Appendice: Limite di Unitarieta’

Corso di Fisica Nucleare e Subnucleare II

Professor Carlo Dionisi

A.A. 2005-2006

Diffusione da Potenziale

- I calcoli di sezioni d’ urto fino ad ora trattati riguardano processi di interazione elettromagnetica. Il buon accordo verificato tra risultati sperimentali e previsioni teoriche del modello e’ basato su:

i) Il potenziale e’ derivato da una teoria ben verificata;

ii) Il modello e’ basato su solide leggi di simmetria;

iii) La costante adimensionale α caratteristica dell’ interazione elettromagnetica e’ << 1.

- La trattazione delle interazioni nucleari e’ notevolmente piu’ complessa perche’:

i) Non c’e’ analogo classico;

ii) La hamiltoniana di interazione e’ sconosciuta;

iii) La costante di interazione e’ molto piu’ grande di quella elettromagnetica ed I metodi perturbativi non danno risultati affidabili.

Gran parte dell’ informazione sperimentale e’ basata sullo studio di reazioni nucleari e di diffusione di particelle da nuclei.
E’ quindi cruciale lo studio di questi processi

Diffusione da potenziale radiale

Prendiamo in considerazione la diffusione di una particella di massa m1 dalla particella bersaglio di massa m2 nel sistema del centro di massa. Facciamo inoltre le seguenti ipotesi aggiuntive sul potenziale $U(\vec{r})$:

- il potenziale $U(\vec{r})$ si annulla per $r \to \infty$ con un andamento almeno $\sim 1/r$;
- se $\mathcal{R}$ è la dimensione del sistema in studio, le osservazioni sono fatte a distanza $r \gg \mathcal{R}$;
- il potenziale è a simmetria sferica, $U(\vec{r}) = U(r)$.

Al tempo $t = -\infty$ e a distanza $r \gg \mathcal{R}$, $U(r) \to 0$. L'equazione diventa

$$\nabla^2 u(\vec{r}) + k^2\, u(\vec{r}) = 0 \qquad\qquad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Lo stato iniziale è lo stato di particella libera con impulso $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ (nel sistema del centro di massa) che assumiamo parallelo all'asse z

$$u_i(\vec{r}) = \frac{1}{V^{1/2}}\, e^{ikz}$$

Al tempo $t = +\infty$ e a distanza $r \gg \mathcal{R}$, ipotizziamo una soluzione del tipo

$$u_f(\vec{r}) = \frac{1}{V^{1/2}} \left[e^{ikz} + f(\theta,\phi)\, \frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

Sovrapposizione di una onda piana e di una onda sferica dove **$f(\vartheta,\varphi)$ e' detta ampiezza di diffusione**.
Per ottenere la sezione d' urto calcoliamo **il flusso incidente Φ_i** ed

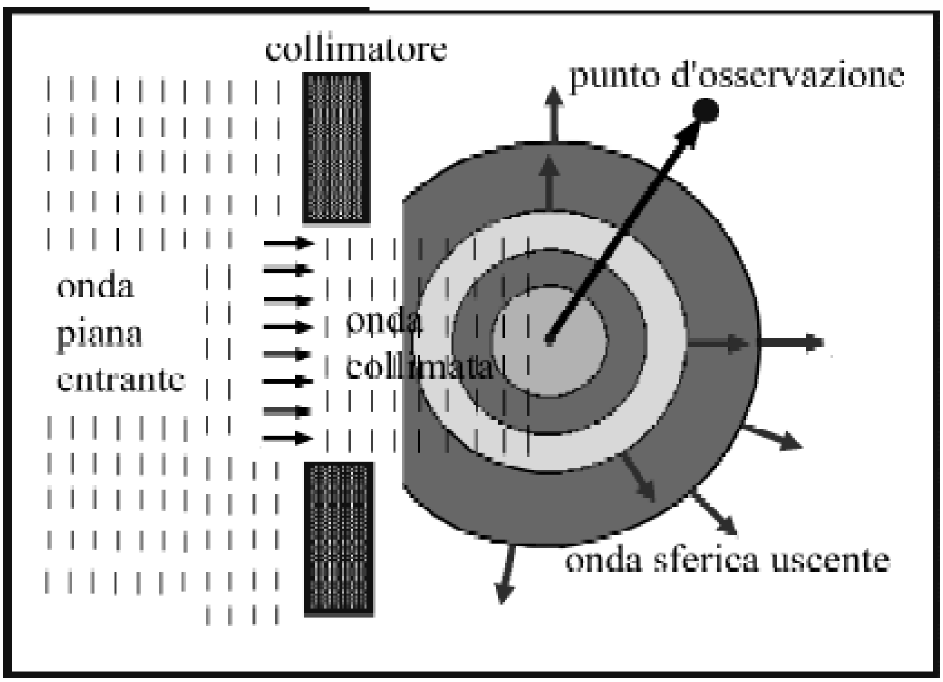
il flusso diffuso Φ_d dal potenziale:

$$\Phi_i = \frac{\hbar}{2im}\, \left(u_i^* \nabla u_i - u_i \nabla u_i^*\right) = \frac{\hbar k}{Vm}$$

$$\Phi_d = \frac{\hbar}{2imV} \, |f(\theta,\phi)|^2 \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \, \frac{1}{r} \, \frac{\partial}{\partial r} \, r \, \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \, \frac{1}{r} \, \frac{\partial}{\partial r} \, r \, \frac{e^{-ikr}}{r} \right]$$

$$\Phi_d = \frac{1}{r^2} \, \frac{\hbar k}{Vm} \, |f(\theta,\phi)|^2$$

$$\dot{n}_d(\Omega) = \dot{\Phi}_d \, r^2 \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\dot{n}_d(\Omega)}{\Phi_i} = |f(\theta,\phi)|^2$$



Se il potenziale e' noto, la soluzione si ottiene dalla
Approssimazione di Born :

$$f(\theta,\phi) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \, U(r) \, d\vec{r} \qquad \vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$$

Sviluppo in onde parziali

Se il potenziale $U(r)$ non è noto, possiamo comunque cercare le caratteristiche dell'ampiezza di diffusione sulla base delle ipotesi che il potenziale sia a simmetria centrale e che si annulli per $r \to \infty$. Nel sistema del centro di massa possiamo sviluppare la soluzione dell'equazione del moto, l'onda piana incidente e l'onda diffusa, in autofunzioni del momento angolare facendo una ipotesi aggiuntiva che

- lo stato iniziale e finale abbiano simmetria azimutale, cioè non dipendano dall'angolo ϕ

Con queste ipotesi, lo stato iniziale e finale si possono sviluppare in autofunzioni del momento angolare $\vec{l}, l_z$, con $l_z = 0$

$$Y_{l0}(\theta) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} P_l(\cos\theta)$$

dove $P_l(\cos\theta)$ sono i polinomi di Legendre. Per lo stato iniziale

$$u_i(r,\theta) = e^{ikr\ \cos\theta} = \sum_l \ i^l\ (2l+1)\ j_l(kr)\ P_l(\cos\theta) \qquad\qquad l = 0, 1, 2 \ldots$$

le funzioni radiali che esprimono la dipendenza dalla distanza r sono le funzioni sferiche di Bessel che hanno come andamento asintotico, la forma di onde sferiche

$$\lim_{kr \gg l}\ j_l(kr) \approx \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr}$$

Quindi lo stato iniziale è rappresentato dalla sovrapposizione di due onde sferiche una convergente verso il centro di massa e l'altra divergente dal centro di massa

$$\lim_{r\to\infty} u_i(r,\theta) = \frac{i}{2k}\sum_l\ (2l+1)\left[(-1)^l\ \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\right] P_l(\cos\theta)$$

Analogamente rappresentiamo lo stato finale come sovrapposizione di onde sferiche

$$u_f(r,\theta) = u_i(r,\theta) + f(\theta)\ \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{i}{2k}\sum_l\ (2l+1)\left[(-1)^l\ \frac{e^{-ikr}}{r} - a_l\ \frac{e^{ikr}}{r}\right] P_l(\cos\theta)$$

dove le ampiezze a_l rappresentano l'azione del potenziale sulla componente l dell'onda sferica divergente. L'azione del potenziale risulta in uno *sfasamento* e un *assorbimento* dello stato iniziale

$$a_l = \eta_l\ e^{2i\delta_l} \qquad\qquad con \quad \eta_l,\ \delta_l\ reali \qquad\qquad 0 \le \eta_l \le 1$$

Sviluppo in onde parziali

La diffusione dal potenziale è rappresentata dallo stato

$$u_d(r,\theta) = u_f(r,\theta) - u_i(r,\theta) = \frac{i}{2k}\,\frac{e^{ikr}}{r}\sum_l (2l+1)\,(1-a_l)\,P_l(\cos\theta)$$

con ampiezza di diffusione

$$f(\theta) = \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\,(1-a_l)\,P_l(\cos\theta)$$

Troviamo quindi la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2}\sum_l\sum_{l'} (2l+1)\,(2l'+1)\,(1-a_l^*)\,(1-a_{l'})\,P_l\,P_{l'}$$

e, usando la proprietà di ortonormalità dei polinomi di Legendre,

$$\int P_l(\cos\theta)\,P_l'(\cos\theta)\,d\cos\theta\,d\phi = \frac{4\pi}{2l+1}\,\delta_{ll'}$$

troviamo **Sezione d' urto di Diffusione**

$$\int \frac{d\sigma}{d\Omega}\,d\cos\theta\,d\phi = \frac{1}{4k^2}\sum_l\sum_{l'} (2l+1)\,(2l'+1)\,(1-a_l^*)\,(1-a_{l'})\,P_l\,P_{l'}\,\frac{4\pi}{2l+1}\,\delta_{ll'}$$

$$\sigma_d = \frac{\pi\hbar^2}{p_{cm}^2}\sum_l (2l+1)\,|1-a_l|^2$$

Sezione d' urto Elastica e di Reazione

La diffusione *elastica* è caratterizzata da $\eta_l = 1$

$$1 - a_l = 1 - e^{2i\delta_l} = e^{i\delta_l}\ (e^{-i\delta_l} - e^{i\delta_l}) = -2i\ e^{i\delta_l}\ \sin\delta_l$$

In questo caso l'azione del potenziale non cambia l'ampiezza ma cambia solo la fase dell'onda diffusa. La *sezione d'urto elastica*

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi\hbar^2}{p_{cm}^2} \sum_l (2l+1)\ \sin^2\delta_l$$

è la somma, pesata per il fattore di molteplicità $2l+1$, dei contributi dei diversi valori del momento angolare relativo delle particelle m_1, m_2. Quando la fase della singola componente è $\delta_l = \pi/2$, l'ampiezza di diffusione $f_l(\theta)$ è puramente immaginaria e la sezione d'urto σ_l ha il valore massimo. Questa è chiamata *condizione di risonanza* per l'onda parziale l.

Se $\eta_l < 1$ la diffusione è *inelastica* perché parte del flusso incidente è assorbito dal bersaglio. Il flusso assorbito dell'onda parziale l è pari a $\Phi_i\ (1 - |a_l|^2)$ e la *sezione d'urto di assorbimento* o *sezione d'urto di reazione*

$$\sigma_{abs} = \frac{\pi\hbar^2}{p_{cm}^2} \sum_l (2l+1)\ (1 - |\eta_l|^2)$$

rappresenta i processi in cui una o entrambe le particelle cambiano natura nello stato finale.

Si può avere diffusione elastica senza altri processi: se $\eta_l = 1$ si ha $\sigma_{abs} = 0$. Ma *non* si può avere diffusione inelastica senza avere *anche* diffusione elastica: come in ottica, un bersaglio che assorbe l'onda incidente produce anche diffrazione. L'ampiezza di diffusione dell'onda parziale l può essere puramente immaginaria, ma, se ha una parte reale, ha anche una parte immaginaria.

La *sezione d'urto totale* è data dal contributo di diffusione elastica e di assorbimento

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{abs} = \frac{\pi\hbar^2}{p_{cm}^2} \sum_l (2l+1) \left[(1 - 2\,\Re a_l + |a_l|^2) + (1 - |a_l|^2)\right]$$

$$\sigma_{tot} = \frac{2\pi\hbar^2}{p_{cm}^2} \sum_l (2l+1)\,(1 - \Re a_l)$$

Da queste considerazioni ricaviamo due importanti conclusioni

- La sezione d'urto di un processo, nello stato di momento angolare l, non può superare il valore che corrisponde al massimo della probabilità di diffusione

  $$\sigma_l \leq \frac{4\pi\hbar^2}{p_{cm}^2}\,(2l+1)$$

  detto anche *limite di unitarietà*.

- L'ampiezza di diffusione ha una parte immaginaria, legata alla diffusione elastica, e una parte reale

  $$f(\theta) = \frac{\hbar}{2p_{cm}} \sum_l (2l+1)\,[i\,(1 - \Re a_l) + \Im a_l]\,P_l(\cos\theta)$$

  La parte immaginaria dell'ampiezza di diffusione *in avanti*, cioè per $\theta \to 0$, $P_l(\cos\theta) \to 1$,

  $$\lim_{\theta\to 0} \Im f(\theta) = \frac{\hbar}{2p_{cm}} \sum_l (2l+1)(1 - \Re a_l)$$

è proporzionale alla sezione d'urto totale

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi\hbar}{p_{cm}}\,\Im f(\theta = 0)$$

Questa relazione, dedotta da Bohr e Peierls, è chiamata *teorema ottico*.

Alcune notazioni

I punti cruciali nella analisi in fase consistono nella applicazione di :

a) Quantizzazione di l;
b) Conservazione di l;

Come detto lo scattering consiste nel MODIFICARE l' onda sferica uscente senza cambiare quella entrante.

Conservazione della densita' di corrente legata alla conservazione del flusso totale: conseguenza della unitarieta':

L' ESSENZA dell' analisi in fase sta nel fatto che la conservazione di l richiede che I flussi siano conservati per ogni valore di l individualmente:
in ciascun stato di momento angolare l il flusso rimosso dallo scattering DEVE andare o nello scattering elastico di momento angolare l o nei canali inelastici nello stesso l.
Questa e' la " Condizione di Unitarieta' " :

dipende ovviamente dal principio di conservazione della probabilita' del flusso: il flusso rimosso dal fascio incidente DEVE andare nei canali elastici e/o inelastici. NON PUO' ESSERE PERDUTO.

Matrice S

Dalla Hermeticita’ dell’ operatore H(t) segue che lo sviluppo temporale dello stato $\left|\Psi(t)\right\rangle$ e’ in accordo con :

$$i\frac{d}{dt}\left|\Psi(t)\right\rangle = H(t)\left|\Psi(t)\right\rangle$$

E’ una trasformazione Unitaria.

Quindi H preserva la normalizzazione degli stati:

$$\left\langle \varphi(\mathrm{t}) \middle| \varphi(\mathrm{t}) \right\rangle = \text{ costante}$$

Se definiamo:

$$\left|\varphi(-\infty)\right\rangle = \left|i\right\rangle \quad ; \quad \left|\varphi(+\infty)\right\rangle = S\left|\varphi(-\infty)\right\rangle = S\left|i\right\rangle$$

Un urto puo' portare a molti diversi stati finali.

La probabilita' che $\varphi(\infty)$ sia in $\left|\mathrm{f}\right\rangle$ e' data da:

$$\left|\left\langle \mathrm{f} \middle| \varphi(\infty) \right\rangle\right|^2$$

L' ampiezza e' : $\mathrm{S}_{\mathrm{fi}} = \left\langle \mathrm{f} \middle| S \middle| i \right\rangle$

Sviluppiamo su un set di stati completi ortonormali:

$$\left|\varphi(\infty)\right\rangle = \sum_f \left|f\right\rangle\left\langle f \middle| \varphi(\infty)\right\rangle = \sum_f \left|f\right\rangle \mathrm{S}_{\mathrm{fi}}$$

L' unitarieta' della matrice S si puo' scrivere come:

$\sum_{\mathrm{f}} \left|\mathrm{S}_{\mathrm{fi}}\right|^2 = 1$ che esprime la Conservazione della Probabilita'.

Matrice T

$$T_l = \frac{\mathrm{S_l} - I}{2i} \quad ;$$

$$\Psi_{out,\beta,\alpha}(r) = \frac{e^{ik_\beta r}}{2ik_\alpha} \cdot \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\vartheta) \mathrm{S}_{\beta,\alpha,l}$$

$$\left|\mathrm{S}_{\beta,\alpha,l}\right|^2 \leq 1 \quad ; \quad \Psi_{\text{scat.}\ \beta,\alpha} = \Psi_{out\ \beta,\alpha}$$

$$f_{\beta,\alpha}(\vartheta) = \frac{1}{2ik_\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\vartheta) \mathrm{S}_{\beta,\alpha,l}$$

Le reazioni inelastiche sono descritte

dagli elementi "off-digonali" della matrice S.

$\beta = \alpha \;\Rightarrow\;$ scattering elastico

$\sigma_{\beta\alpha}$ = reaction cross section

Nota Bene : S include la probabilita' che non ci sia interazione. La definizione di T elimina questo problema:

$$S = \mathrm{I} + 2\mathrm{i}\mathrm{T} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{T} = \frac{\mathrm{S\text{-}I}}{2\mathrm{i}}$$

Bibliografia

Burcham and Jobes
Nuclear and Particle Physics

Pagine 285-293