle esplosioni di stelle molto pesanti come le supernovae.



Solar system abundances of the elements

Figura 11.8: abbondanza degli elementi all'interno del sistema solare in funzione del numero di massa A , normalizzata all'abbondanza del silicio.

11.5 Le Energie di legame dei nuclei

I nuclei ci appaiono quindi come delle gocce di liquido sferiche di densità circa costante. Un nucleo è però un sistema che ubbidisce alla meccanica quantistica e vedremo che i suoi stati eccitati sono separati di energie dell'ordine del keV o più dai suoi stati fondamentali. Questo ci permette di dire che i nuclei della materia terrestre sono tutti allo stato fondamentale. Come ogni sistema, un nucleo nel suo stato fondamentale sarà quindi caratterizzato da una energia ben definita, un momento angolare ben definito, etc.

Poiché un nucleo è un sistema legato, è necessaria una energia $B(Z,N)$, che abbiamo chiamato **“energia di legame”**, per separarlo completamente in Z protoni e N neutroni. Affinché il nucleo possa formarsi, $B(Z,N)$ deve essere positiva. Nella tabella 11.3 sono elencate le energie di legame per i nuclei più leggeri. Nella tabella sono anche indicate le energie di legame per nucleone, $B(Z,N) / A$, che, per la gran parte dei nuclei, vale circa 7-8 MeV con fluttuazioni a volte importanti da nucleo a nucleo. La fluttuazione è molto marcata nel valore della differenza tra l'energia di legame di un nucleo e quella del nucleo precedente nella tabella di Mendeleev. Questa energia può essere interpretata come l'energia di legame dell'ultimo nucleone che si aggiunge per formare quel nucleo della sequenza.

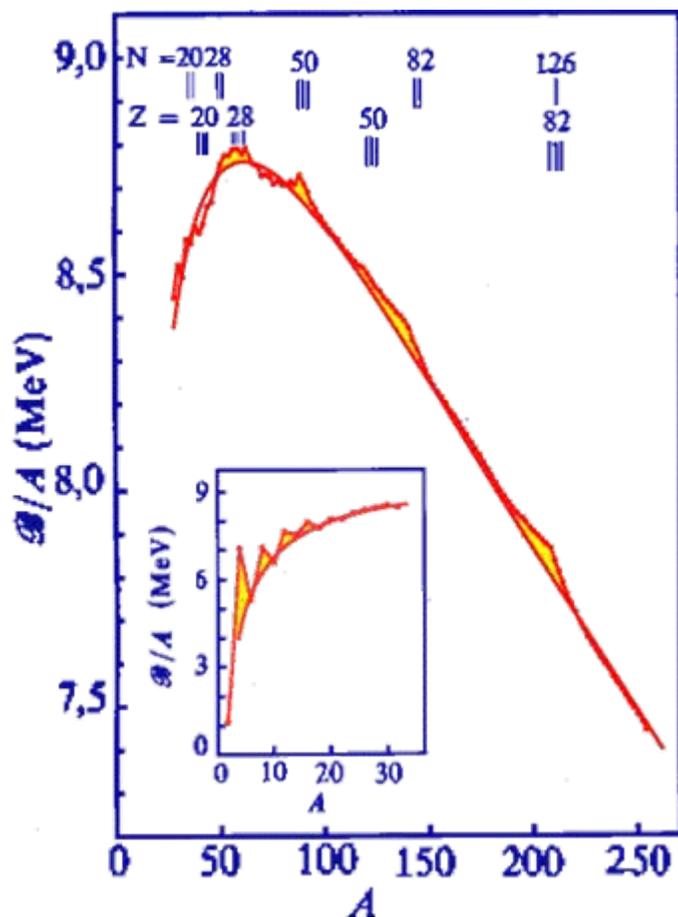
Tabella 11.3 *Energies of some light nuclei*

Nucleus	Binding energy (MeV)	Binding energy of last nucleon (MeV)	Binding energy per nucleon (MeV)	Spin and parity
${}^2_1\text{H}$	2.22	2.2	1.1	1^+
${}^3_2\text{H}$	8.48	6.3	2.8	$\frac{1}{2}^+$
${}^4_2\text{He}$	28.30	19.8	7.1	0^+
${}^5_2\text{He}$	27.34	-1.0	5.5	$\frac{3}{2}^-$
${}^6_3\text{Li}$	31.99	4.7	5.3	1^+
${}^7_3\text{Li}$	39.25	7.3	5.6	$\frac{3}{2}^-$
${}^8_4\text{Be}$	56.50	17.3	7.1	0^+
${}^9_4\text{Be}$	58.16	1.7	6.5	$\frac{3}{2}^-$
${}^{10}_5\text{B}$	64.75	6.6	6.5	3^+
${}^{11}_5\text{B}$	76.21	11.5	6.9	$\frac{3}{2}^-$
${}^{12}_6\text{C}$	92.16	16.0	7.7	0^+
${}^{13}_6\text{C}$	97.11	5.0	7.5	$\frac{1}{2}^-$
${}^{14}_7\text{N}$	104.66	7.6	7.5	1^+
${}^{15}_7\text{N}$	115.49	10.8	7.7	$\frac{1}{2}^-$
${}^{16}_8\text{O}$	127.62	12.1	8.0	0^+
${}^{17}_8\text{O}$	131.76	4.1	7.8	$\frac{5}{2}^+$

Risulta essere particolarmente grande per i nuclei "pari-pari" ${}^4_2\text{He}$, ${}^8_4\text{Be}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{16}_8\text{O}$ e particolarmente piccola per i nuclei immediatamente seguenti. Il valore di legame poi aumenta aggiungendo uno a uno tre nucleoni fino a formare il successivo nucleo pari-pari. Questo andamento verrà spiegato nei prossimi paragrafi con la struttura a gusci (shell) dei nuclei.

Si notano altri effetti più piccoli quali l'extra energia di legame associata all'accoppiamento neutrone-neutrone e protone-protone. Questo effetto deriva dal carattere attrattivo della interazione nucleone-nucleone ed è associato, come vedremo, all'accoppiamento dei momenti angolari. Nella tabella 11.3 possiamo anche notare che i nuclei pari-pari hanno spin zero.

La caratteristica delle energie di accoppiamento e gli effetti di una struttura a gusci che si sovrappongono ad un andamento lentamente crescente della energia di legame per nucleone, si possono notare in tutto l'intervallo di nuclei per i quali sono disponibili dati sperimentali. Questo è ben visibile nella figura 11.10 nel caso dei nuclei stabili. Vediamo di nuovo che anche per i nuclei più pesanti in corrispondenza a particolari valori di Z e N, i Numeri Magici (vedi di seguito), si possono osservare delle deviazioni che indicano la presenza di un legame più forte.



◆ **Numeri magici:**
2,8,20,28,50,82,126

◆ **Numeri Doppiaemente magici:**

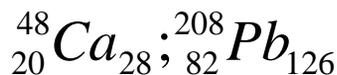


Figura 11.10

11.6 Modello a goccia

Prima di interpretare con la formula di massa questi comportamenti dell'energia dei legami dei nuclei, ricordiamo i risultati sperimentali che hanno portato alla analogia tra i nuclei e la teoria dei liquidi e da questa al “*modello a goccia*”.

1) **Si trova che B/A e' ~ costante.** Se l' interazione fosse forte con TUTTI I nucleoni del nucleo, avremmo che il numero di legami attrattivi deve essere uguale a $A(A-1)/2$. Quindi, per $A \gg 1$, $B \propto A^2$ e ne segue che $B/A \propto A$ e NON costante come dato dalle misure. Abbiamo un fenomeno di **saturazione delle forze nucleari**: interazione solo con I primi vicini. La situazione e' analoga a quella del legame chimico di una goccia di idrogeno liquido: forte legame OMOPOLARE tra coppie di atomi con formazione di H_2 . Un terzo atomo NON e' attratto: molecola di H_2 : satura. Questo e' dovuto alla forza di scambio: scambio degli elettroni tra I due atomi della molecola.

2) Densita' $\rho = \text{costante}$ \rightarrow ad un certo punto deve intervenire una forza REPULSIVA altrimenti c'e' il collasso. Nella molecola la forza repulsiva e' data dalla sovrapposizione degli orbitali elettronici pieni.

11.7 La formula semi-empirica di massa

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che la densità della materia nucleare è approssimativamente costante e che i nuclei hanno una ben definita superficie esterna. Tutto avviene come se il nucleo si comportasse come una goccia di liquido. Questa analogia è resa esplicita nella **“formula semi-empirica di massa”**: una formula di notevole valore capace di “fittare” con l’aiuto di pochi parametri le energie di legame di tutti i nuclei con la sola eccezione di quelli più leggeri ed introdotta per la prima volta nel 1935 dal fisico tedesco [Carl von Weizsäcker](#).

Formula semi-empirica di massa o Formula di Weizsäcker

$$m = Zm_p + Nm_n - \frac{E_B}{c^2}$$
$$E_B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta(A, Z)$$

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} +\delta_0 & Z, N \text{ even (} A \text{ even)} \\ 0 & A \text{ odd} \\ -\delta_0 & Z, N \text{ odd (} A \text{ even)} \end{cases} \quad \delta_0 = \frac{a_P}{A^{1/2}}$$

I parametri vengono determinati fittando la formula ai dati sperimentali e i loro valori dipendono dall’intervallo in massa per i quali sono stati ottimizzati. La tabella 11.4 riassume i risultati ottenuti con tre diversi fit..

	Fit ai minimi quadrati (MeV)*	Wapstra (MeV)	Rohlf (MeV)
a_V	15.8	14.1	15.75
a_S	18.3	13	17.8
a_C	0.714	0.595	0.711
a_A	23.2	19	23.7
a_P	12	<i>n/a</i>	<i>n/a</i>
δ (even-even)	-11.2	-33.5	+11.18
δ (odd-odd)	+11.2	+33.5	-11.18
δ (even-odd)	0	0	0

Wapstra: *Atomic Masses of Nuclides*, A. H. Wapstra, Springer, 1958
Rohlf: *Modern Physics from a to Z0*, James William Rohlf, Wiley, 1994
*Wapstra (*Handbuch der Physik*, XXXVIII / 1

Tabella 11.4: risultati di diversi fit a diverse energie di legame misurate

Nella formula la analogia col modello a goccia e' rappresentata dai primi due termini: il primo, "**termine di volume**", rappresenta l'energia di legame dovuta a tutti i nucleoni del nucleo come l'energia di coesione di un liquido; il secondo, "**termine di superficie**", rappresenta l'energia di superficie di una sfera. Il terzo termine, "**termine Coulombiano**", rappresenta l'energia di una sfera carica di raggio $R_0 A^{1/3}$ e carica totale Ze . Il quarto termine e' chiamato "**termine di asimmetria**" e, per A fissato, da' il massimo valore dell'energia di legame quando $N = Z$ (A pari) o $N = Z \pm 1$ (A dispari). E' cosi' chiamato poiche' tende a rendere i nuclei simmetrici nel numero di neutroni e protoni. Ricordiamo che a causa del Principio di esclusione di Paoli l'attrazione media tra neutrone-protone e' piu' grande di quella tra neutrone-neutrone e protone-protone. Cosi', per un dato valore di A , e' vantaggioso dal punto di vista energetico massimizzare le coppie neutrone-protone che possono interagire: questo si realizza con valori di Z e N i piu' uguali possibile. L'ultimo termine e' dovuto alla energia di accoppiamento dei momenti angolari nucleari e la sua forma e' puramente fenomenologica. Come vedremo questo e' legato alla struttura a gusci dei nuclei. Nella figura 11.11 sono mostrati i diversi contributi all' energia di legame per nucleone in funzione di A .

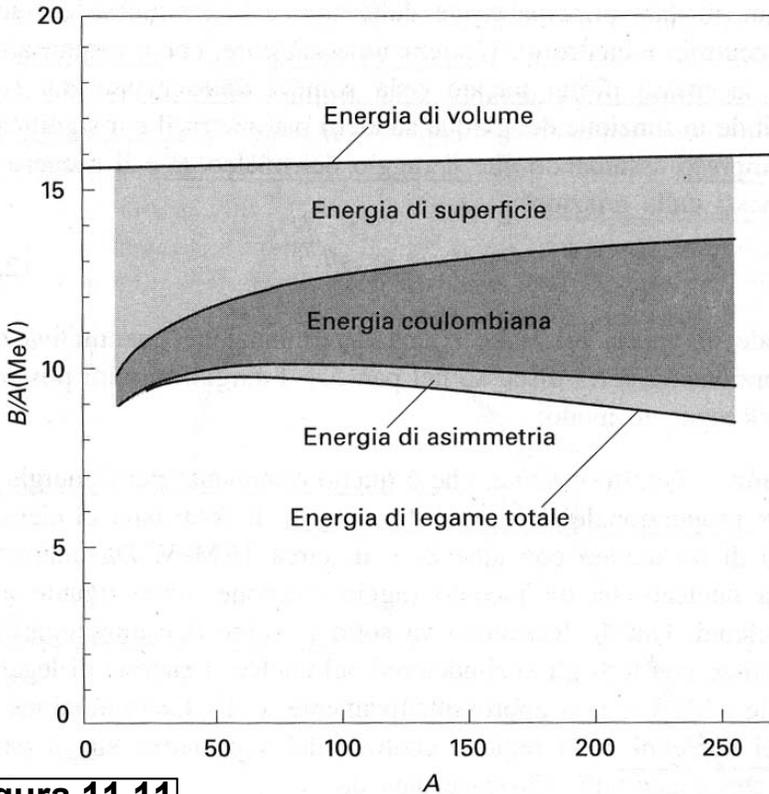


Figura 11.11

I diversi contributi all'energia di legame per nucleone espressi in funzione del numero di massa A . La linea orizzontale a ≈ 16 MeV rappresenta il contributo dell'energia di volume. A questo si sommano con segno negativo il termine di energia di superficie, quello di asimmetria e quello coulombiano risultando in un valore dell'energia di legame per nucleone di ≈ 8 MeV (linea più bassa). Il contributo dei termini di asimmetria e coulombiano aumentano rapidamente con A , mentre quello di superficie diminuisce.

La formula semi-empirica di massa, oltre a darci una descrizione e una comprensione dell'energia di legame dei nuclei, spiega il significato delle masse degli elementi chimici e fa capire perché in chimica ci sono solo un numero finito di atomi stabili.

11.8 La stabilità dei nuclei

I nuclidi presenti in natura vengono rappresentati nella “carta di Segre”, vedi figura 11.12, in funzione crescente di N e Z . I nuclei stabili si trovano solo lungo una fascia stretta attorno ai valori $N \approx Z \approx A/2$ per $A < 40$. Per valori di A più elevati i nuclei stabili presentano un numero di neutroni sempre più in eccesso su quello dei protoni per bilanciare con la loro forza nucleare attrattiva quella repulsiva dovuta alle cariche dei protoni. Tutti gli altri nuclidi sono instabili e decadono spontaneamente in vari modi. Per gli isobari con un eccesso di neutroni è energeticamente vantaggioso convertire un neutrone in un protone, mentre, nel caso di un eccesso di protoni e se energeticamente possibile, può avvenire la reazione inversa. Come vedremo di seguito, queste reazioni insieme alla cattura K sono chiamate decadimenti β e sono una particolare manifestazione della interazione debole trattata nel capitolo 8. Nel paragrafo seguente discutiamo il bilancio energetico dei decadimenti β .

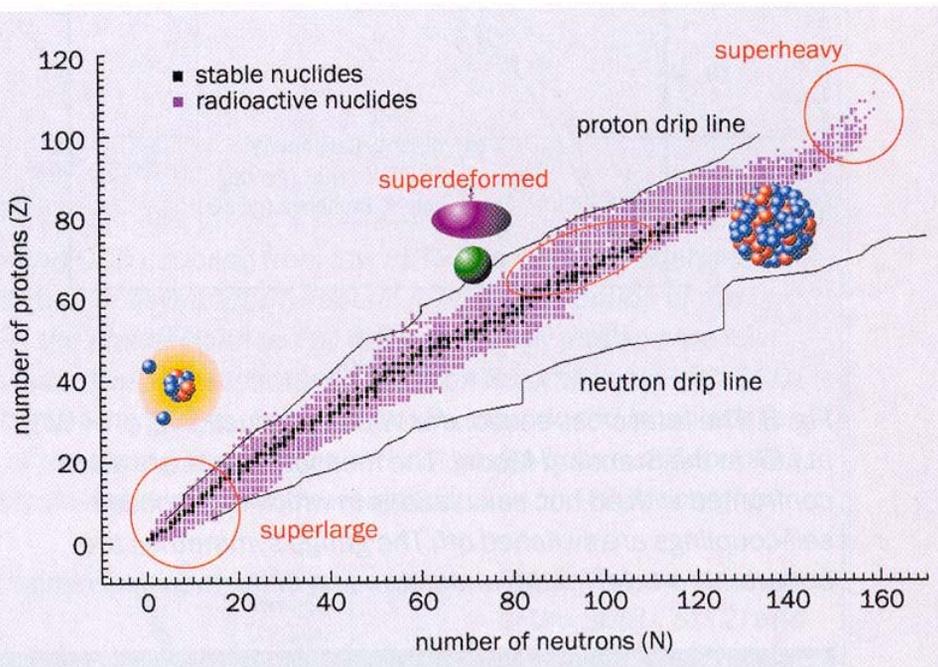


figura 11.12,

Fig. 1. The table of known stable and radioactive nuclides, showing the regions that are inhabited by the superheavy, superdeformed and superlarge nuclei, as well as the drip lines, which have been calculated using the Hartree–Fock–Bogoliubov plus Gogny method.

I nuclei di Fe e Ni posseggono la massima energia di legame per nucleone e sono, quindi, i nuclidi piu' stabili. Nei nuclei piu' pesanti, a causa della maggiore repulsione coulombiana, l' energia di legame per nucleone e' minore. I nuclei ancora piu' pesanti diventano instabili e decadono per **fissione** in due o piu' nuclei piu' leggeri, fissione spontanea.

I nuclidi stabili, 275 in totale, si trovano in una regione stretta nel piano N-Z che viene chiamata linea di stabilita'. La loro vita media e' considerevolmente piu' lunga dell'eta' del sistema solare. Quando nei processi di decadimento si produce un nucleo di elio, detto particella α , si parla di decadimenti α .

11.9 La valle di stabilita' β

Consideriamo dei nuclidi con uguale numero di massa A, isobari,. La formula empirica di Weizsacker puo' essere riscritta come

$$m(A, Z) = aZ^2 + bZ + c - a_p A^{-1/2}$$

dove

$$a = a_a / A + a_c A^{-1/3}$$

$$b = -a_a + m_p - m_n$$

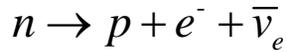
$$c = (m_n - a_v + a_a / 4) A + a_s A^{2/3}$$

La massa del nucleo, fissato A, risulta quindi funzione di Z^2 : per A dispari il grafico risulta essere una parabola; per A pari avremo, a causa del parametro $\delta \neq 0$, due parabole. Il minimo delle parabole si trova a $Z = \beta/2\gamma$. In uno spettro isobarico il nucleo con massa piu' piccola e' quindi stabile rispetto al decadimento β .

Decadimento β nei nuclei con A dispari

Prendiamo come esempio il caso dei nuclei con $A = 101$. Il minimo della parabola e' allora occupato dallo ^{101}Ru che ha $Z = 44$. Gli isobari con neutroni in eccesso, come ad esempio

$^{101}_{42}\text{Mo}$ e il $^{101}_{43}\text{Tc}$, decadono attraverso la conversione:



La carica del nucleo figlio supera di una unita' quella del nucleo genitore, vedi figura 11.13.

Nello stato finale vengono anche prodotti un elettrone e un antineutrino - e, vedi capitolo 8.

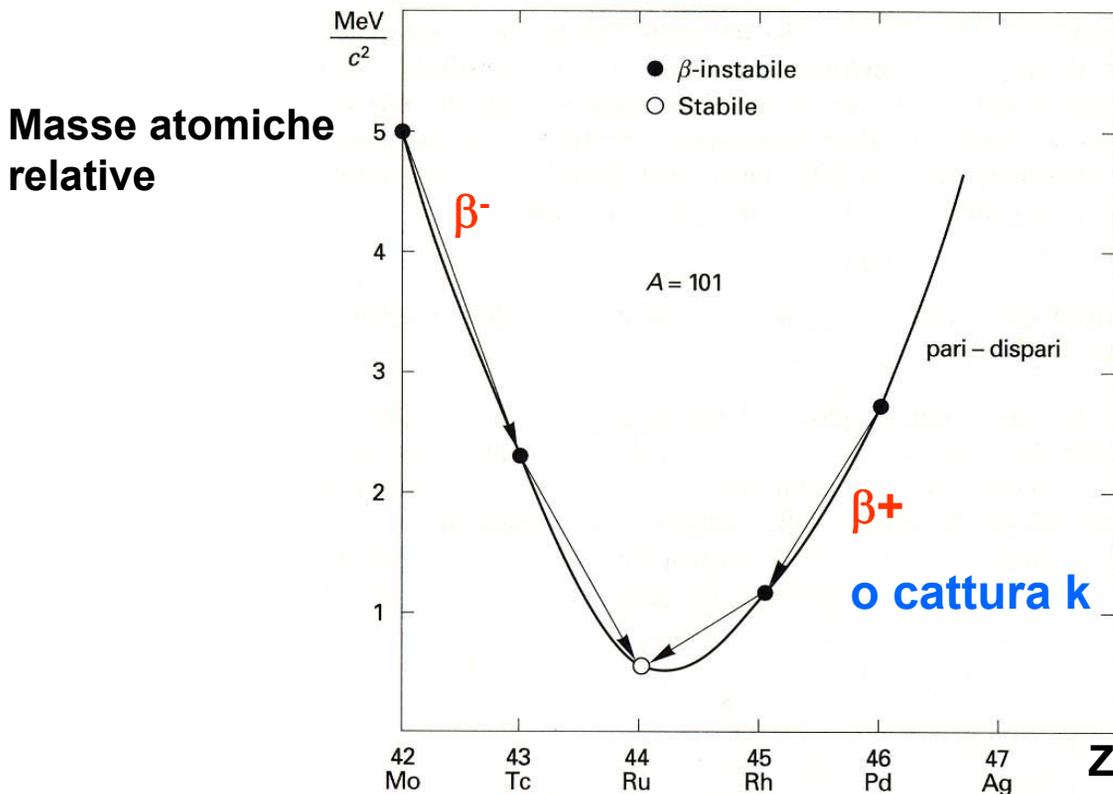
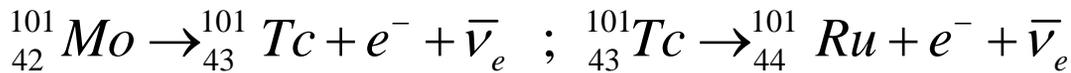


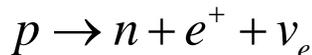
Figura 11.13: parabola di massa per $A = 101$. In ascissa e' riportato il numero atomico Z mentre l'origine sulla scala delle masse e' arbitraria. I decadimenti possibili sono indicati con le frecce.

Come già detto, questi processi, caratterizzati dall'emissione di elettroni, sono chiamati decadimenti β^- . La condizione energetica affinché questo sia possibile è data da:

$$M(A,Z) - M(A,Z+1) > 0.$$

Notiamo che viene considerata la massa dell'intero atomo per tener conto della massa a riposo dell'elettrone prodotto nella reazione. Il neutrino a tutti gli effetti si può ritenere di massa nulla.

Gli isobari aventi protoni in eccesso rispetto al $^{101}_{44}\text{Ru}$, decadono per conversione di un protone:



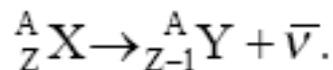
L'isobaro stabile $^{101}_{44}\text{Ru}$ viene alla fine prodotto mediante



Questi sono i cosiddetti decadimenti β^+ . Essendo la massa del neutrone libero maggiore di quella del protone, questo processo è possibile solo all'interno del nucleo. Questo tipo di decadimento è stato scoperto da Joliot-Curies nel 1934. Al contrario il neutrone può decadere anche fuori dal nucleo.

All'interno dell'atomo possiamo avere un altro processo di decadimento β^+ tramite la cattura di un elettrone atomico da parte del nucleo: **“cattura elettronica”**. L'elettrone atomico ha infatti una probabilità finita di trovarsi all'interno del nucleo e dar luogo al processo $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$

Abbiamo quindi decadimenti del tipo:



Questo tipo di disintegrazione è stato proposto da Wick, Bethe e Peierl nel 1934 e calcolato in dettaglio da Yukawa nel 1935. È stato osservato per la prima volta da Alvarez nel 1938.

Questa reazione avviene principalmente nei nuclei pesanti dove il raggio nucleare è sufficientemente grande e le orbite elettroniche piuttosto prossime al nucleo. In generale gli elettroni catturati appartengono al guscio più interno, shell “K”, il “buco” che si viene a creare dopo una cattura K scatena una cascata di elettroni dai livelli più esterni verso quelli più interni con una emissione di raggi X caratteristici degli atomi interessati. L'energia rilasciata in questa transizione può anche riapparire sotto forma di elettroni atomici:

“elettroni di Auger” dallo shell L. Questo processo è causato dalla interazione coulombiana tra gli elettroni atomici.

Dal punto di vista del nucleo la cattura elettronica e' analoga al decadimento β^+ . Per un isobaro instabile a causa di un eccesso di protoni questi due processi sono dunque in competizione.

In figura 11.14 sono riassunti i vari tipi di decadimento studiati.

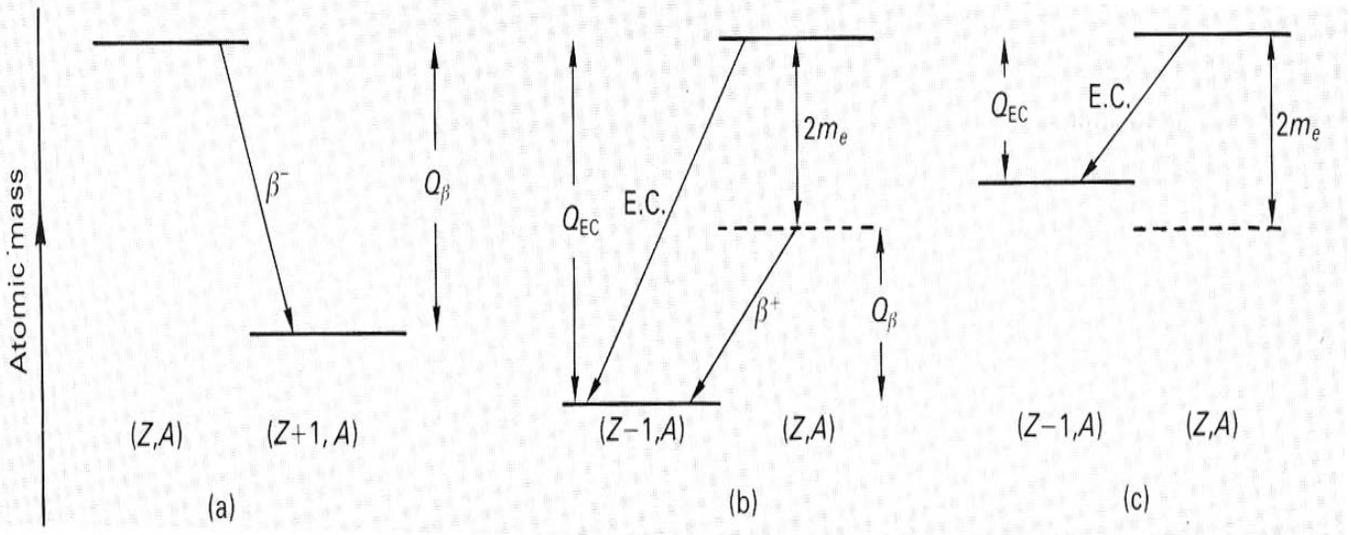


Figura 11.14

Riassumiamo ora le diverse condizioni energetiche che li rendono possibili:

a) e' possibile solo se: $M_{\text{nucleo}}(A, Z) > M_{\text{nucleo}}(A, Z+1) + m_e$ ($m_e \approx 0$)

se aggiungiamo a destra ed a sinistra Zm_e otteniamo:

$$M_{\text{atomo}}(A, Z) > M_{\text{atomo}}(A, Z+1)$$

dove abbiamo trascurato al solito l' energia di legame degli elettroni. Questa formula e' conveniente perche di solito il decadimento β avviene negli atomi.

b) e' possibile se: $M_{\text{nucleo}}(A, Z) > M_{\text{nucleo}}(A, Z-1) + m_e$

se di nuovo aggiungiamo Zm_e a destra ed a sinistra otteniamo:

$$M_{\text{atomo}}(A, Z) > M_{\text{atomo}}(A, Z-1) + 2m_e$$

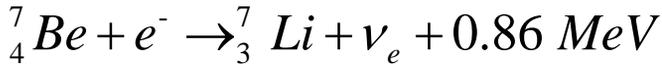
c) e' possibile (cattura elettronica) se: $M_{\text{nucleo}}(A, Z) + m_e > M_{\text{nucleo}}(A, Z-1)$

se aggiungiamo $m_e(Z-1)$ a destra ed a sinistra abbiamo:

$$M_{\text{atomo}}(A, Z) > M_{\text{atomo}}(A, Z-1)$$

L'energia cinetica disponibile nello stato finale nella cattura K e' piu' grande di quella del decadimento β^+ . Questo fa si che ci siano casi in cui la differenza di massa tra l'atomo iniziale e quello finale e' cosi' piccola che il decadimento β^+ e' proibito mentre la cattura K e' permessa.

Per esempio, ${}^7_4\text{Be}$ decade via cattura K



mentre non puo' decadere β^+ .

Ci aspettiamo che per ogni nucleo con valore di A dispari ci sia un solo valore di Z β -stabile e cosi' avviene in natura.

Decadimento β nei nuclei con A pari

I nuclei con numero di massa pari o hanno Z e N entrambi pari oppure entrambi dispari. Nella formula empirica di massa, i nuclei pari-pari hanno l'energia sistematicamente piu' bassa di $2\delta A^{-1/2}$ rispetto ai nuclei dispari-dispari. Questa quantita' varia da 5 MeV per $A = 20$, a 1.4 MeV per $A = 250$. Quindi per ogni valore di A pari avremo due parabole spostate di questa quantita' come e' mostrato dalla figura 11.15.

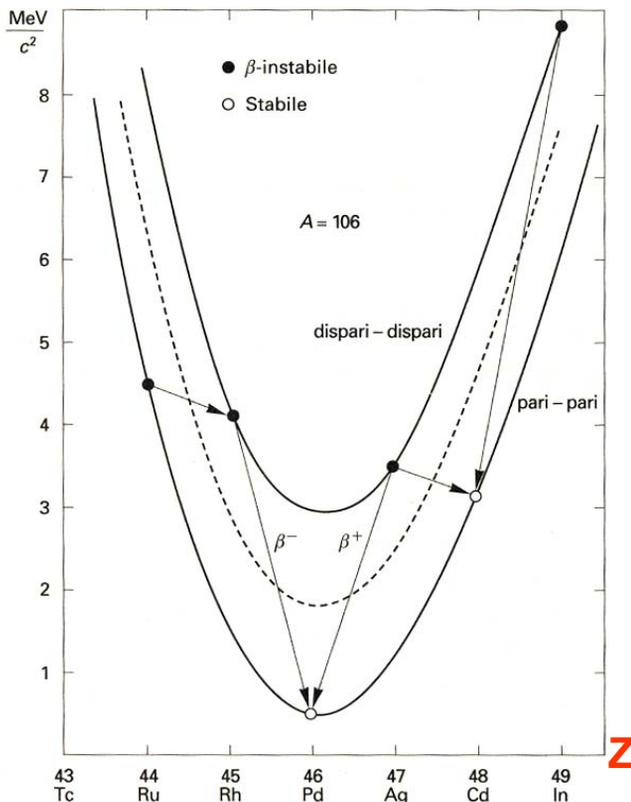


Figura 11.15

Per i nuclei con $A > 70$ si verifica spesso che ci sia piu' di un isobaro β -stabile, come e' illustrato nella figura per i nuclidi con $A = 106$.

La vita media τ dei nuclei soggetti a decadimento β varia fra pochi ms a 10^{16} anni. Come vedremo essa dipende fortemente dalla energia disponibile nello stato finale ($\tau \propto 1/E^5$) e dalle proprieta' specifiche dei nuclei che intervengono nei vari processi. Un neutrone libero decade β rilasciando 0.78 MeV e la sua vita media e' $\tau = 889.1 \pm 2.1$ s.

Un esempio ben noto di emettitore β a lunga vita media e' fornito dal nuclide ^{40}K , vedi figura 11.16. Il protone, piu' leggero del neutrone, e' una particella stabile, vedi capitolo 8.

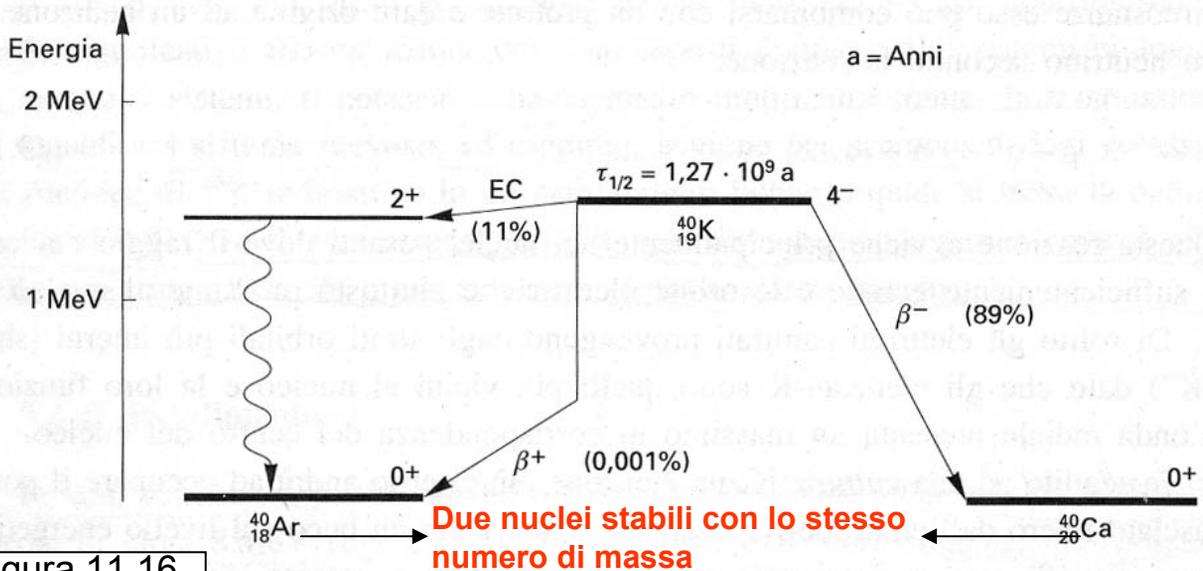


Figura 11.16

Il decadimento β del ^{40}K . In questo caso il decadimento β^- , quello β^+ e anche il processo di cattura elettronica (EC) si trovano a competere fra loro. La frequenza associata ad ognuno di questi processi è indicata fra parentesi. La freccia piegata nel decadimento β^+ indica che la produzione di un e^+ e la presenza di un elettrone in più nell'atomo di ^{40}Ar richiedono 1.022 MeV, mentre il resto dell'energia disponibile lo si ritrova sotto forma di energia cinetica del positrone e del neutrino. Lo stato eccitato dello ^{40}Ar prodotto nella cattura elettronica, decade allo stato fondamentale con emissione di un fotone.

11.10 Il bilancio energetico nei processi di decadimenti α e di fissione

L'andamento leggermente decrescente dell'energia di legame, dopo il valore massimo, all'aumentare di A , rende possibili altri modi di decadimento per nuclei pesanti β -stabili. A causa di questa decrescita, puo' diventare energeticamente conveniente che un nucleo pesante si spezzi in due nuclei piu' leggeri che insieme abbiano una energia di legame netta piu' grande di quella del nucleo padre. Tra questi il processo piu' comune e' quello della emissione di una particella α . Nella tabella 11.3 si vede che il nucleo di elio ha una energia di legame di 28.3 MeV. Così la condizione per un nucleo (A,Z) di dare un nucleo $(A-4,Z-2)$ e':

$$B(A,Z) < B(A-4,Z-2) + 28.3 \text{ MeV}$$

Per i nuclei β -stabili questa condizione e' sempre soddisfatta per $A \geq 165$ e tutti questi nuclei possono emettere particelle α . Tuttavia vedremo nel seguito del capitolo che i tempi di decadimento sono così lenti che i nuclei β -stabili possono anche essere considerati α -stabili fino a $^{209}_{83}\text{Bi}$. Al di sopra di questo valore solo gli isotopi di Th a U hanno vite medie sufficientemente lunghe da essere sopravvissuti sulla terra dai tempi della sua formazione; altri elementi pesanti non stabili sono prodotti o dai decadimenti di questi o artificialmente. Un altro processo energeticamente favorevole, possibile quando A e' grande, e' il decadimento in due nuclei piu' leggeri di massa quasi uguale. Questo processo e' chiamato "**fissione**".

Al di sopra dei nuclei del gruppo degli Actinidi i processi di decadimento α e di fissione mettono la parola fine alla tabella periodica degli elementi.

11.11 Il Modello a gas di Fermi

Il modello a goccia spiega solo i termini di volume e di superficie della formula empirica di massa. Il nucleo e' pero' un sistema quantistico di dimensione finita, spesso dotato di momento angolare e di momento magnetico, e deve essere quindi descritto con le leggi della meccanica quantistica.

Il modello a gas di Fermi rappresenta uno dei primi tentativi di incorporare la meccanica quantistica nella descrizione delle proprieta' del nucleo. In questo modello, l'interazione di un nucleone con gli altri e' rappresentato da un potenziale attrattivo costante ma limitato nel volume del nucleo. Per cui i protoni e i neutroni sono liberi ma confinati in una buca di potenziale sferica. Sotto queste condizioni, secondo la meccanica quantistica, i nucleoni occuperebbero degli stati di energia discreta. Poiche' i protoni sono carichi, subiscono un potenziale diverso da quello dei neutroni. Essendo i protoni e i neutroni dei fermioni, ogni stato di energia puo' essere occupato solo da due nucleoni identici come e' mostrato nella figura 11.17. Pensiamo che la buca dei neutroni e' piu' profonda di quella dei protoni a causa della repulsione coulombiana subita dai protoni. Inoltre, per un nucleo stabile, i livelli energetici dei protoni e dei neutroni devono essere uguali altrimenti per i nuclei pesanti con un numero maggiore di neutroni che di protoni avremmo decadimenti β rompendo la condizione di stabilita'. Questo e' confortato dalla osservazione sperimentale che l'energia di legame dell'ultimo nucleone e' indipendente dalla sua carica. La distanza media tra i nucleoni e' molto maggiore del raggio del nocciolo duro del nucleo. Il nucleone si muove all'interno del nucleo come una particella libera all'interno di una buca di potenziale, la cui profondita' e' indipendente dal nucleo in esame e il cui raggio di azione e' pari al raggio nucleare.

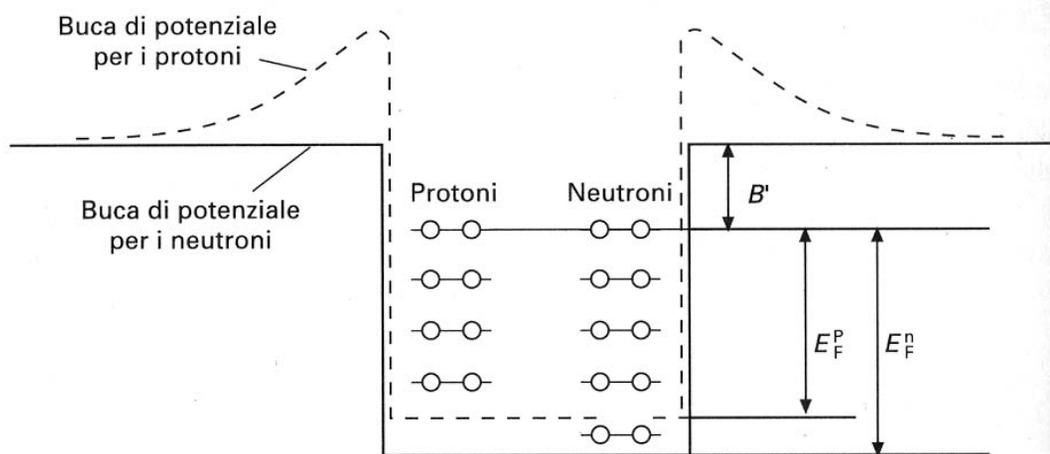


Figura 17.1

Diagramma dei potenziali e degli stati di protoni e neutroni nell'ambito del modello a gas di Fermi.

Figura 11.17

In questo paragrafo dimostriamo che il modello a gas di Fermi riproduce la distribuzione in impulso dei nucleoni, così come risulta dallo studio della diffusione quasi-elastica di elettroni su nuclei. Inoltre nell'ambito di questo modello, trovano una giustificazione sia il termine di volume che quello di asimmetria della formula semiempirica di massa.

Si assume che i nucleoni, nei limiti imposti dal principio di esclusione di Pauli, si possano muovere liberamente all'interno del volume nucleare.

Secondo la meccanica quantistica il numero di stati accessibili per un nucleone all'interno di un volume V e in un intervallo di impulsi dp è dato da:

$$dn = \frac{4\pi \times p^2 dp V}{(2\pi\hbar)^3};$$

Quando il nucleo è nel suo stato fondamentale tutti i livelli più bassi saranno occupati fino ad un certo impulso massimo che prende il nome di **impulso di Fermi**, p_F . Integrando abbiamo:

$$n = \int_0^{p_F} dn = \frac{V \times p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3};$$

Dato che ogni livello può contenere al più due fermioni della stessa specie, avremo:

$$N = \frac{V(p_F^n)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad Z = \frac{V(p_F^p)^3}{3\pi^2 \hbar^3}$$

per il numero di neutroni e protoni rispettivamente e dove p_F^n e p_F^p sono gli impulsi di Fermi per i neutroni e i protoni. Consideriamo per semplicità nuclei con $Z=N=A/2$ e assumiamo che le buche di potenziale per neutroni e protoni abbiano lo stesso raggio. Dato un volume V possiamo scrivere, ricordando il valore di R_0 che si ottiene da esperimenti di diffusione di elettroni,

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (R_0 A^{1/3})^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 A, \quad R_0 = 1.21 \text{ fm}$$

Otteniamo quindi un impulso di Fermi dato da:

$$p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \approx 250 \text{ MeV}/c$$

I nucleoni si possono dunque muovere all'interno del nucleo con un impulso elevato. Misure dell'impulso di Fermi in esperimenti di diffusione quasi-elastica di elettroni su nuclei danno valori in buon accordo con questa predizione. Tuttavia per nuclei piu' leggeri si ottengono per p_F valori piu' piccoli ed il modello non e' quindi adeguato.

L'energia del piu' alto livello occupato, **energia di Fermi** E_F , e' data da

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} \approx 33 \text{ MeV}$$

Dove m , massa del nucleone, e' circa uguale ad $1 \text{ GeV}/c^2$.

La differenza B' fra la sommita' della buca e il livello di Fermi e' costante per la maggior parte dei nuclei e corrisponde all'energia di legame media per nucleone $B/A \approx 7-8 \text{ MeV}$. La profondita' della buca di potenziale e l'energia di Fermi sono indipendenti dal numero di massa A :

$$V_0 = E_F + B' \approx 40 \text{ MeV}$$

e riproducono quindi la proprieta' di saturazione delle forze nucleari.

11.12 I Numeri Magici e il Modello a Shell

La formula empirica di massa non riproduce l'andamento sperimentale delle energie di legame di alcuni nuclei: quelli caratterizzati dai Numeri Magici. Queste deviazioni sono dovute alla natura quantistica del nucleo. Nel caso atomico gli elettroni sono organizzati in "shell" o strati: vedi figura 11.18. Le discontinuita' nelle energie di eccitazione e separazione dei singoli nucleoni ricordano una analoga situazione incontrata in chimica: nei gas nobili, che hanno tutte le shell completamente occupate, tutti gli elettroni sono molto legati, mentre per i metalli alcalini, atomi con un solo elettrone nello shell piu' esterno, le energie di separazione (eccitazione) sono molto piccole: vedi figura 11.19.



Figura 11.18: Shell atomici

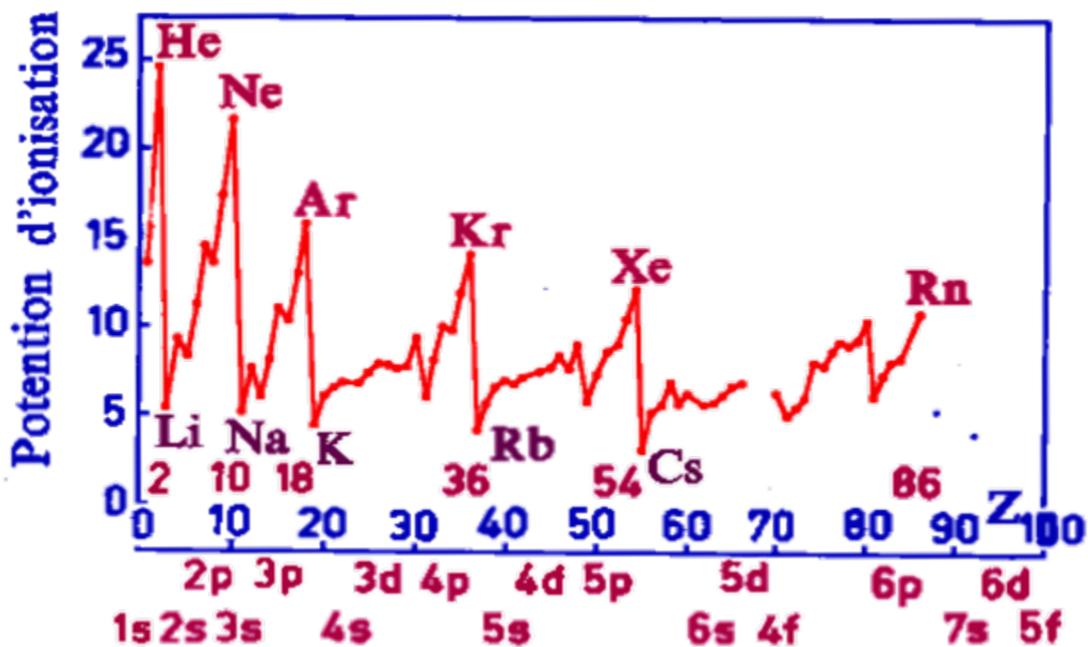


Figura 11.19: proprietà periodiche degli atomi.

Abbiamo già ricordato come fatto sperimentalmente accertato, che certi nuclei con un determinato numero di protoni e/o neutroni sono particolarmente stabili. Questi numeri (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126) sono noti come **Numeri Magici**. Se un nucleo possiede un numero magico di neutroni, e' necessario fornire molta energia per estrarre un neutrone da esso; viceversa, se si aumenta di una unita' il numero di neutroni, l'energia di separazione diventa molto piu' piccola, vedi figura 11.20: si notano delle regolarita' veramente impressionanti. Lo stesso avviene nel caso dei protoni. I nuclei Doppiaemente Magici, ovvero quelli con un numero magico di protoni e un numero magico di neutroni, sono eccezionalmente stabili. A questo gruppo appartengono i seguenti nuclidi:

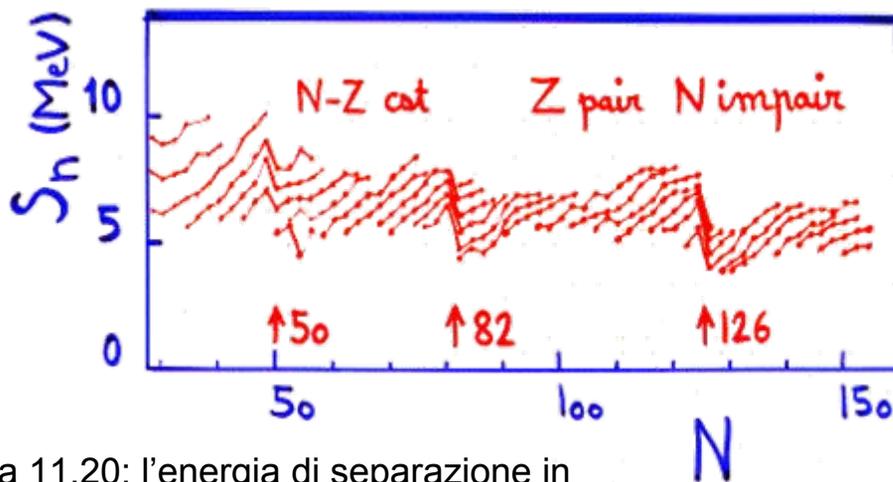
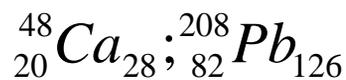
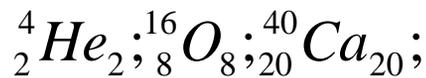


Figura 11.20: l'energia di separazione in funzione di N

L'esistenza dei numeri magici puo' essere spiegata nell'ambito del "modello a shell" che rappresenta un'evoluzione del modello a gas di Fermi. In questo modello, ciascun neutrone indipendentemente in una buca di potenziale comune e cioe' in un campo di potenziale medio dovuto a tutti gli altri nucleoni, e ciascun protone si muove indipendentemente in una buca di potenziale comune che e' la media del potenziale nucleare da tutti gli altri nucleoni, insieme con il poenziale coulombiano dovuto ai protoni. Ne risulta uno spettro energetico discreto i cui livelli sono occupati secondo i dettami del principio di Pauli: vedi figura 11.21. In questo modello, una volta introdotti gli effetti dell'accoppiamento spin-orbita, vengono anche ben riprodotti i sottolivelli energetici di un dato shell di energia che sono dovuti agli spin nucleari. In figura 11.22 e' mostrato un esempio dei livelli energetici calcolati con un potenziale nucleare che e' formato dalla somma di un termine centrale e uno proporzionale al prodotto scalare del momento angolare nucleare con lo spin nucleare.

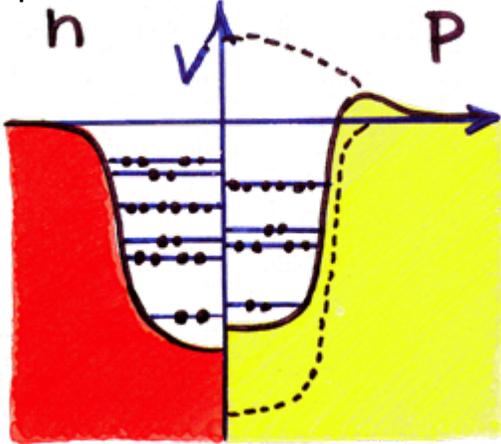


Figura 11.21:
Shell Nucleari
dove i nucleoni
si auto-
organizzano nei
nuclei.

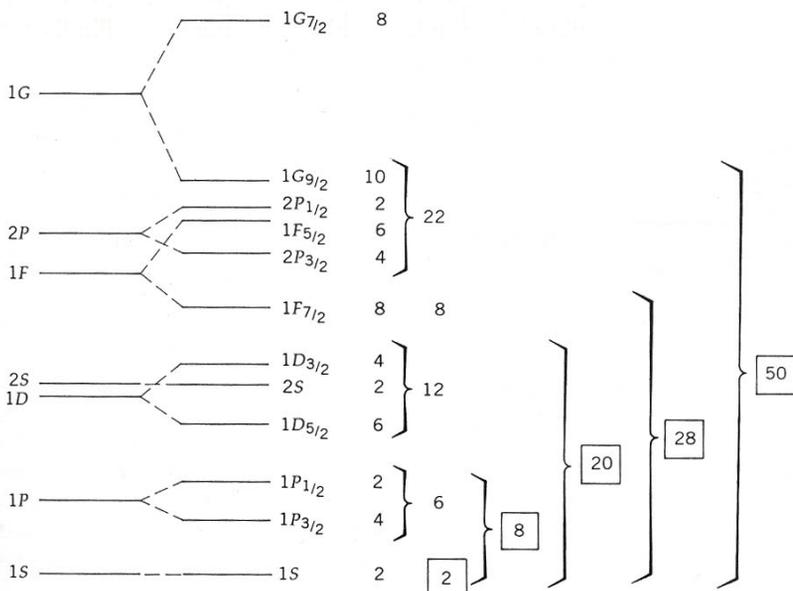


Figura 11.22

Figure 3.4 Energy levels in a single-particle shell model. The boxed integers correspond to the magic nuclear numbers.

11.13 IL DECADIMENTO α

Nel 1898 Rutherford scoprì che la radiazione dell'Uranio ha due componenti e chiamò α la componente poco penetrante.

Ci sono poi voluti 10 anni perché Rutherford potesse concludere che i raggi α sono dei nuclei doppiamente ionizzanti di elio:

i) nel 1903 misurò il rapporto q/m dalla deviazione delle traiettorie in presenza di campo magnetico e campo elettrico, ottenendo un valore pari a $2/3$ di quello del protone.

ii) nel 1909 osservò, in un volume sotto vuoto in cui dei nuclei decadevano emettendo particelle α , lo spettro caratteristico dell'elio.

La sorgente di α più conosciuta è il radio, scoperta da M. Curie, e utilizzata da Rutherford nella sua famosa esperienza di diffusione, vedi figura 11.23. La transizione di decadimento α è dunque

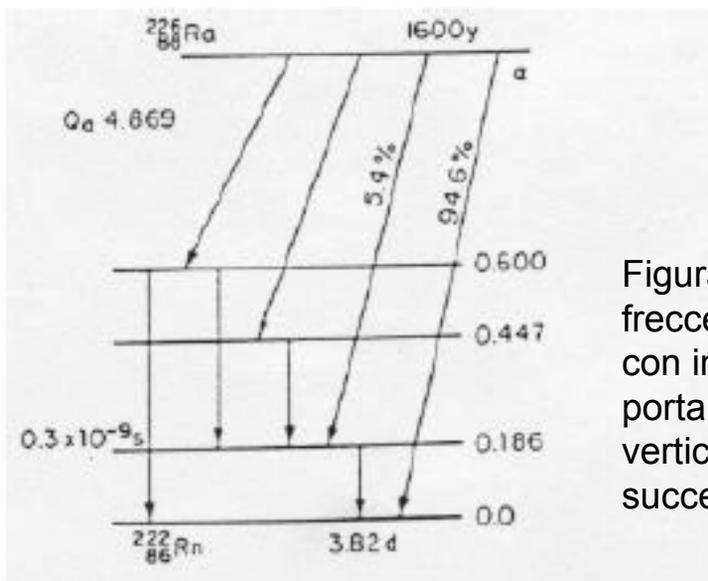
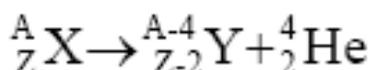


Figura 11.23: il decadimento α di ${}^{226}\text{Ra}$. Le frecce oblique rappresentano emissioni α , con indicati i rapporti di diramazione, che portano agli stati eccitati di ${}^{222}\text{Rn}$. Le frecce verticali rappresentano decadimenti gamma successivi.

Si tratta di un decadimento a due corpi e quindi le particelle α emesse sono monocromatiche. Tuttavia, con la eventuale presenza di nuclei figli eccitati, possiamo avere anche spettri di struttura "fine" come mostrato in figura 11.24. Spesso la linea più energetica è anche la più intensa. Sperimentalmente si osserva che le particelle α meno energetiche sono accompagnate da emissione di fotoni dovuti alla diseccitazione verso lo stato fondamentale del nucleo figlio. Le energie di questi fotoni sono una conferma sperimentale della esistenza di gusci dentro il nucleo

Abbiamo visto che il nucleo di elio ha una energia di legame di circa 28.3 MeV. Quindi affinche sia possibile che un nucleo (A,Z) decada α dando un nucleo (A-4;Z-2) deve valere la condizione :

$$M(A;Z)+EL(A;Z) > M(A-4;Z-2)+EL(A-4;Z-2)+M_{\alpha}+B_{\alpha} \quad \text{da cui}$$

$$M(A;Z)- M(A-4;Z-2)- M_{\alpha} > EL(A-4;Z-2)+28.3- EL(A;Z) >0 \quad \text{da cui}$$

$$EL(A;Z) < EL(A-4;Z-2)+28.3 \quad (\text{ vedi Fig. 11.YY) ???}$$

Per i nuclei β stabili fino ad $A \geq 165$ questa condizione e' sempre soddisfatta ma con una vita media cosi' grande ($\tau \gg$ della eta' della terra $\approx 10^9$ anni) che fino al bismuto, $^{209}_{83}\text{Bi}$, i nuclei possono essere considerati β ed α stabili. In figura 11.24 e' mostrato il Q-value teorico e sperimentale dei decadimenti α in funzione del numero atomico Z del nucleo genitore, dove

$$Q_{\alpha} = E_L(A-4,Z-2) + 29.3(\text{MeV}) - E_L(A,Z)$$

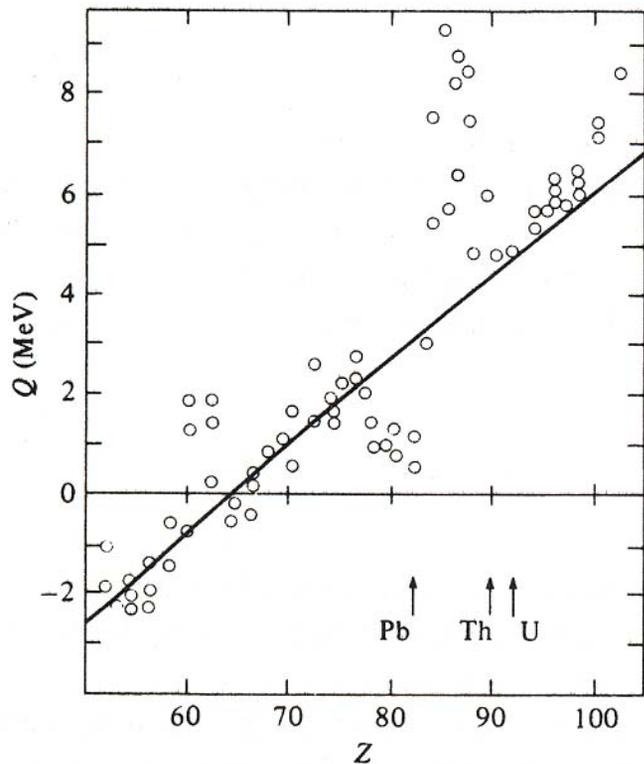


Figura 11.24



Q_α , l'energia rilasciata nel decadimento, e' suddivisa tra la particella α (energia cinetica) e il nucleo figlio (energia cinetica E_γ ed energia di eccitazione). Se il nucleo figlio e' nel suo stato fondamentale, $Q_\alpha = E_\alpha + E_\gamma$.

Il processo e' RARO a causa della barriera coulombiana repulsiva che circonda il nucleo. Per nuclei leggeri il Q-value della reazione e' cosi' basso da inibire il processo stesso.

La particella α ha un Q-value positivo. Lo stesso NON avviene per l'emissione di singoli nucleoni od altri nuclei leggeri per i quali il decadimento non e' energeticamente possibile.

Riportiamo nella tabella 11.5 il Q-value per il decadimento del ($^{238}_{94}\text{Pu}$) in alcuni nuclei leggeri:

Nucleo	Q-value (MeV)
p	-6.0
^2H	-10.3
^3H	-9.7
^4He	+5.6
^6Li	-3.8

Tabella 11.5

La ragione fondamentale per cui i decadimenti α sono favoriti rispetto a sistemi formati da due o tre nucleoni sta nel valore molto elevato di $E_L(\text{He})$. La probabilita' di preformare nei nuclei sistemi stabili con piu' di quattro nucleoni e' molto piu' piccola.

Q_α , l'energia rilasciata nel decadimento, e' suddivisa tra la particella α (energia cinetica) e il nucleo figlio (energia cinetica E_γ ed energia di eccitazione). Se il nucleo figlio e' nel suo stato fondamentale, $Q_\alpha = E_\alpha + E_\gamma$.

La cinematica del decadimento α , nel riferimento del nucleo madre, si scrive:

$$M_X c^2 = M_Y c^2 + M_\alpha c^2 + T_Y + T_\alpha \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_Y + \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{0}$$

$$(M_X - M_Y - M_\alpha) c^2 = Q =$$

$$= p^2/(2M_Y) + p^2/(2M_\alpha) = p^2/(2M_\alpha) [1 + M_\alpha/M_Y]$$

$$\text{per } M_Y \gg M_\alpha \rightarrow Q \cong p^2/(2M_\alpha)$$

$$T_\alpha = \frac{Q}{1 + \frac{M_\alpha}{M_Y}} \cong Q \left(1 - \frac{4}{A}\right) ; \quad T_Y = Q \frac{\frac{M_\alpha}{M_Y}}{1 + \frac{M_\alpha}{M_Y}} \cong Q \times \frac{4}{A} \rightarrow T_\alpha \gg T_Y$$

Questa e' valida per $A > 140$. La ragione fondamentale per cui i decadimenti α sono favoriti rispetto a sistemi formati da due o tre nucleoni sta nel valore molto elevato di $E_L(\text{He})$. La probabilita' di preformare nei nuclei sistemi stabili con piu' di quattro nucleoni e' molto piu' piccola.

In generale si ha: $4 \text{ MeV} < E_\alpha < 8 \text{ MeV}$. La vita media ha una fortissima dipendenza da E_α , vedi figura 11.25 e, nell' intervallo citato, varia di 20 ordini di grandezza secondo **la legge di Geiger-Nuttal:**

$$\ln \tau = a - b \ln E_\alpha$$

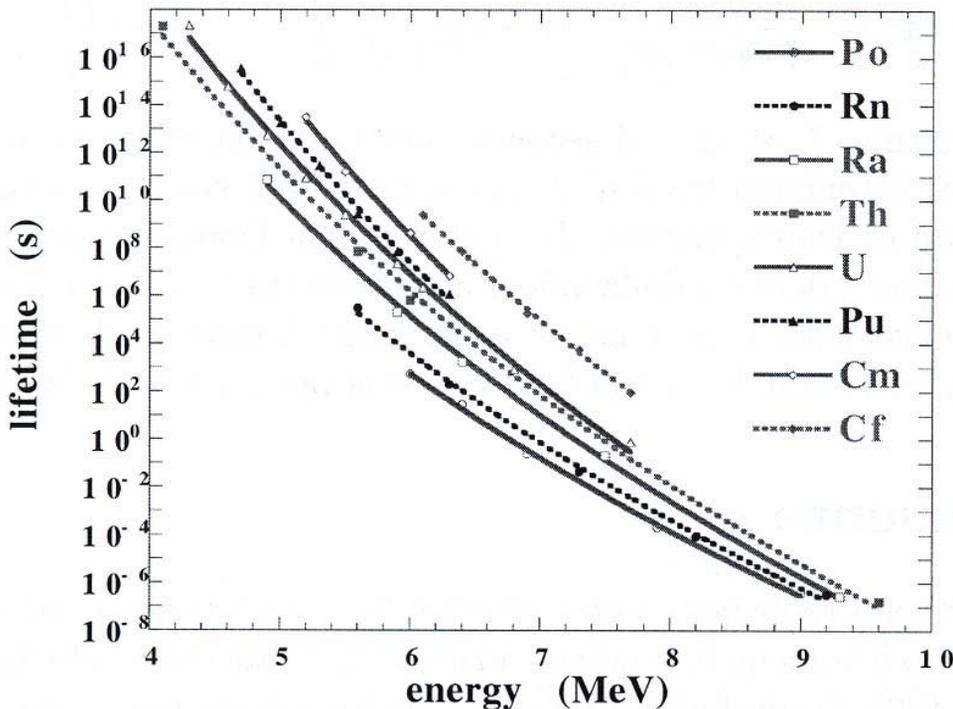


Figura 11.25

11.14 La barriera coulombiana e la teoria di Gamow

La particella α ha carica +2. Prima di uscire dal nucleo deve quindi vincere l'attrazione coulombiana degli altri protoni e la condizione che l'energia cinetica sia positiva, almeno in fisica classica, non e' dunque sufficiente.

In effetti negli anni 20 si presentava il seguente paradosso: da una parte delle particelle α di 7.68 MeV, dal decadimento ^{214}Po , venivano diffuse da nuclei di ^{238}U secondo la legge di Rutherford senza alcun assorbimento(cattura da parte del nucleo di ^{238}U): la barriera coulombiana deve quindi essere piu' alta di 7.68 MeV; dall'altra si aveva emissione di particelle α da parte di nuclei ^{238}U di soli 4.2 MeV che superavano quindi la barriera coulombiana, vedi figura 11.26. Gamov, Gourney e Condon nel 1928 spiegarono il paradosso con il fenomeno ***l'effetto tunnel*** che fu il primo successo di applicazione della meccanica quantistica. L'effetto tunnel spiega anche l'osservazione sperimentale, appena sottolineata, che la vita media del nucleo madre e' fortemente legata all'energia E_α : le sorgenti α piu' energetiche hanno una vita media piu' corta.

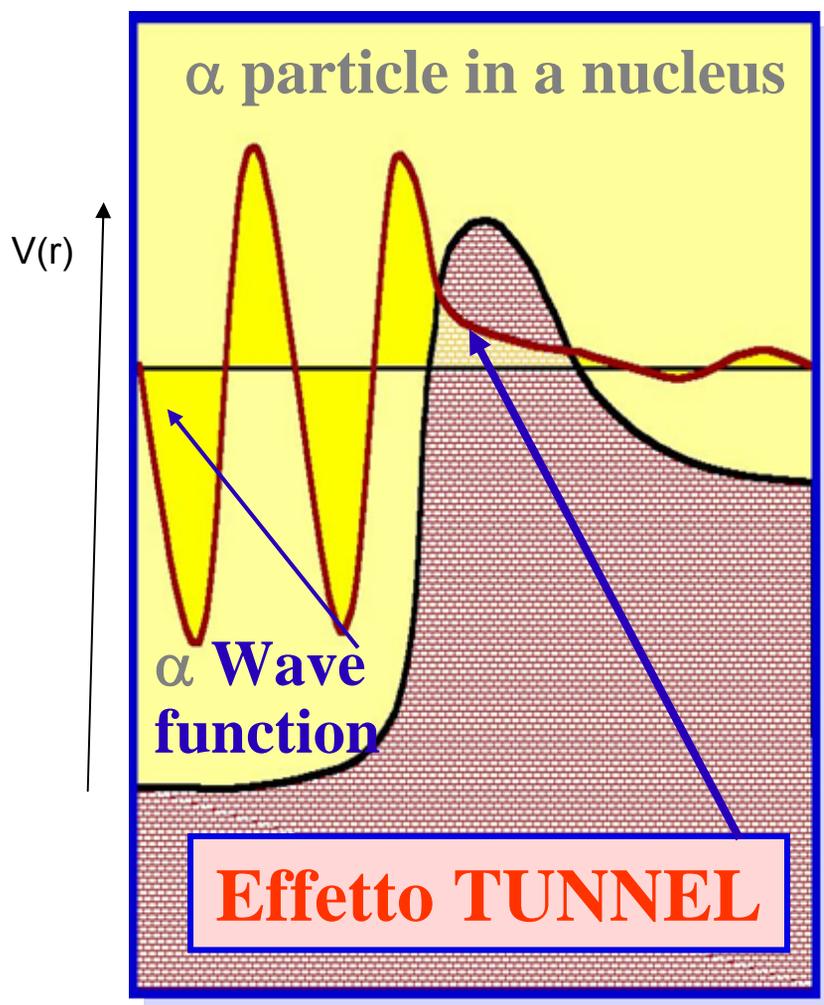


Figura 11.26: dove $V(r)$ e' il potenziale del sistema $Y(A-4;Z-2)$. Tipicamente: $V_0 \cong -40$ MeV, $R \cong 7-8$ fm.

Nella teoria di Gamov se indichiamo con λ la probabilita' per unita' di tempo che una particella α fuoriesca dal nucleo, la possiamo scrivere come:

$$\lambda = w(\alpha) \times f \times T$$

dove:

$w(\alpha)$ e' la probabilita' di trovare una particella α preformata nel nucleo;

f e' la frequenza con cui la particella α tenta di penetrare la barriera:

$f \approx v_0/2R$, dove v_0 e' la velocita' della particella α nel nucleo e $2R$ il suo diametro;

T e' la probabilita' di trasmissione per effetto tunnel.

La teoria di Gamow calcola T a partire dalla equazione di Schrodinger [referenza].

Si ottiene:

$T = e^{-2 \times G}$ dove G e' il fattore di Gamov ed e' uguale a:

$$G = \frac{1}{\hbar} \int_R^{r_1} \sqrt{2m(E - V)} dr \cong \frac{2\pi(Z - 2)\alpha}{\beta}$$

$$G \propto \frac{Z}{\beta} \propto \frac{Z}{\sqrt{E}}$$

Dove $\beta = v/c$ e' la velocita' della particella α uscente. L'ampio intervallo dei valori di vita media e' spiegabile con il fattore di Gamow nell'esponenziale: piccole differenze di energia della particella si traducono in grandi effetti sulla vita media.

11.15 Momenti magnetici anomali

Riassumiamo di seguito I principali risultati sui momenti magnetici dei nuclei:

◆ Il magnetismo nucleare e' generato dai momenti magnetici intrinseci dei singoli nucleoni e dai momenti magnetici associati ai loro moti orbitali.

◆ Il momento magnetico di una particella carica di spin $\frac{1}{2}$ che NON possiede una struttura interna (Particella di Dirac) e' dato da

$$\mu = g \times \frac{e}{2M} \times \frac{\hbar}{2}$$

dove M e' la massa della particella ed il fattore g deriva dalla equazione relativistica di Dirac.

Per particelle di Dirac cariche il fattore g deve essere esattamente uguale a 2 mentre per quelle neutre deve essere uguale a 0. Sperimentalmente, a parte correzioni di ordine superiore, per gli elettroni e i muoni si trova $g=2$.

Per I protoni e I neutroni si trova:

$$\mu_p = + (2.7928456 \pm 0.0000011) \mu_N$$

$$\mu_n = + (1.9130418 \pm 0.0000088) \mu_N \quad \text{dove} \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p} \left(\frac{MeV}{T} \right)$$

◆ I nucleoni NON sono quindi particelle di Dirac. Come vedremo sono "composti" da quark ed i loro fattori g sono determinati dalla loro struttura INTERNA.

◆ I valori dello spin e dei momenti elettrici e magnetici dei nuclei sono determinati dai "nucleoni di valenza".

◆ In particolare tutti i nuclei con Z ed N pari hanno spin e momento magnetico nullo.