

Capitolo 2

La Struttura

degli Adroni

**Corso di Fisica Nucleare e
Subnucleare II**

Professor Carlo Dionisi

Secondo Semestre

A.A. 2008-2009

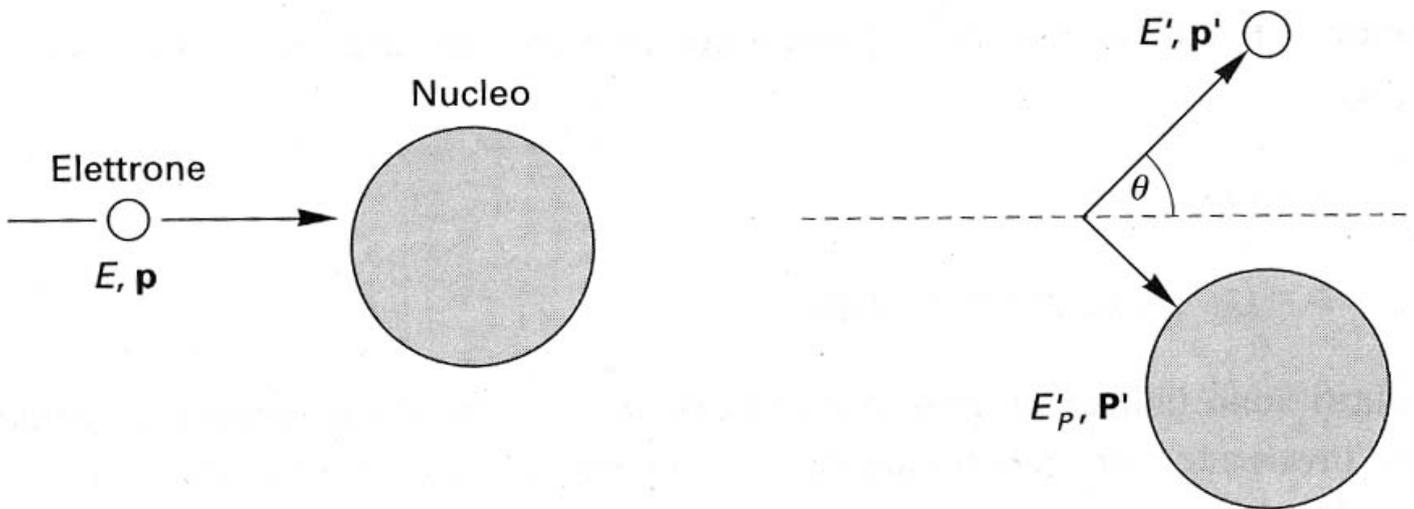
Capitolo 2 : Diffusione elastica, inelastica e profondamente anelastica su nuclei e nucleoni

Contenuto:

- 1) I fattori di forma dei nuclei
- 2) I fattori di forma dei nucleoni
- 3) La diffusione profondamente anelastica
- 3) Le funzioni di struttura
- 4) Il modello a partoni
- 5) I quark dentro I nucleoni
- 6) Struttura a quark dei nucleoni
- 7) Distribuzione in impulso dei quark
- 8) Le cariche dei quark
- 9) Il ruolo dei gluoni

Professor Carlo Dionisi
A. A. 2004-2005

Scattering Elastico



- Dalla conservazione dell' energia e dell' impulso:

$$\mathbf{p} + \mathbf{P} = \mathbf{p}' + \mathbf{P}' \quad \text{dove: } \mathbf{p} = (E/c; \mathbf{p}), \mathbf{p}' = (E'/c; \mathbf{p}'),$$

$$\mathbf{P} = (mc; \mathbf{0}), \mathbf{P}' = (E'_p/c; \mathbf{P}')$$

$$p^2 + 2\mathbf{p}\mathbf{P} + P^2 = p'^2 + 2\mathbf{p}'\mathbf{P}' + P'^2$$

- L' urto e' elastico per cui:

$$p^2 = p'^2 = m_e^2 c^2; P^2 = P'^2 = M^2 c^2 \quad \text{per cui: } \mathbf{p}\mathbf{P} = \mathbf{p}'\mathbf{P}'$$

- Sperimentalmente riveliamo l' elettrone diffuso:

$$\mathbf{p}\mathbf{P} = \mathbf{p}'(\mathbf{p} + \mathbf{P} - \mathbf{p}') = \mathbf{p}'\mathbf{p} + \mathbf{p}'\mathbf{P} - m_e^2 c^2$$

da cui moltiplicando a destra e sinistra per c^2

$$EMc^2 = E'E - \mathbf{p}\mathbf{p}'c^2 + E'Mc^2 - m_e^2 c^4$$

- Per energie elevate si trascura $m_e^2 c^4$ ed $E \cong pc$

$$EMc^2 = EE' (1 - \cos\theta) + E'Mc^2$$

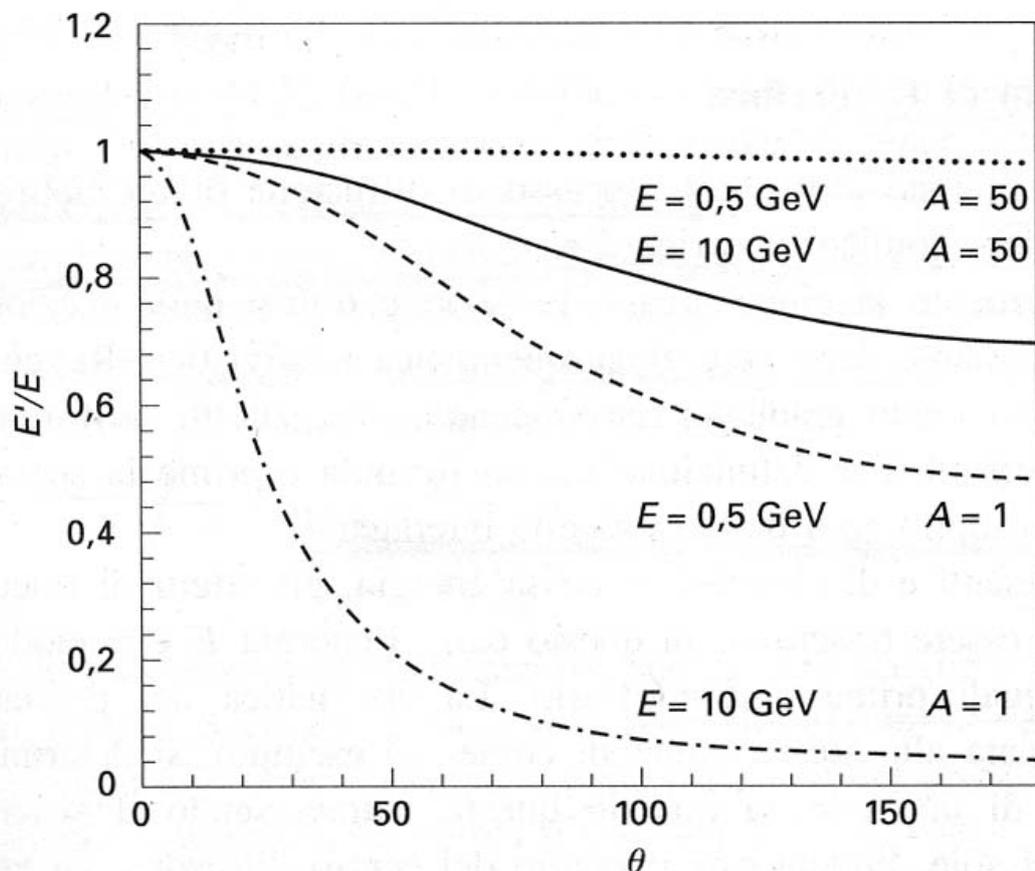
Scattering Elastico

- Avremo quindi:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos \theta)}$$

Dove θ e' l' angolo di diffusione. Quindi nel caso di urti elastici esiste una dipendenza univoca tra θ ed E' .

Questo NON e' piu' vero nel caso di urti anelastici. L' energia di rinculo del bersaglio e' legata al termine E/Mc^2



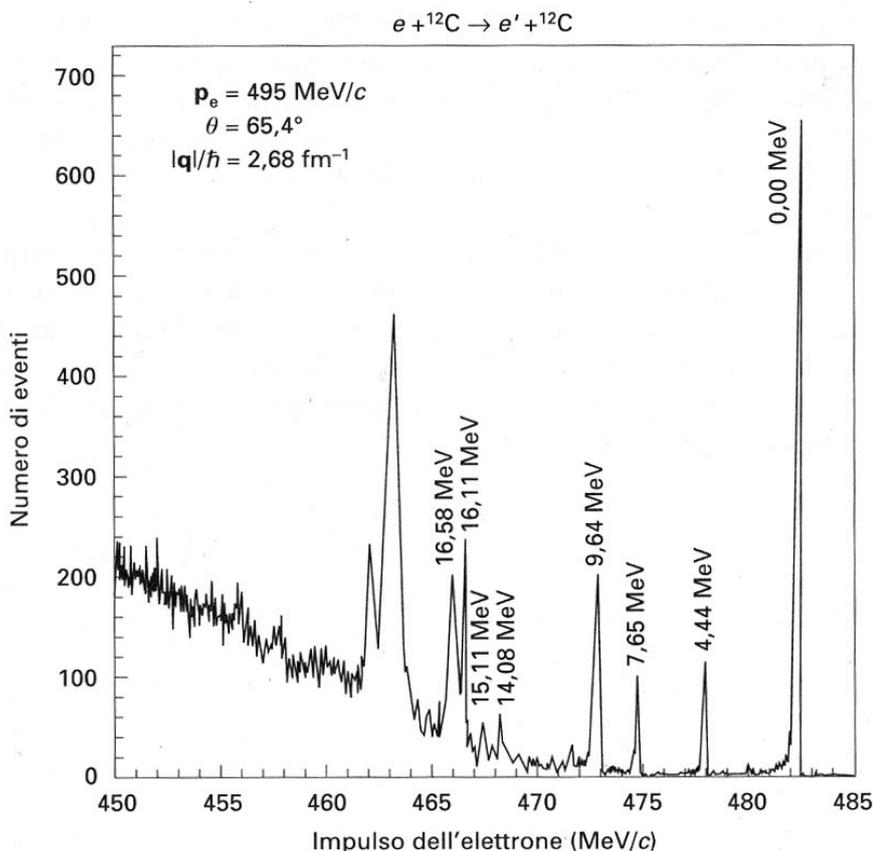
Eccitazioni Nucleari Anelastiche

- ◆ Come detto, nel caso della diffusione elastica di elettroni su nuclei, l' unica energia trasferita e' quella di rinculo ed il bersaglio **NON viene eccitato** ad un livello di energia superiore. Come ricavato in precedenza e fissato l' angolo di diffusione, le energie delle particelle entranti e di quelle uscenti sono connesse in maniera univoca dalla:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2} (1 - \cos \theta)}$$

- ◆ Guardando lo spettro sperimentale di energia degli elettroni diffusi, vedi figura in basso, si nota che l' energia trasferita e' piu' grande di quanto uno si aspetterebbe dal semplice rinculo: **abbiamo reazioni di tipo anelastico.**

I picchi, a parte quello elastico a $E' = 482$ MeV, sono dovuti a stati nucleari eccitati del ^{12}C



$$E = 495 \text{ MeV} ; \theta = 65.4^\circ$$

11.2.1 La sezione d'urto di Mott

La formula che descrive la sezione d'urto differenziale per lo scattering elastico di elettroni relativistici e' stata ricavata da Mott usando la teoria di Dirac per gli elettroni relativistici. Analogamente a quella di Rutherford, la formula di Mott trascura la dimensione del nucleo e il suo rinculo dovuto all'urto, ma include invece l'effetto dello spin dell'elettrone e si scrive:

— La sezione d' urto di Mott

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \left(1 - \beta^2 \cdot \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)$$

Vediamo che a energie relativistiche, al crescere dell'angolo di diffusione, la sezione d'urto di Mott diminuisce piu' rapidamente di quella di Rutherford. Nel limite $\beta \rightarrow 1$ otteniamo

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}^* &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = \\ &= \frac{4Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 E'^2}{|qc|^4} \cdot \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \end{aligned}$$

Il fattore aggiuntivo che compare a moltiplicare la formula di Rutherford si spiega considerando il caso estremo di diffusione a 180° : infatti, dovendo conservarsi il momento angolare, possiamo vedere dalla figura 11.1 che la diffusione **per $\theta = 180^\circ$** e' possibile SOLO se il nucleo ha spin rendendo quindi possibile lo spin-flip dell' elettrone. Il fattore aggiuntivo nella formula di Mott,essendo legato allo spin, descrive la parte magnetica dell' interazione.

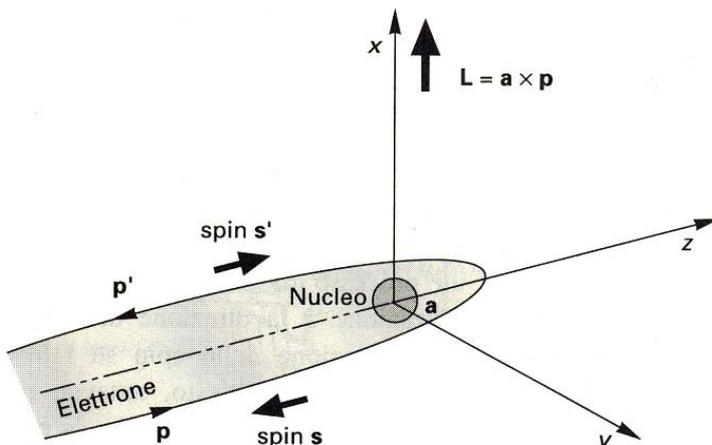


Figura 11.1: conservazione del momento angolare nella diffusione a 180° .

11.2.2 I fattori di forma nucleari

Negli esperimenti di diffusione su nuclei la sezione d'urto di Mott e' in accordo con le misure sperimentali solo nel limite $|q| \rightarrow 0$. Per valori piu' grandi le sezioni d'urto sperimentali sono sistematicamente piu' piccole di quelle previste dalla formula di Mott.: Questo e' facilmente comprensibile:

data la estensione spaziale non nulla dei nuclei, non prevista dalla formula, all'aumentare del momento trasferito diminuisce la dimensione spaziale "vista" dalla sonda dell' elettrone che interagisce quindi solo con una certa frazione della carica del nucleo e questo fa si che la sezione d'urto diminuisca.

Dato un nucleo di carica Z , definiamo una **funzione di distribuzione di carica** $f(\vec{x})$

$$\rho(\vec{x}) = Zef(\vec{x}) \quad \text{con} \quad \int f(\vec{x}) d^3x = 1$$

La Trasformata di Fourier della distribuzione di carica $f(\vec{x})$

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}) d^3x \quad \vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$$

viene chiamato FATTORE DI FORMA. Nel caso di una carica puntiforme, diffusione di Rutherford, avremo

$$f(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \quad \rightarrow \quad F=1 = \text{Costante}$$

Ruolo dei Fattori di Forma:

$$\text{Misure} \xleftrightarrow{\text{Fattori di Forma}} \text{Predizioni Teoria}$$

Nel seguito ci limiteremo a discutere solo i fattori di forma dei sistemi a simmetria sferica che dipendono solo dal modulo di q . Il valore assoluto di $F(q^2)$ e' misurabile sperimentalmente dal rapporto fra la sezione d'urto misurata e la sezione d'urto di Mott:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{esp.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}^* \times |F(\vec{q}^2)|^2$$

Le prime misure dei fattori di forma vennero fatte negli anni 50 presso l'acceleratore lineare ad elettroni della Università di Stanford in California. Con energie del fascio di circa 500 MeV, vennero misurate le sezioni d'urto avendo come bersaglio una grande varietà di nuclei.

Un esempio di una delle prime misure di fattori di forma è mostrato in figura 11.2, dove è riportata la sezione d'urto per il ^{12}C misurata a diversi valori dell'angolo di diffusione θ .

All'andamento come $1/q^4$ dovuto allo scattering elastico, si sovrappone una tipica figura di diffrazione associata al Fattore di Forma. C'è un minimo per $\theta \approx 51^\circ \rightarrow |q|/\hbar \approx 1.8 \text{ fm}^{-1}$.

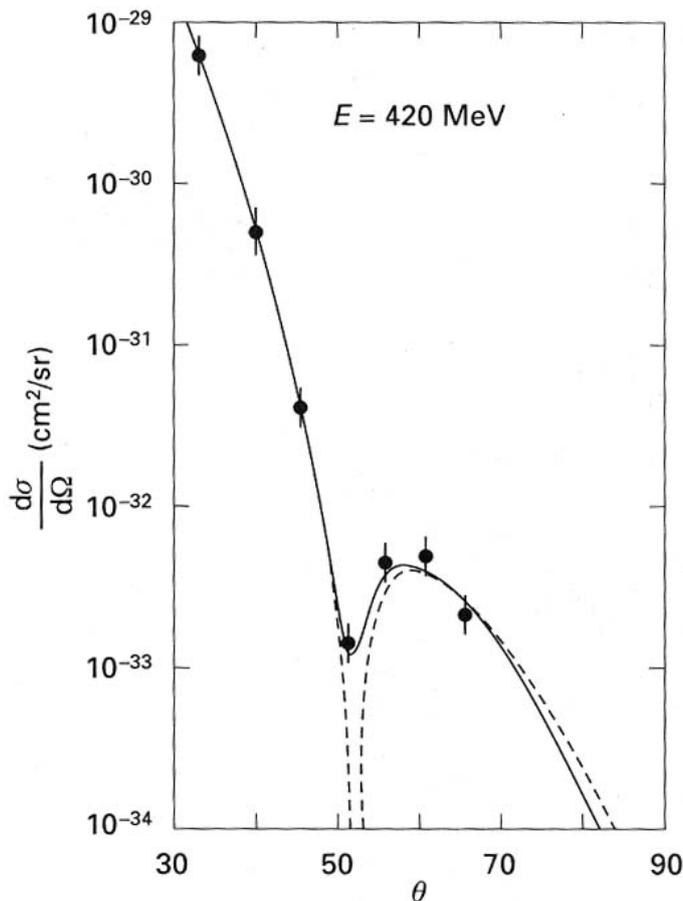


Figura 11.2: come viene calcolato in appendice x, nel caso di una distribuzione di una carica sferica ed omogenea il fattore di forma è una funzione oscillante con minimi di diffrazione a $q \times R / (\hbar/2\pi)$. La distribuzione dei minimi ci dà quindi informazioni su R.

L'interpretazione di questo risultato permette di ricavare informazioni sul nucleo diffondente. Nella approssimazione di Born, trascurando gli effetti del rinculo del nucleo e trattando il caso a simmetria sferica ($|\vec{x}|=r$), abbiamo:

$$F(q^2) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} f(|\vec{x}|) d^3x$$

Integrando sull'intero angolo solido avremo:

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} f(r) d^3x = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} f(r) r^2 dr = \\ &= 2\pi \int_0^\infty f(r) r^2 dr \int_{-1}^1 e^{iqr\cos\theta} d(\cos\theta) = \\ &= 2\pi \int_0^\infty f(r) r^2 \frac{2\hbar}{2iqr} \left(e^{i\frac{qr}{\hbar}} - e^{-i\frac{qr}{\hbar}} \right) dr = \\ &= 4\pi \int_0^\infty f(r) r^2 \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} dr \end{aligned}$$

dove il fattore di normalizzazione e' dato da :

$$1 = \int f(x) d^3x = \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f(r) r^2 d\phi d\cos\theta dr = 4\pi \int_0^\infty f(r) r^2 dr$$

In linea di principio la distribuzione radiale di carica puo' essere ottenuta dalla trasformata di Fourier inversa del fattore di forma, utilizzando per quest'ultimo una parametrizzazione sperimentale in termini di q^2 :

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(q^2) e^{-iq\pi/\hbar} d^3q$$

Le energie dei fasci disponibili sono pero' finite e quindi ci sono solo valori sperimentali limitati dell'impulso trasferito per i quali calcolare i fattori di forma. In pratica si scrivono diverse parametrizzazioni di $f(r)$ e da queste si ricavano le diverse predizioni teoriche per i corrispondenti fattori di forma.

Si variano infine i parametri liberi dei modelli fino ad ottenere l'accordo migliore tra dati e teoria. I fattori di forma per particolari funzioni $f(r)$ sono elencati in tabella 11.1 e sono mostrati in figura 11.3.

Tabella 11.1

Relazione fra le distribuzioni di carica e i fattori di forma per alcune distribuzioni di carica a simmetria sferica, applicando l'approssimazione di Born.

Distribuzione di Carica $f(r)$		Fattore di Forma $F(q^2)$	
Puntiforme	$\delta(r)/4\pi$	1	Costante
Esponenziale	$(a^3/8\pi) \cdot \exp(-ar)$	$(1 + q^2/a^2\hbar^2)^{-2}$	Dipolare
Gaussiana	$(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot \exp(-a^2r^2/2)$	$\exp(-q^2/2a^2\hbar^2)$	Gaussiano
Sfera omogenea	$\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{per } r \leq R \\ 0 & \text{per } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ con $\alpha = q R/\hbar$	Oscillante

La diffusione su un oggetto con bordi netti produce figure di diffrazione con massimi e minimi di intensita'. **Sottolineamo che nel caso di un bersaglio puntiforme il fattore di forma diviene costante e uguale all'unita'**. Nelle formule di Rutherford e Mott non c'e' nessuna dipendenza da una lunghezza.

Queste formule descrivono lo scattering su oggetti puntiformi e sono dette essere **"invarianti di scala"**. Come abbiamo appena mostrato, quando uno o entrambi gli oggetti collidenti hanno una dimensione non nulla, le formule devono essere modificate moltiplicandole per un fattore di forma

$F(q^2)$. Questo fattore, pur essendo esso stesso adimensionale, e' pero' funzione di una quantita', q^2 , che e' associato ad una lunghezza: **l'introduzione del fattore di forma distrugge l'invarianza di scala.**

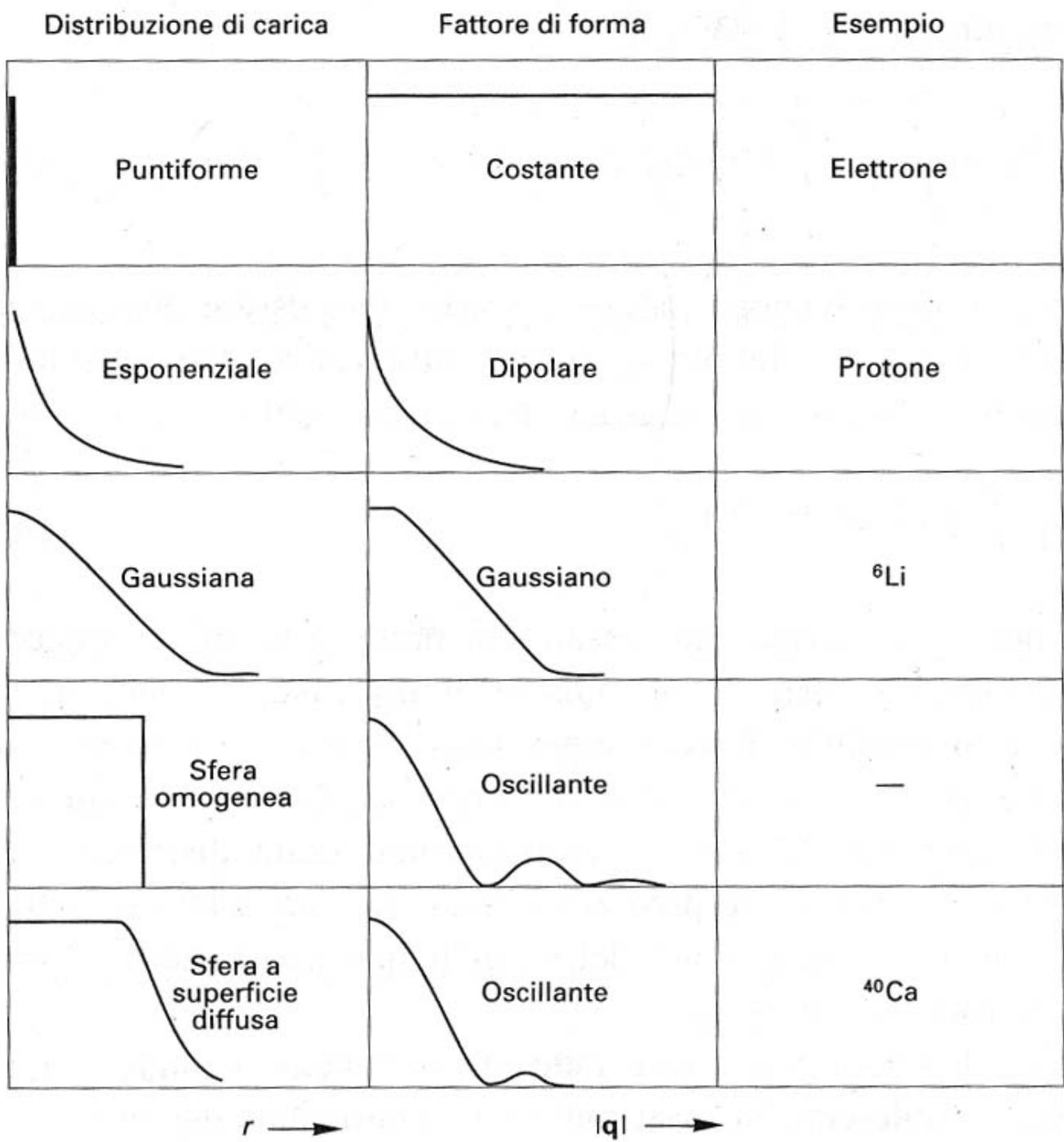


Figura 11.3

Per una sfera omogenea di raggio R , vedi appendice 3, si ha un minimo di diffrazione per

$$\frac{|q| \cdot R}{\hbar} \approx 4.5$$

In fig 11.2 Abbiamo visto che il minimo della sezione d'urto, e quindi del fattore di forma, si ha per $|q|/\hbar \approx 1.8 \text{ fm}^{-1}$. Da questo concludiamo che il nucleo di carbonio ha un raggio $R \approx 4.5 \frac{\hbar}{|q|} \approx 2.5 \text{ fm}$

Possiamo ottenere informazioni sul raggio nucleare anche studiando il comportamento dei fattori di forma per $q^2 \rightarrow 0$. Se la lunghezza d'onda e' molto piu' grande del raggio R del nucleo, avremo che:

$$\text{essendo } \lambda = \frac{\hbar}{|q|}, \text{ per } \frac{R}{\lambda} \ll 1 \text{ avremo } \frac{|q| \cdot R}{\hbar} \ll 1$$

$F(q^2)$ puo' essere allora sviluppato in serie di potenze di q :

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int f(|\vec{x}|) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i q |\vec{x}| \cos \theta}{\hbar} \right)^n d^3 x = \quad \text{con } \theta \text{ angolo tra } \vec{x} \text{ e } \vec{q} \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(r) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{qr}{\hbar} \right)^2 \cos^2 \theta + \dots \right] d\phi d \cos \theta r^2 dr = \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} f(r) r^2 dr - \frac{1}{6} \frac{q^2}{\hbar^2} 4\pi \int_0^{\infty} f(r) r^4 dr + \dots \end{aligned}$$

Se definiamo $\langle r^2 \rangle$, Raggio quadratico medio della distribuzione di carica, come:

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^{\infty} r^2 f(r) r^2 dr$$

Avremo quindi:

$$F(q^2) = 1 + \frac{1}{6} \frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{\hbar^2} + \dots$$

$\langle r^2 \rangle$ si misura a piccoli valori di q^2

$$\langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \left. \frac{dF(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0}$$

11.2.3 Distribuzione di carica dei nuclei e raggi nucleari

A partire dalla meta' degli anni 50 studi sistematici, fondati su numerose misure dei fattori di forma effettuate con diversi acceleratori, hanno portato alle seguenti conclusioni:

- 1) I nuclei non sono sfere con una superficie definita in modo netto;
- 2) al loro interno la densita' di carica e' costante mentre in superficie si annulla in modo graduale;
- 3) la densita' di carica e' ben riprodotta, questo e' mostrato in Fig 11.4 per alcuni nuclei, dalla distribuzione di Woods-Saxon a due parametri:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{\frac{r-c}{a}}} \rightarrow \text{dove} \rightarrow \rho(c) = \rho(0)/2$$

$$\text{per } -A - \text{ grande} \rightarrow c = 1.07 \text{ fm} \times A^{\frac{1}{3}}; a = 0.54 \text{ fm}$$

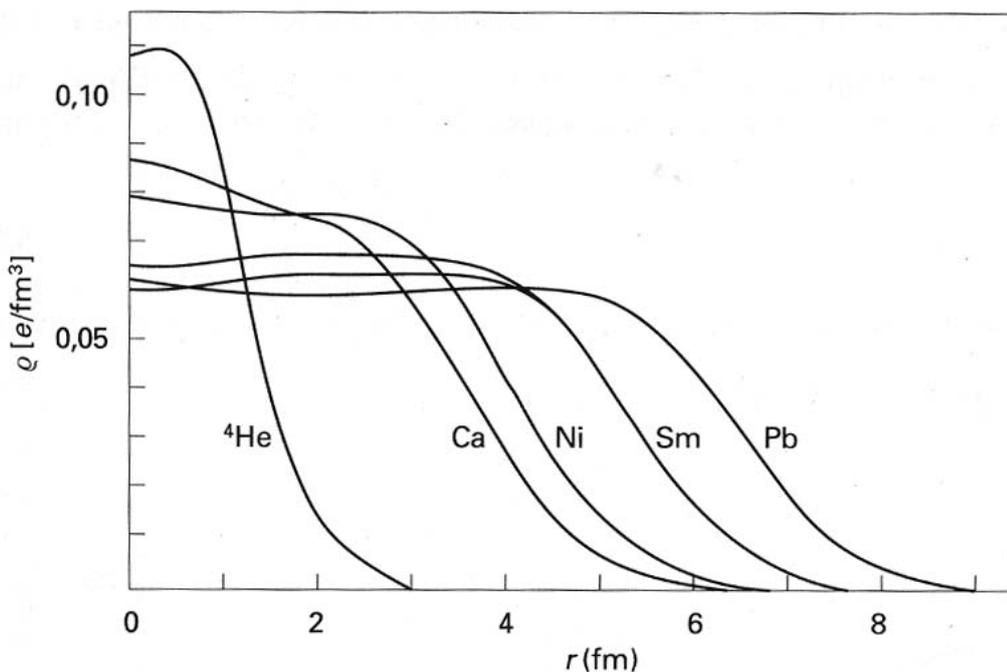


Figura 11.4

Dalla distribuzione della carica elettrica di un nucleo, determinata come visto dallo scattering con gli elettroni, possiamo farci un'idea di come la materia nucleare e' distribuita nel nucleo. Se il protone fosse un oggetto puntiforme, potremmo identificare la densita' dei protoni con quella della carica elettrica: $\rho(\text{protone}) = \rho(\text{carica})$. Poiche' le forze nucleari che legano i nucleoni insieme sono indipendenti dalla carica elettrica e a corto raggio d'azione, possiamo assumere con buona approssimazione che il rapporto tra la densita' dei neutroni e quella dei protoni e' la stessa in tutti i punti in un nucleo e quindi che: $\rho(\text{neutrone}) / \rho(\text{protone}) = N/Z$.

Quindi **la densita' totale dei nucleoni** sara' :

$$\begin{aligned} \rho_T &= \rho_n + \rho_p = N/Z \times \rho_p + \rho_p = N/Z \rho_{\text{carica}} + \rho_{\text{carica}} = \\ &= [(N + Z) / Z] \times \rho_{\text{carica}} \end{aligned}$$

$$\rho_T = A/Z \times \rho_{\text{carica}}$$

Essendo la densita' costante , avremo : $(4/3) \times \pi \times R^3 \times \rho_0 = A$
da cui, per $\rho_0 = 0.17$ nucleoni/fm³,

$$R = 1.12 \times A^{1/3} \text{ fm}$$

In Fig. 11.5 vediamo lo r.m.s. del raggio nucleare per vari nuclei in funzione di $A^{1/3}$ determinato da esperimenti di diffusione di elettroni. Un fit con una retta, forzata a passare per l' origine, da' come risultato una pendenza di $R_0 = 1.23$ fm.

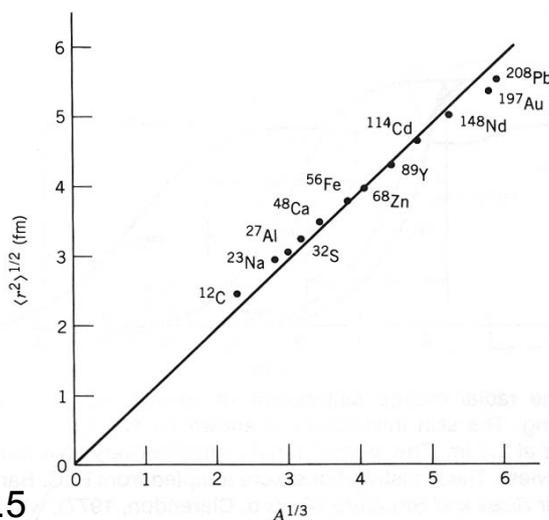


Figura 11.5

The rms nuclear radius determined from electron scattering experiments. The slope of the straight line gives $R_0 = 1.23$ fm. (The line is not a true fit to the data points, but is forced to go through the origin to satisfy the equation $R = R_0 A^{1/3}$.) The error bars are typically smaller than the size of the points (± 0.01 fm). More complete listings of data and references can be found in the review of C. W. de Jager et al., *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **14**, 479 (1974).

Se indichiamo con t lo spessore dello strato di superficie per cui $\rho(r)$ passa dal 90% al 10% del suo valore massimo, si trova che t ha lo stesso valore per TUTTI i nuclei pesanti: $t \cong 2.40 \text{ fm}$, vedi Fig. 11.6:

1) per una materia nucleare infinitamente estesa si avrebbe $\rho_T \cong 0.17 \times \text{nucleoni/fm}^3$

2) i Lantanidi (Terre rare) hanno una forma ellissoide;

3) nuclei leggeri come ${}^6,7\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$ e in particolare ${}^4\text{He}$, sono casi particolari con $\rho(r)$ di tipo gaussiano.

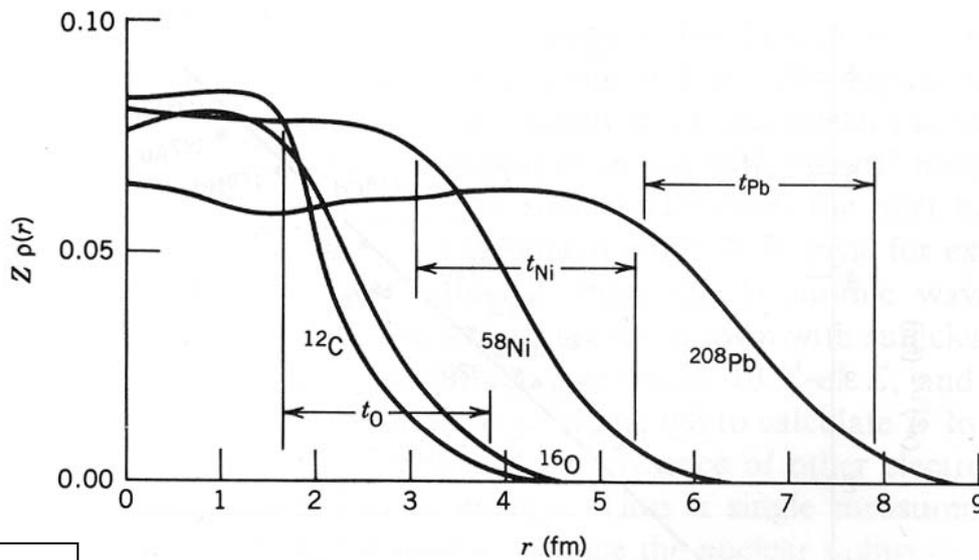


Fig. 11.6 The radial charge distribution of several nuclei determined from electron scattering. The skin thickness t is shown for O, Ni, and Pb; its value is roughly constant at 2.3 fm. The central density changes very little from the lightest nuclei to the heaviest. These distributions were adapted from R. C. Barrett and D. F. Jackson, *Nuclear Sizes and Structure* (Oxford: Clarendon, 1977), which gives more detail on methods of determining $\rho(r)$.

Appendice 3: fattore di forma per una distribuzione di carica uniforme in una sfera di raggio R_0

Condizione di normalizzazione: $\rho_0 \int \rho(r) d^3 r = 1$

$$\begin{cases} \rho(r) = \rho_0 = \frac{3}{4} \frac{1}{\pi R_0^3} & \text{per } r \leq R_0 \\ \rho(r) = 0 & \text{per } r > R_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{R_0} e^{i \frac{qr \cos \theta}{\hbar}} r^2 dr = \\ &= \rho_0 2\pi \int_0^{R_0} r^2 \frac{\hbar}{iqr} \frac{2}{2} \left(e^{i \frac{qr}{\hbar}} - e^{-i \frac{qr}{\hbar}} \right) dr = \\ &= \rho_0 \hbar \frac{4\pi}{q} \int_0^{R_0} \sin \frac{qr}{\hbar} r dr \end{aligned}$$

Ponendo $x = \frac{qr}{\hbar}$, $x_0 = \frac{qR_0}{\hbar}$

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \rho_0 \hbar \frac{4\pi}{q} \frac{\hbar^2}{q^2} \int_0^{x_0} x \sin x dx = \rho_0 4\pi \frac{\hbar^3}{q^3} [\sin x - x \cos x]_0^{x_0} = \\ &= \rho_0 4\pi \frac{\hbar^3}{q^3} \left[\sin \frac{qR_0}{\hbar} - \frac{qR_0}{\hbar} \cos \frac{qR_0}{\hbar} \right] = \\ &= \frac{3}{4} \frac{1}{\pi R_0^3} 4\pi \frac{\hbar^3}{q^3} \left[\sin \frac{qR_0}{\hbar} - \frac{qR_0}{\hbar} \cos \frac{qR_0}{\hbar} \right] \end{aligned}$$

N.B.: questo fattore di forma riproduce in modo soddisfacente la diffusione su
1542099 A grande

Esercizio: Fattore di forma elettrico

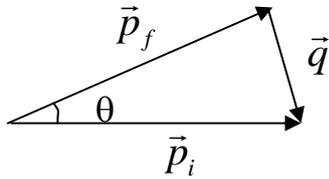
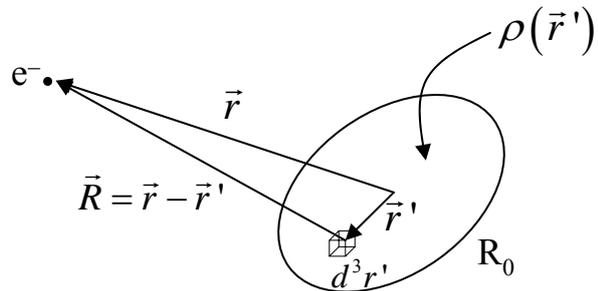


Figura 11.7



La particella targhetta sia un elettrone e quella bersaglio abbia una struttura di carica distribuita con densità $\rho(\vec{r}')$, vedi figura 11.7.

Avremo:

$$V(\vec{r}) = e^2 Z \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad \int \rho(\vec{r}') d^3 r' = 1$$

Avremo:

$$\langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle = e^2 Z \int_V e^{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar}} \int_{R_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' d^3 r$$

Calcoliamo il doppio integrale prima su \vec{r} tenendo costante \vec{r}'

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle &= e^2 Z \int_V \int_{R_0} e^{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{R}}{\hbar}} e^{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}'}{\hbar}} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} d^3 r' d^3 R = \\ &= e^2 Z \int_V \frac{e^{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{R}}{\hbar}}}{R} d^3 R \int_{R_0} e^{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}'}{\hbar}} \rho(\vec{r}') d^3 r' \end{aligned}$$

Fattore di Forma elettrico

$$\begin{aligned}\int_V \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}}}{R} d^3R &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty \frac{e^{i\frac{qR\cos\theta}{\hbar}}}{R} R^2 dR = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty \frac{e^{i\frac{qR\cos\theta}{\hbar}}}{R} R^2 dR = \\ &= 2\pi \int_0^\infty R^2 \frac{2\hbar}{2iqR^2} \left(e^{i\frac{qR}{\hbar}} - e^{-i\frac{qR}{\hbar}} \right) dR = \\ &= 4\pi \frac{\hbar}{q} \int_0^\infty \sin(qR/\hbar) dR = 4\pi \left(\frac{\hbar}{q} \right)^2\end{aligned}$$

Riassumendo otteniamo:

$$\langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle = 4\pi e^2 Z \left(\frac{\hbar}{q} \right)^2 \int_{R_0} e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}'}{\hbar}} \rho(\vec{r}') d^3r'$$

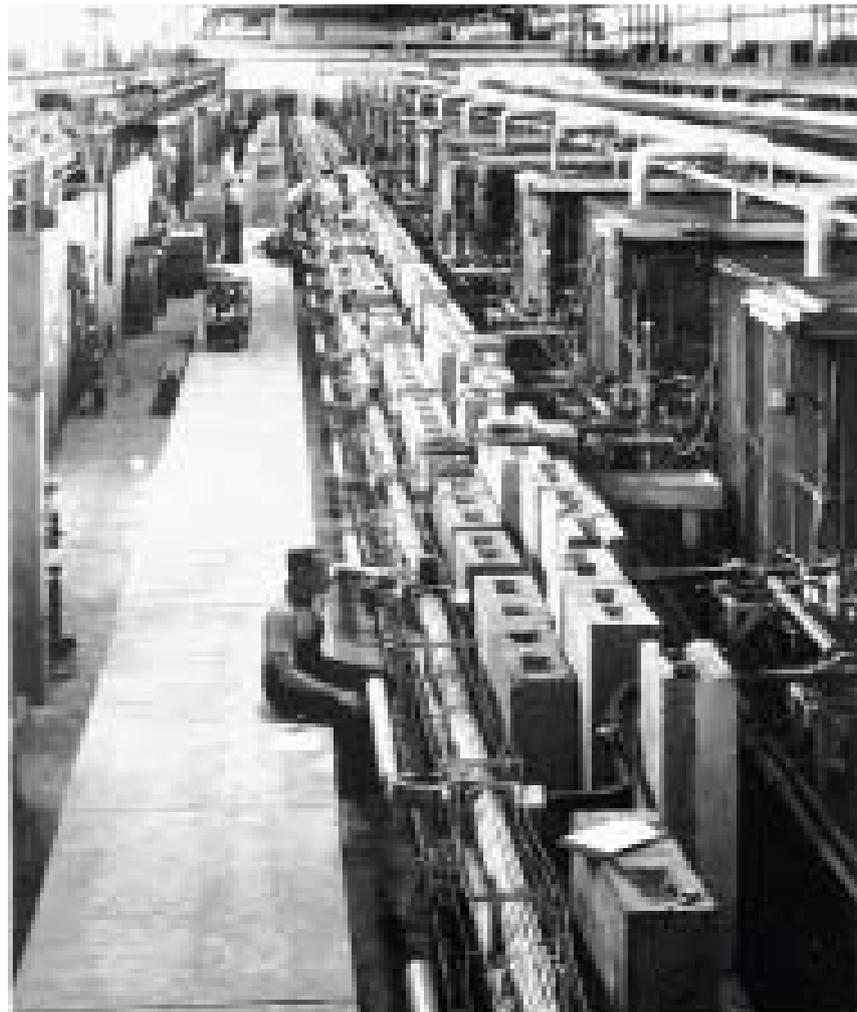
dove chiamiamo Fattore di Forma Elettrico la quantità $F(q^2)$ definita da

$$F(q^2) = \int_{R_0} e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}'}{\hbar}} \rho(\vec{r}') d^3r'$$

Struttura dei Nuclei

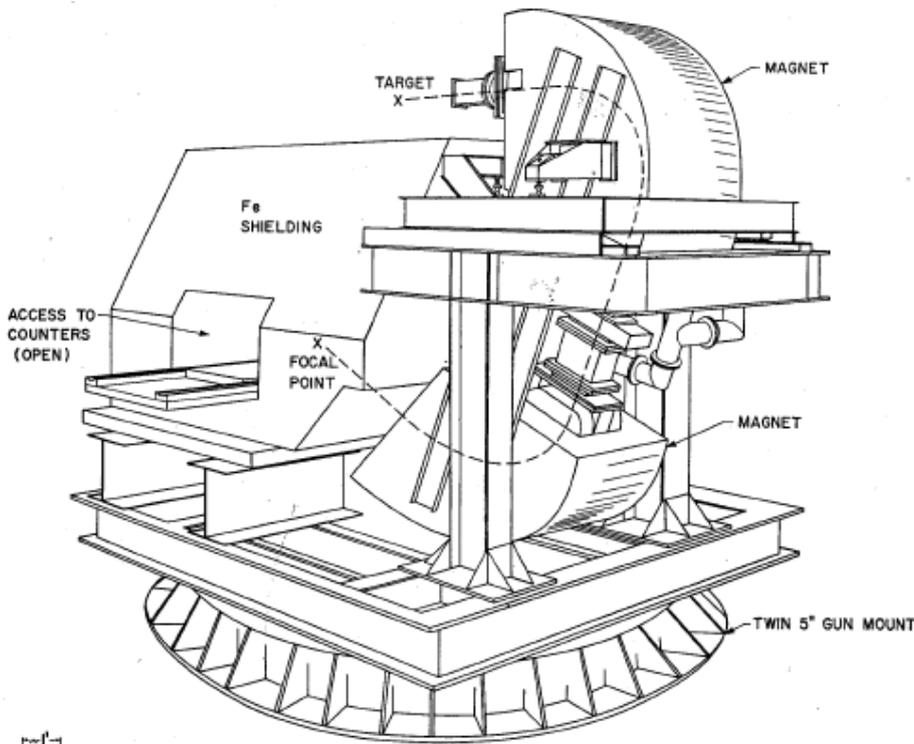
1953

Scattered 125 MeV
electrons off of nuclei



Mark 3 electron linac
at Stanford University

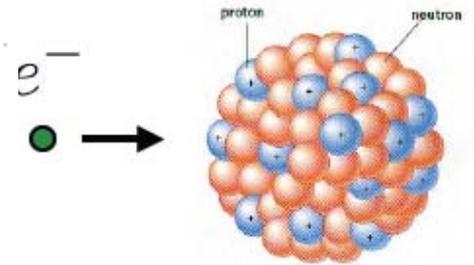
Struttura dei Nuclei



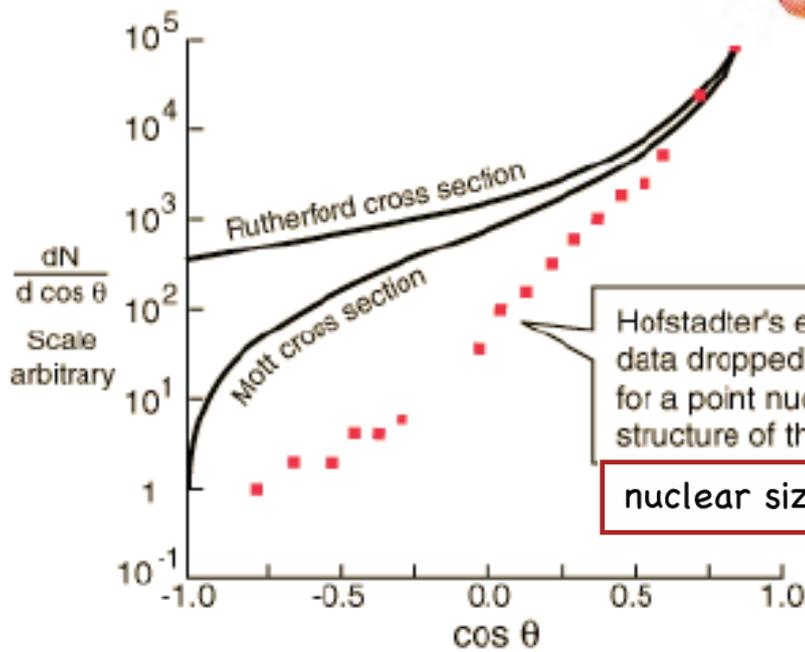
TOTAL WEIGHT
~ 135 TONS

30° TRIPLE FOCUSING
SPECTROMETER

FIG. 4. Perspective drawing of the spectrometer in position on the gun mount, showing iron shielding in place around the counter house. The momentum slit box and part of the vacuum chamber are shown between the magnets.



Hofstadter



Spettrometri Magnetici Oggi

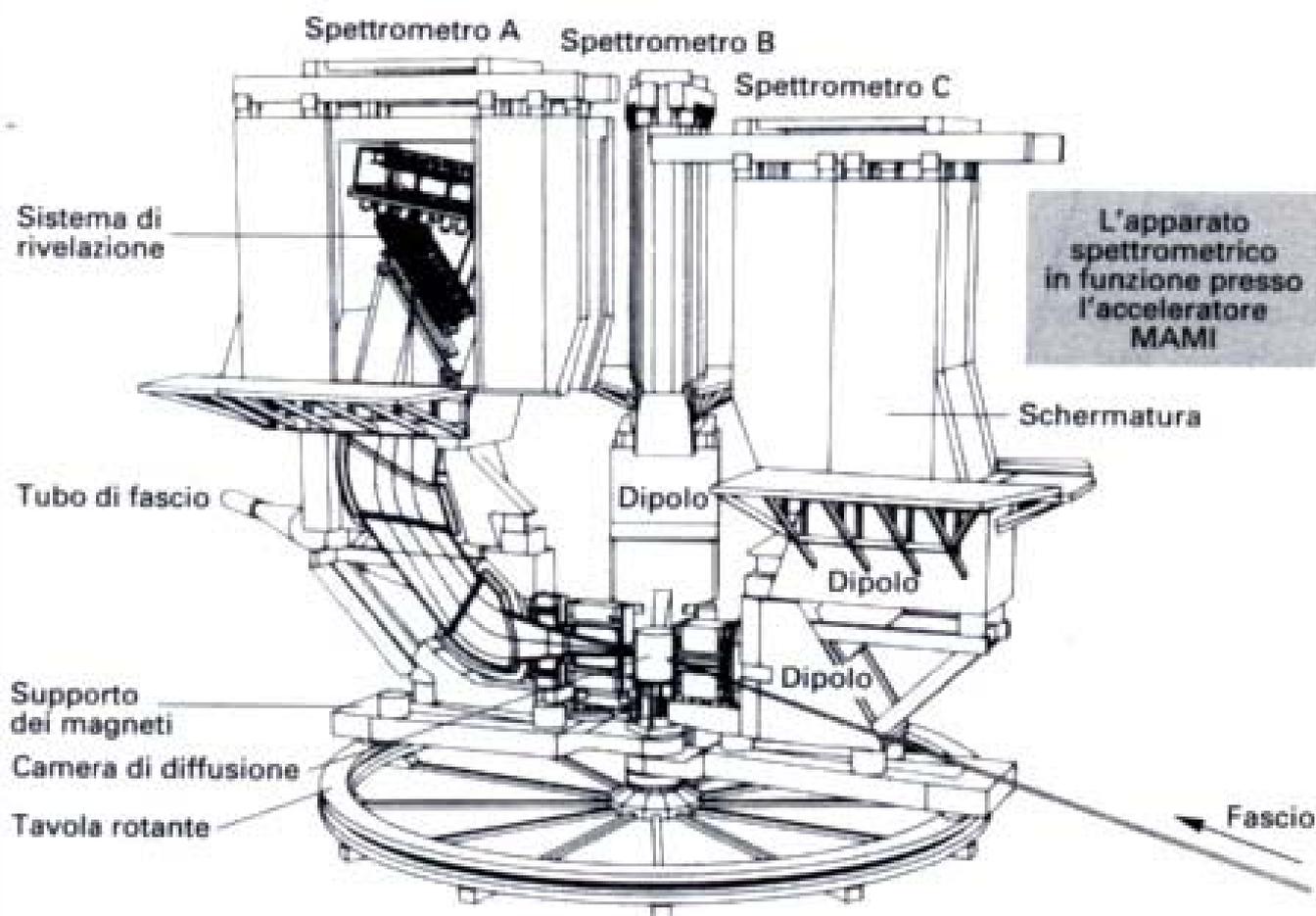


Figura 5.4

Apparato sperimentale per la misura della diffusione di elettroni su protoni e nuclei all'acceleratore MAMI-B (Mainzer Mikrotron). L'energia massima disponibile è 820 MeV. La figura mostra tre spettrometri magnetici. Essi possono essere utilizzati singolarmente per misure di diffusione elastica o essere messi in coincidenza fra di loro per una misura dei canali di reazione anelastici. Dello spettrometro A viene mostrato uno spaccato. Gli elettroni diffusi sono separati in impulso per mezzo di due dipoli magnetici e rivelati grazie ad un sistema di scintillatori e di camere a fili. Il diametro dell'anello di rotazione è di circa 12 m. (Fonte: Arnd P. Liesenfeld (Mainz)).

Appendice dal corso di FNSN_I della triennale

A.1) Particella carica in campo magnetico

- ◆ il moto di una particella di massa m e carica elettrica q in un campo di induzione magnetica \mathbf{B} e' descritto dalla legge

$$d\mathbf{p}/dt = d(\gamma m\mathbf{v})/dt = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

In un moto circolare, con traiettoria di raggio R e con \mathbf{B} perpendicolare a \mathbf{v} , avremo :

$$ma = mv^2/R = qvB$$

da cui

- i) $mv = qRB$
- ii) $R = mv/qB = p/qB$
- iii) $cp = qcBR$

- ◆ Per una carica unitaria $q=e$, la relazione tra quantita' di moto, raggio di curvatura e campo magnetico e' :

$$pc[\text{Joule}] = e c B R =$$

$$1.6 \cdot 10^{-19} [\text{Coulomb}] \cdot 3 \times 10^8 [\text{ms}^{-1}] B [\text{Tesla}] R [\text{metro}]$$

oppure in unita' piu' pratiche:

$$pc[\text{GeV}] = 0.3 B [\text{Tesla}] R [\text{metro}]$$

◆ Avremo anche:

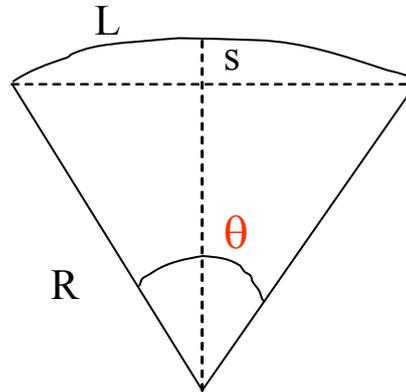
$$B \times R = p/e = \text{rigidita' magnetica}$$

◆ se mettiamo tutto nelle
corrette unita' di misura
avremo:

$$\begin{aligned} B \times R &= 33.356 \times p \text{ [kg*m]} = \\ &= 3.3356 \times p \text{ [T *m]} \\ &\quad (\text{ se } p \text{ e' in GeV/c }) \end{aligned}$$

A.2 Misura di Impulso

- a) **Metodo della sagitta**: il rivelatore di traccia è interno al campo magnetico B. Ricordiamo : $p = 0.3 RB$ con $q = 1$; B in Tesla; R in m e p in GeV.
Sia $s \ll R$



$$1) (R - s)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = R^2 \rightarrow R^2 + s^2 - 2Rs + \frac{L^2}{4} = R^2$$

trascurando s^2 si ottiene :

$$s = \frac{L^2}{8R}$$

$$2) \frac{L}{2R} \approx \sin \frac{\vartheta}{2} ; \cos \vartheta \approx 1 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{\vartheta^2}{4} ; s = R \cdot \left(1 - \cos \frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$s = R \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{\vartheta^2}{4}\right) = R \cdot \frac{\vartheta^2}{8} ;$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{R} = \frac{1}{2} \cdot \vartheta \Rightarrow \frac{L^2}{4R^2} = \frac{\vartheta^2}{4} \Rightarrow \frac{L^2}{8R^2} = \frac{\vartheta^2}{8}$$

$$\text{Otteniamo quindi : } s = R \cdot \frac{L^2}{8R^2} = \frac{L^2}{8R}$$

$$p = 0.3 \cdot R \cdot B \Rightarrow \boxed{p = 0.3 \cdot B \cdot \frac{L^2}{8s}}$$

L'accuratezza della misura di P, per un B fissato, è legata a quella di R e, da questa, a quella di L ed s.

$$p = 0.3 \cdot B \cdot \frac{L^2}{8 \cdot s} \quad ; \quad \Delta p = 0.3 \cdot B \cdot \frac{L^2}{8} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \Delta s$$

$$s = 0.3 \cdot B \cdot \frac{L^2}{8 \cdot p} \quad \Rightarrow \quad s^2 = \left(0.3 \cdot B \cdot \frac{L^2}{8 \cdot p} \right)^2 \quad \text{da cui :}$$

$$\Delta p = \left(\frac{0.3BL^2}{8} \right) \cdot \frac{p^2 8^2 \Delta s}{(0.3BL^2)^2} = \frac{8 \cdot p^2 \Delta s}{0.3 \cdot B \cdot L^2}$$

$$\frac{\Delta p}{p^2} = \frac{8}{0.3 \cdot B \cdot L^2} \cdot \Delta s$$

$$\left(\text{Formula di Gluckstern : } \Delta s = \varepsilon \cdot \frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{720}{N+4}} \right)$$

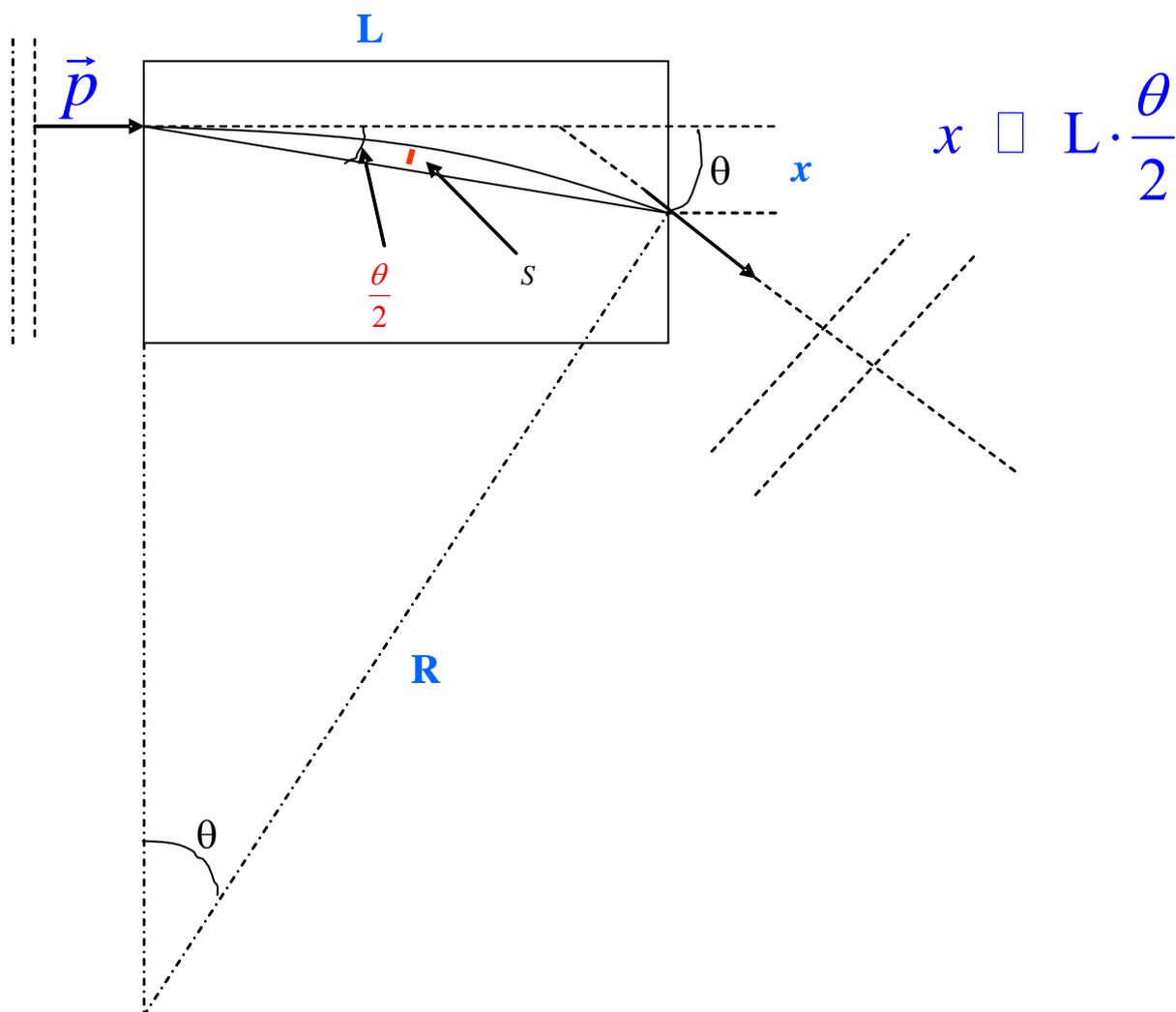
dove ε e' la risoluzione della misura sul singolo punto data dal rivelatore; ed N e' il numero di punti misurati sulla traccia.

$$\text{Avremo : } \frac{\Delta p}{p^2} = \frac{\varepsilon}{0.3BL^2} \sqrt{\frac{720}{N+4}} = \frac{8}{0.3BL^2} \Delta s$$

— Esempio : B = 1.5 Tesla; L = 1.8 m ; $\Delta s = 200 \mu\text{m}$:

$$\Delta p/p^2 = 1.1 \times 10^{-3} / \text{GeV}$$

b) **Analizzatore Magnetico**. La misura dei punti sulle tracce viene fatta prima e dopo la deviazione \mathcal{S} causata dal campo magnetico B . Serve a misurare p ed il segno della carica.



$$cp = 0.3 \cdot B \cdot R \quad ; \quad R \approx \frac{L}{\theta} \quad ; \quad cp\theta \approx 0.3BL \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{0.3B}{cp} \cdot L$$

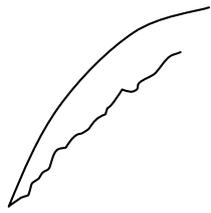
$$x = \frac{0.3L^2B}{2cp} \quad ; \quad cp = \frac{0.3L^2B}{2x} \quad ; \quad \Delta(cp) = \frac{\partial cp}{\partial x} \cdot \Delta x = \frac{0.3L^2B}{2x^2} \cdot \Delta x$$

$$\frac{\Delta(cp)}{(cp)^2} = \frac{2}{0.3L^2B} \cdot \Delta x \quad ; \quad \text{dove } \Delta x \text{ e' la precisione delle camere usate.}$$

Nel vuoto : $\Delta(cp) / (cp)^2 = \text{costante}$ 26

➔ In presenza di materiale dobbiamo tener conto dello scattering multiplo colombiano:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{risoluzione}}^2 + \Delta x_{\text{scatt. mult.}}^2}$$



$$\Delta x_{SM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{15 \text{ MeV} / c}{\beta p} L \sqrt{\frac{L}{x_0}}$$

Esercizio: $B = 1.8 \text{ T}$; $L = 1 \text{ m}$; $\Delta x = 100 \mu\text{m}$

a) Nel vuoto $\frac{\Delta(cp)}{(cp)^2} = 3.7 \cdot 10^{-4}$

P (GeV)	10	100
$x = \frac{0.3L^2 B}{2cp}$	27 mm	2.7 mm
$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta x}{x}$	3.7 ‰	3.7 ‰

b) Magnete in aria: $X_0(\text{aria}) = 300$

per $p = 10 \text{ GeV} \rightarrow \beta \approx 1$

$$\Delta x_{SM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{15}{10^4} \cdot 1 \sqrt{\frac{1}{300}} = 50 \mu\text{m}$$

Confrontabile con le massime Δx raggiungibili.

I Fattori di Forma dei Nucleoni

➤ La diffusione **elastica** degli elettroni su nuclei di idrogeno e deuterio ci permette di estrarre informazioni sul protone e sul neutrone. Questo richiede l'impiego di fasci di energie variabili da qualche centinaia di MeV a parecchi GeV. Ne deriva che:

i) gli effetti legati al rinculo del bersaglio non possono essere trascurati;

ii) lo spazio delle fasi per lo stato finale deve essere quindi modificato di un fattore E'/E :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott}^* \frac{E'}{E}$$

iii) il processo di diffusione deve essere descritto in termini di quadri-impulso trasferito:

$$q^2 = (p - p')^2 = 2m_e^2 c^2 - 2 \left(\frac{EE'}{c^2} - |\vec{p}| \cdot |\vec{p}'| \cos \theta \right)$$

$$q^2 \cong -4 \frac{EE'}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

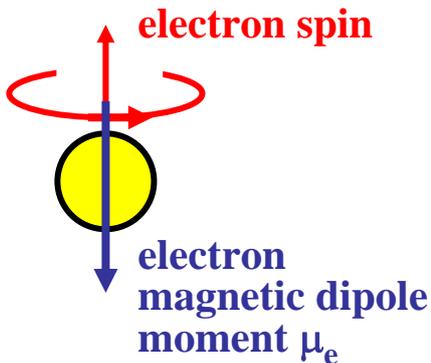
$$Q^2 = -q^2$$

iv) Dobbiamo descrivere anche l'interazione dell'elettrone con il momento magnetico dei nucleoni. Questo introduce un termine che è funzione sia di q^2 che di $q/2$.

Il momento magnetico

➤ Vogliamo ora descrivere l' interazione dell' elettrone con il momento magnetico dei nucleoni.

⇒ **dalla equazione di Dirac ricaviamo per l' elettrone l' esistenza di un momento di dipolo magnetico intrinseco:**



$$\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 5.79 \times 10^{-5} \text{ [eV/T]}$$

➤ Il momento magnetico di una particella carica, di spin $s = \frac{1}{2}$ che non possieda una struttura interna (**una particella di Dirac**), e' dato da:

$$\mu = g \cdot \frac{e}{2M} \cdot \frac{\hbar}{2}$$

dove M e' la massa della particella ed il fattore g deriva dalla equazione di Dirac.

◆ Per particelle di Dirac cariche il fattore g deve essere esattamente uguale a 2, mentre per quelle neutre il momento magnetico si deve annullare.

Le misure sperimentali dei momenti magnetici, sia per gli elettroni che per i muoni, confermano, a meno di piccole deviazioni, il valore $g = 2$.

L' interazione magnetica e' associata alla inversione della direzione dello spin del nucleone ed introduce quindi, come visto, un fattore nella sezione d' urto che conterra' un termine del tipo $\sin^2 \theta/2$. Avremo:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\substack{\text{particella} \\ \text{puntiforme} \\ \text{spin-1/2}}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left(1 + 2\tau \cdot \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\tau = \frac{Q^2}{4M^2 c^2}$$

Il termine magnetico e' importante per grandi valori di θ .

Momenti magnetici anomali

◆ Il magnetismo nucleare e' generato dai momenti magnetici intrinseci dei singoli nucleoni e dai momenti magnetici associati ai loro moti orbitali.

◆ Il momento magnetico di una particella carica di spin $\frac{1}{2}$ che NON possiede una struttura interna (Particella di Dirac) e' dato da

$$\mu = g \times \frac{e}{2M} \times \frac{\hbar}{2}$$

dove M e' la massa della particella ed il fattore g deriva dalla equazione relativistica di Dirac.

Per particelle di Dirac cariche il fattore g deve essere esattamente uguale a 2 mentre per quelle neutre deve essere uguale a 0. Sperimentalmente, a parte correzioni di ordine superiore, per gli elettroni e I muoni si trova $g=2$.

Per I protoni e I neutroni si trova:

$$\begin{aligned} \mu_p &= + (2.7928456 \pm 0.0000011) \mu_N \\ \mu_n &= + (1.9130418 \pm 0.0000088) \mu_N \end{aligned} \quad \text{dove} \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p} \left(\frac{MeV}{T} \right)$$

◆ I nucleoni NON sono quindi particelle di Dirac. Come vedremo sono "composti" da quark ed i loro fattori g sono determinati dalla loro struttura INTERNA.

◆ I valori dello spin e dei momenti elettrici e magnetici dei nuclei sono determinati dai "nucleoni di valenza".

◆ In particolare tutti I nuclei con Z ed N pari hanno spin nullo.

Il momento magnetico anomalo

- ◇ I nucleoni invece NON sono particelle di Dirac, ma sono composti da quark. I loro fattori g saranno quindi determinati dalla loro struttura interna.

- I valori misurati per il protone ed il neutrone sono:

$$\mu_p = \frac{g_p}{2} \cdot \mu_N = +2.79 \cdot \mu_N$$

$$\mu_n = \frac{g_n}{2} \cdot \mu_N = -1.91 \cdot \mu_N$$

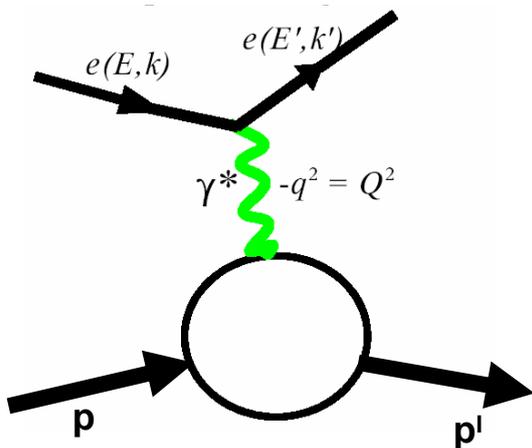
- dove il **magnetone nucleare** μ_N vale:

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p} = 3.1525 \cdot 10^{-14} \text{ MeV} \cdot T^{-1}$$

- ▲ Le distribuzioni di carica e di corrente, in analogia al caso dei nuclei, possono essere descritti per mezzo di fattori di forma: **sono necessari DUE fattori di forma !**

Scattering Elastico elettrone-protone

- Lo scattering elastico elettrone (muone)-protone, come lo scattering elastico elettrone-muone (vedi Burcham and Jobes) e' dominato dal contributo che viene dallo scambio di un singolo fotone, vedi figura di seguito.
- Tuttavia la differenza principale tra questi due processi e' che, mentre l'accoppiamento tra il fotone scambiato ed il muone e' ben noto, quello tra il fotone ed il protone non lo e' per niente.
Si possono tuttavia usare i calcoli del caso elettrone-muone e modificarli con opportuni fattori di forma che descrivono il "blob" γ -p in termini della distribuzione di carica e di momento magnetico dei nucleoni studiati. (vedi Burcham and Jobes)



- In aggiunta il protone non solo ha una carica elettrica, puntiforme o distribuita ce lo diranno i risultati sperimentali, ma, avendo uno spin, ci aspettiamo anche una distribuzione di momento magnetico:
- Inoltre sia gli elettroni, "la sonda", che i protoni, "la targhetta", hanno spin e quindi si deve generalizzare la sezione d' urto di Mott.

⇒ Sono necessari DUE FATTORI DI FORMA

I Fattori di Forma dei Nucleoni

➤ Per caratterizzare sia la distribuzione elettrica che quella magnetica sono necessari due fattori di forma e la sezione d'urto è data dalla

Formola di Rosenbluth:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rosenbluth}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot \left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau \cdot G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau \cdot G_M^2(Q^2) \cdot \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Dove: $G_E(Q^2) \equiv$ **Fattore di Forma Elettrico**

$G_M(Q^2) \equiv$ **Fattore di Forma Magnetico**

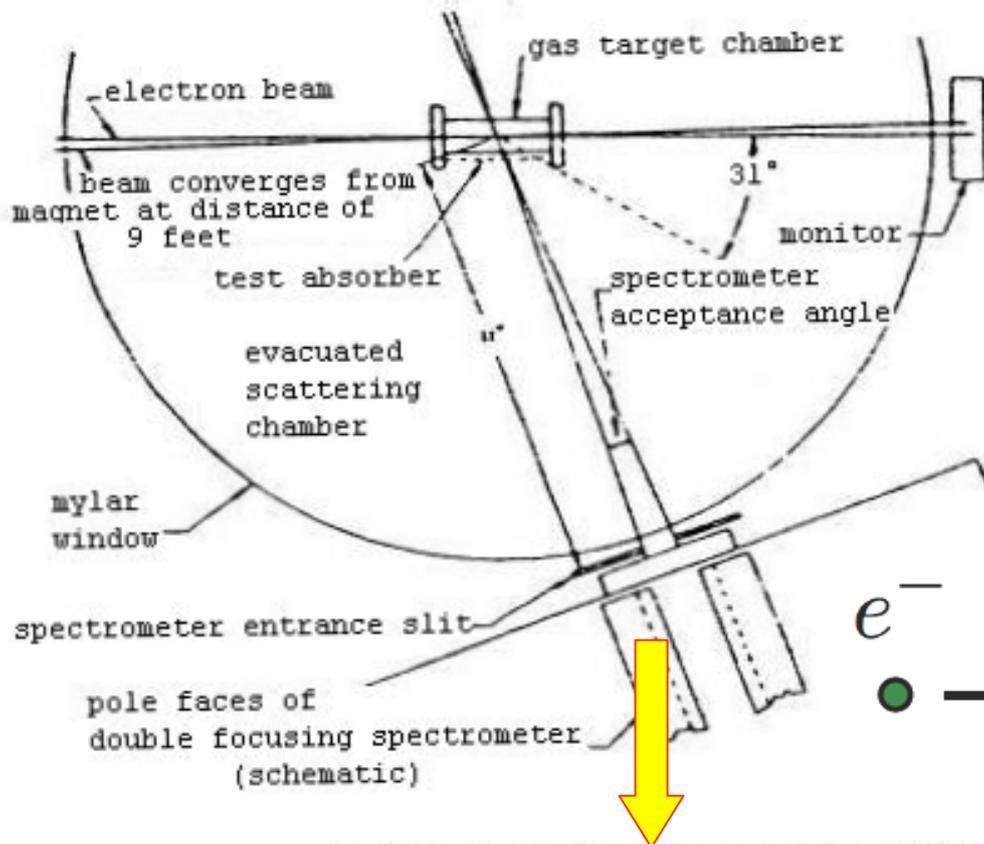
➤ La dipendenza dei fattori di forma da Q^2 , che si osserva sperimentalmente, ci permette di ricavare informazioni sulla distribuzione radiale di carica e sul momento magnetico dei nucleoni. Particolarmente interessante è il caso $Q^2 \rightarrow 0$. In questo limite G_E coincide con la carica elettrica del bersaglio, espressa in unità di carica elettrica elementare **e**, mentre G_M è uguale al momento magnetico **μ** del bersaglio, normalizzato al magnetone nucleare.

➤ **Si trovano i seguenti valori:**

Per il protone: $G_E^p(Q^2 = 0) = 1$ $G_M^p(Q^2 = 0) = +2.79$

Per il neutrone: $G_E^n(Q^2 = 0) = 0$ $G_M^n(Q^2 = 0) = -1.91$

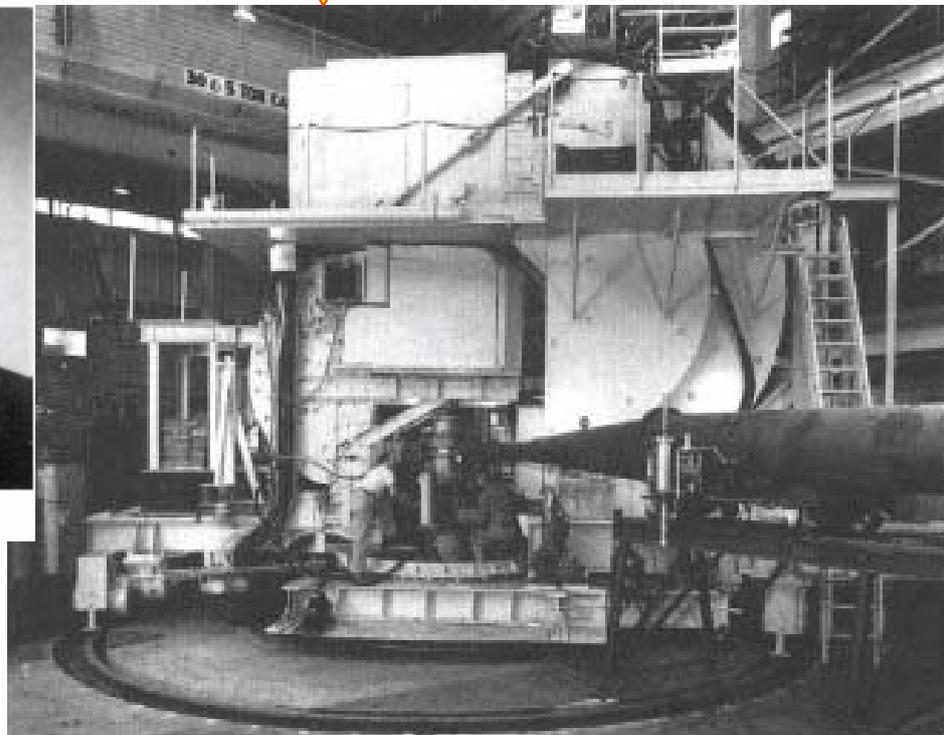
Spettrometro di Hofstadter (1956)



Dettagli della
targhetta di gas



Hofstadter



Hofstadter's spectrometer

15-4-2005

34

Struttura del Protone

Lo spettrometro di Hofstadter misura l'angolo e l'impulso dell'elettrone diffuso. L'angolo θ varia da 35 a 138 gradi.

Come abbiamo piu' volte sottolineato, nello scattering elastico E' e θ NON sono variabili indipendenti. Inoltre Q^2 e θ sono legati dalla relazione seguente:

$$Q^2 = 2EE'(1 - \cos \theta)$$

Per cui ad angoli diversi corrispondono diversi valori di Q^2 . Nella fig 1 sono mostrati tipici profili elastici ottenuti su una targhetta di gas idrogeno a 185 MeV. Mentre nella fig 2 vengono confrontati i risultati sperimentali con le aspettative dello scattering elastico.

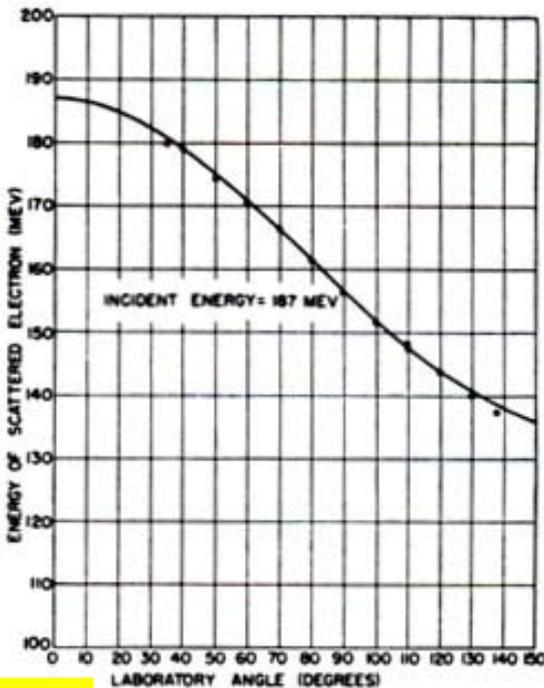


Fig 2 The solid line gives the theoretical energy of the electrons for an incident energy of 187 Mev. Relativistic kinematics are used to obtain the theoretical curve. The experimental points correspond to peak values of the elastic profiles and refer to experimental observations.

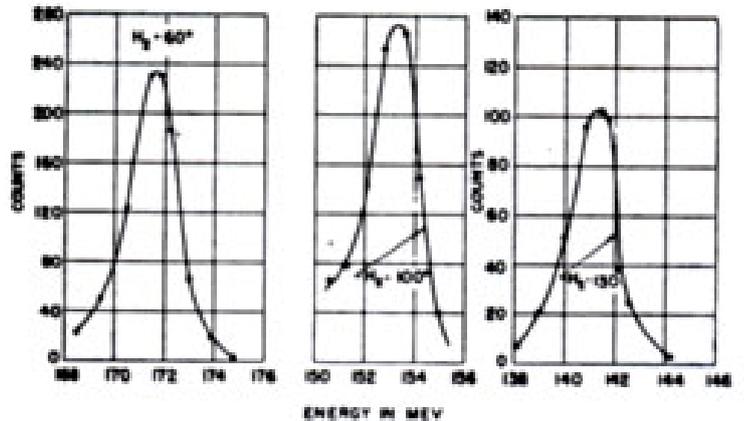


Fig 1 Typical elastic profiles obtained with hydrogen gas at 185 Mev.

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos \theta)}$$

Scattering elastico di elettroni su targhetta di idrogeno

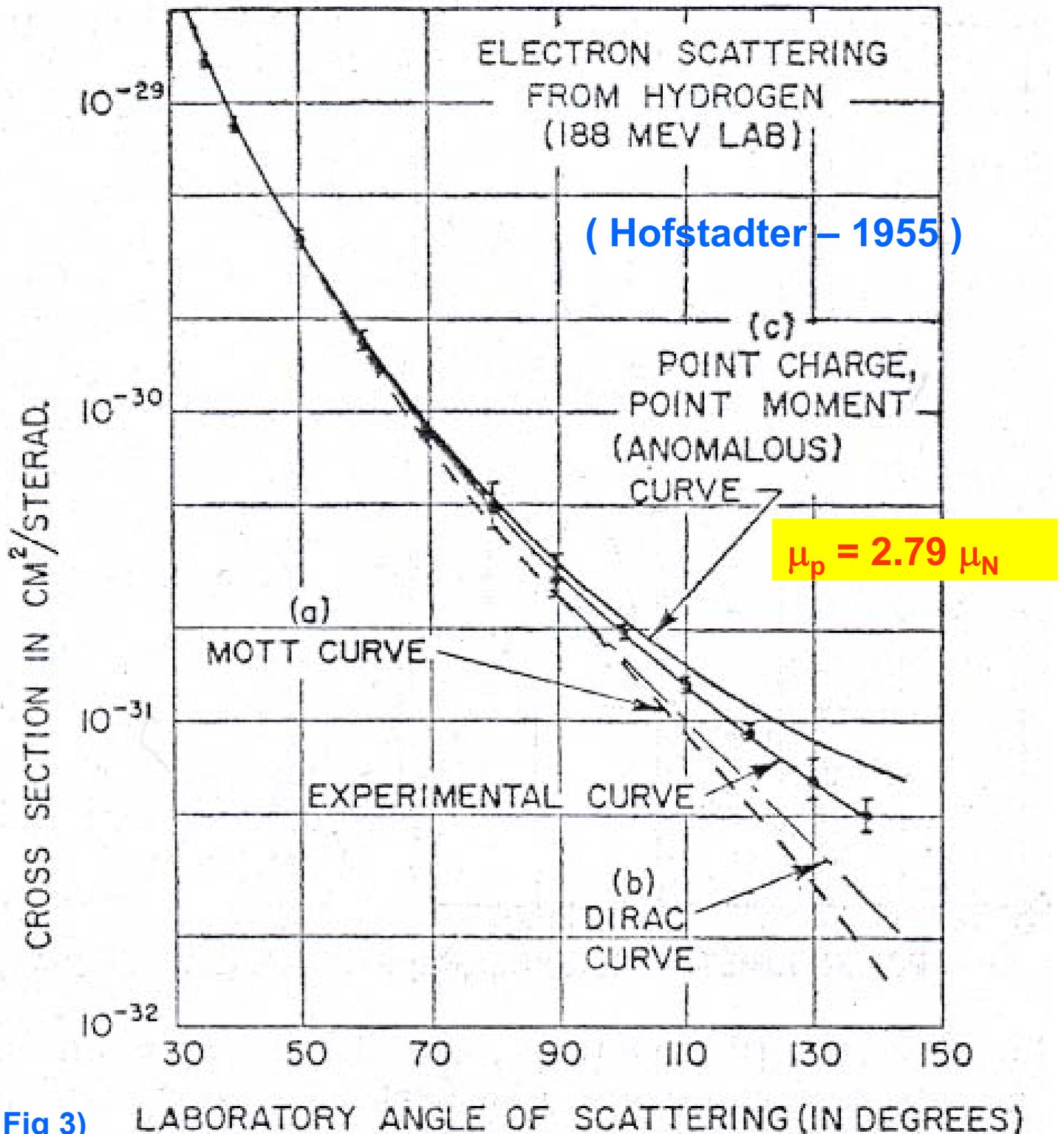


Fig 3) LABORATORY ANGLE OF SCATTERING (IN DEGREES)

15-4-2005

36

◆ Carica puntiforme e momento magnetico anomalo puntiforme del protone

Struttura del Protone

➤ Le misure di sezione d'urto differenziale per lo scattering di elettroni di 188 MeV su una targhetta di idrogeno, vedi Fig 3 della pagina precedente, mostrano che a grandi angoli di scattering le previsioni di Rosenbluth, anche tenendo conto dei momenti magnetici anomali, danno valori più alti di quelli sperimentali indicando che il protone ha una struttura composta.

$$\langle r_{\text{protone}} \rangle = (0.74 \pm 0.24) \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

$$\langle r_{\alpha} \rangle = (1.6 \pm 0.1) \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

I Fattori di Forma dei Nucleoni

➤ Per poter determinare indipendentemente $G_E(Q^2)$ e $G_M(Q^2)$ le sezioni d'urto devono essere misurate a valori di Q^2 prefissati MA variando l'angolo di diffusione θ : QUINDI VARIANDO L'ENERGIA DEL FASCIO ! Naturalmente per ciascun Q^2 $d\sigma/d\Omega$ è misurata in funzione di θ .

Le sezioni d'urto sperimentali, divise per la sezione d'urto di Mott e rappresentate in funzione di $\text{tg}^2(\theta/2)$, giacciono su una retta, vedi la Fig. 1 seguente, ed in accordo quindi con la formula di Rosenbluth.

➤ La pendenza della retta fornisce il valore $G_M(Q^2)$ mentre dalla sua intercetta a $\theta=0$ si può ricavare $G_E(Q^2)$. Ripetendo la misura a diversi valori di Q^2 possiamo determinare l'andamento dei fattori di forma in funzione di Q^2 .

I Fattori di Forma dei Nucleoni

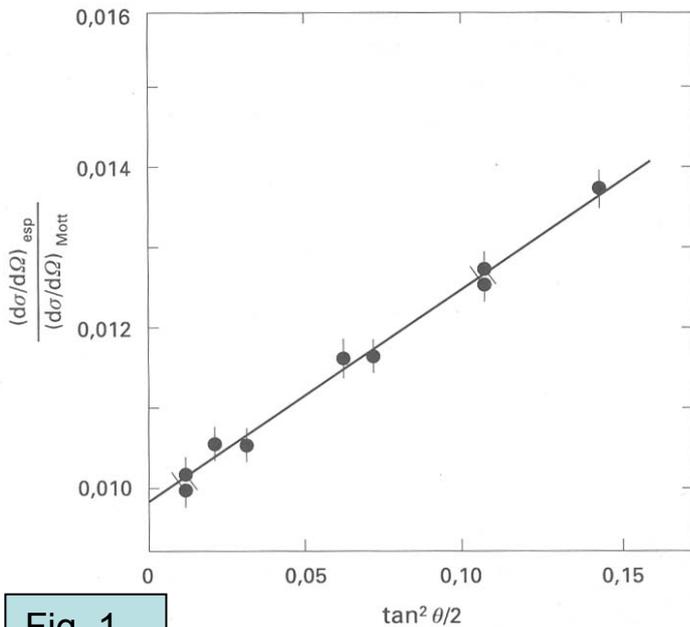


Fig. 1

Rapporto fra la sezione d'urto misurata e la sezione d'urto di Mott $\sigma_{\text{esp}}/\sigma_{\text{Mott}}$ in funzione di $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ per un valore di $Q^2 = 2.5 \text{ GeV}^2/c^2$ [Ta67].

- Alla fine degli anni 60 a SLAC vennero fatte molte misure dei fattori di forma elettromagnetici fino a valori di Q^2 molto elevati.

La Fig. 2 mostra i risultati:

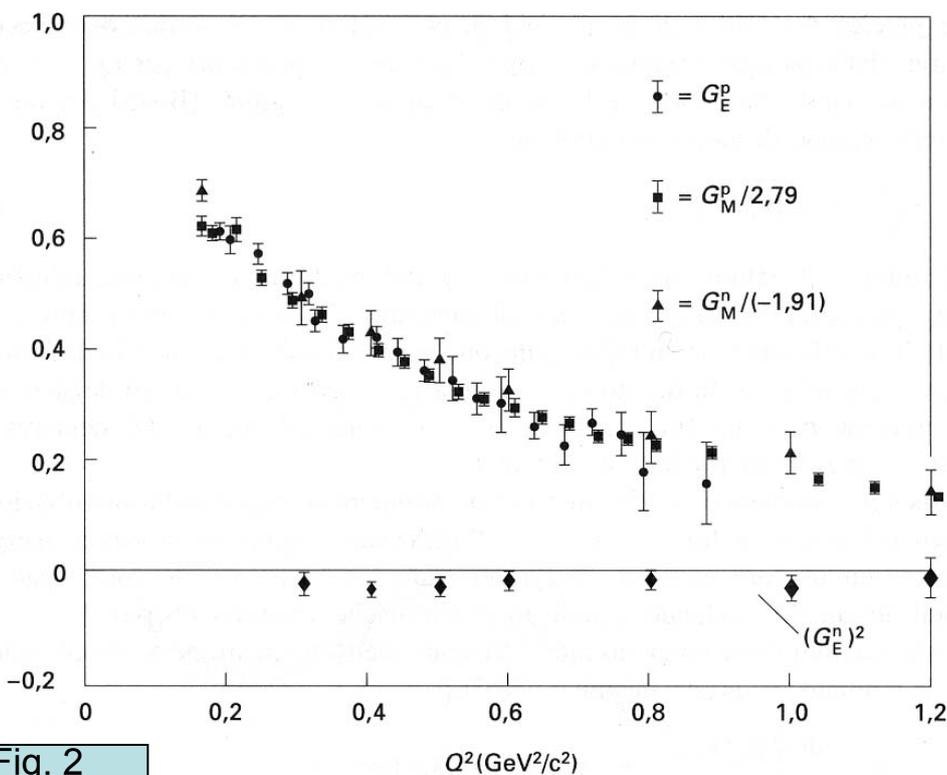


Fig. 2

I fattori di forma elettrico e magnetico del protone e del neutrone in funzione di Q^2 . I valori sperimentali sono stati divisi per i fattori indicati nel diagramma, il che porta i punti a sovrapporsi, dimostrando così chiaramente l'andamento globale di tipo dipolare [Hu65].

I Fattori di Forma dei Nucleoni (8)

- Come e' evidente dalla Fig. 2, il fattore di forma elettrico del protone e quelli magnetici sia del protone che del neutrone hanno una dipendenza da Q^2 molto simile descritta abbastanza accuratamente dal cosiddetto

“ andamento di dipolo ”:

$$G_E^p(Q^2) = \frac{G_M^p(Q^2)}{2.79} = \frac{G_M^n(Q^2)}{-1.91} = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71(\text{GeV}/c)^2} \right)^{-2}$$

- dove

$$G^{\text{dipolo}}(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71(\text{GeV}/c)^2} \right)^{-2}$$

- Dalla dipendenza da Q^2 dei fattori di forma possiamo ricavare, come nel caso dei nuclei, le distribuzioni di carica dei nucleoni ed i loro momenti magnetici. Tuttavia l' interpretazione dei fattori di forma come la trasformata di Fourier della distribuzione di carica statica e' corretta solo per piccoli valori di Q^2 . Difatti solo in queste condizioni il tri-impulso ed il quadri-impulso trasferiti sono approssimativamente uguali.

- Come visto per i nuclei, l' andamento di tipo dipolare del fattore di forma corrisponde ad una distribuzione di carica che diminuisce esponenzialmente al crescere della distanza:

$$\rho(r) = \rho(0) \bullet e^{-a \cdot r} \quad \text{Con } a = 4.27 \text{ fm}^{-1}$$

- I nucleoni quindi NON sono ne' particelle puntiformi ne' sfere omogeneamente cariche, ma piuttosto sistemi diffusi. Il raggio quadratico medio della distribuzione di carica del protone e quelli delle distribuzioni di momento magnetico del protone e del neutrone sono praticamente uguali. Essi possono essere estratti dalla pendenza delle distribuzioni $G_{E,M}(Q^2)$ calcolate a $Q^2=0$. Dal fit di tipo dipolare si ricava

$$\langle r^2 \rangle_{\text{dipolo}} = -6\hbar^2 \frac{dG^{\text{dipolo}}(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0} = \frac{12}{a^2} = 0.66 \bullet \text{fm}^2$$

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_{\text{dipolo}}} = 0.81 \bullet \text{fm}$$

I Fattori di Forma dei Nucleoni

⇒ Le misure dei fattori di forma si dividono in modo conveniente in tre regioni di q^2 :

i) basso q^2 : $q \ll M$: in questa regione G_E domina la sezione d'urto e possiamo misurare in modo preciso il raggio della carica elettrica:

$$r_E = 0.85 \pm 0.02 \text{ fm}$$

ii) $0.02 \leq q^2 \leq 3 \text{ GeV}^2$: in questa regione G_E e G_M danno entrambe un contributo importante;

iii) Alto q^2 : $q^2 \geq 3 \text{ GeV}^2$: G_M domina la sezione d'urto.

NOTA BENE : Se il protone fosse una particella puntiforme avremmo:

$$G_E(Q^2) = 1$$

$$G_M(Q^2) = 2,79$$

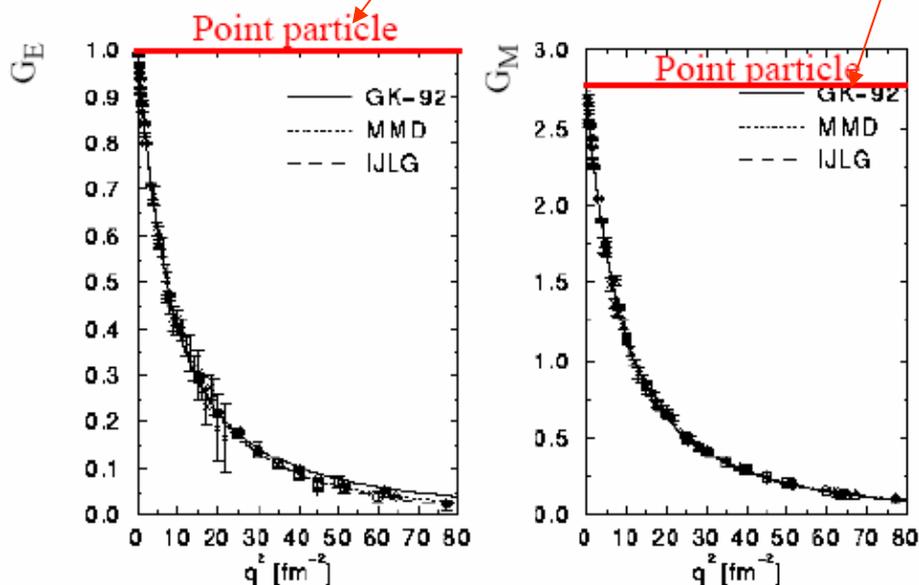
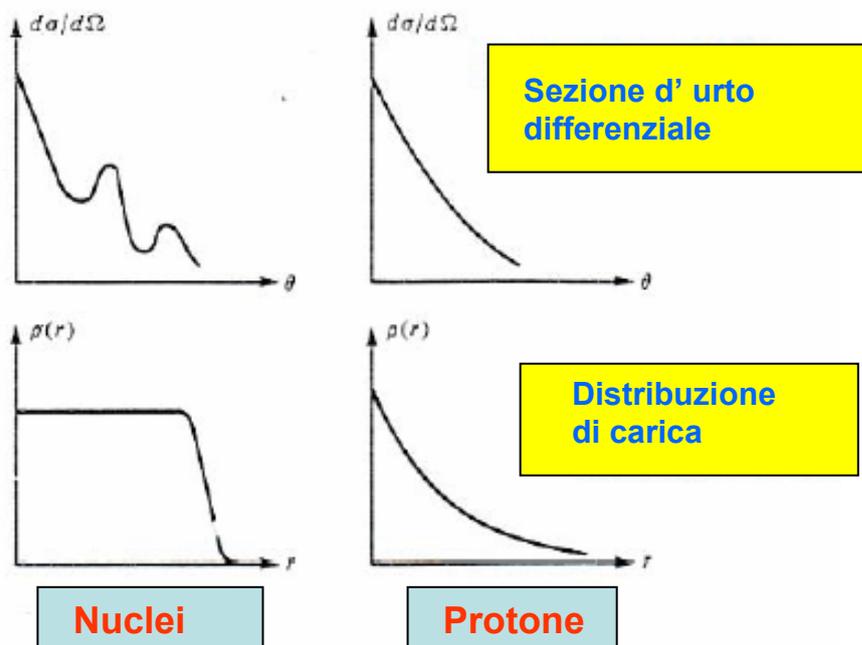


Figure 73: Electric and magnetic proton form-factors, compared with different parameterizations.

I Fattori di Forma dei Nucleoni (9)

- Sottolineiamo alcune importanti differenze che abbiamo misurato tra nuclei ed il protone :
 - i) I nuclei hanno una superficie relativamente “sharp” che fa si che lo andamento delle sezioni d’ urto sia simile a quello dei fenomeni diffrattivi;
 - ii) I protoni hanno una distribuzione di carica, nel volume che occupano, molto piu’ diffusa di quella corrispondente dei nuclei. Gli esperimenti ad altissimi valori di Q^2 avranno la risoluzione necessaria allo studio dei dettagli di questa distribuzione.



- La formula di Rosenbluth descrive lo scattering **ELASTICO** ep : il protone dopo l’ urto **RIMANE PROTONE** !
- Ma avendo stabilito che il protone ha una struttura interna ne segue che e’ possibile :
 - 1) lo scattering elastico: $ep \rightarrow ep$
 - 2) eccitare I costituenti del protone: $ep \rightarrow e\Delta^+ \rightarrow ep\pi^0$ (inelastico esclusivo)
 - 3) rompere il protone: $ep \rightarrow Xe$ (inelastico inclusivo)

La Diffusione Quasi-Elastica

- Abbiamo fino ad ora considerato lo scattering elastico di elettroni su protoni (neutroni) liberi (quasi liberi). In questo tipo di reazione, per una fissata energia E del fascio e per un fissato angolo di scattering θ , gli elettroni emergono con una energia definita dalla:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos \theta)}$$

- Ripetendo l' esperimento con stessa E e θ , ma su nuclei con diversi nucleoni, si trovano spettri di energia molto piu' complessi: nella figura di seguito e' mostrato il caso su una targhetta di H_2O .

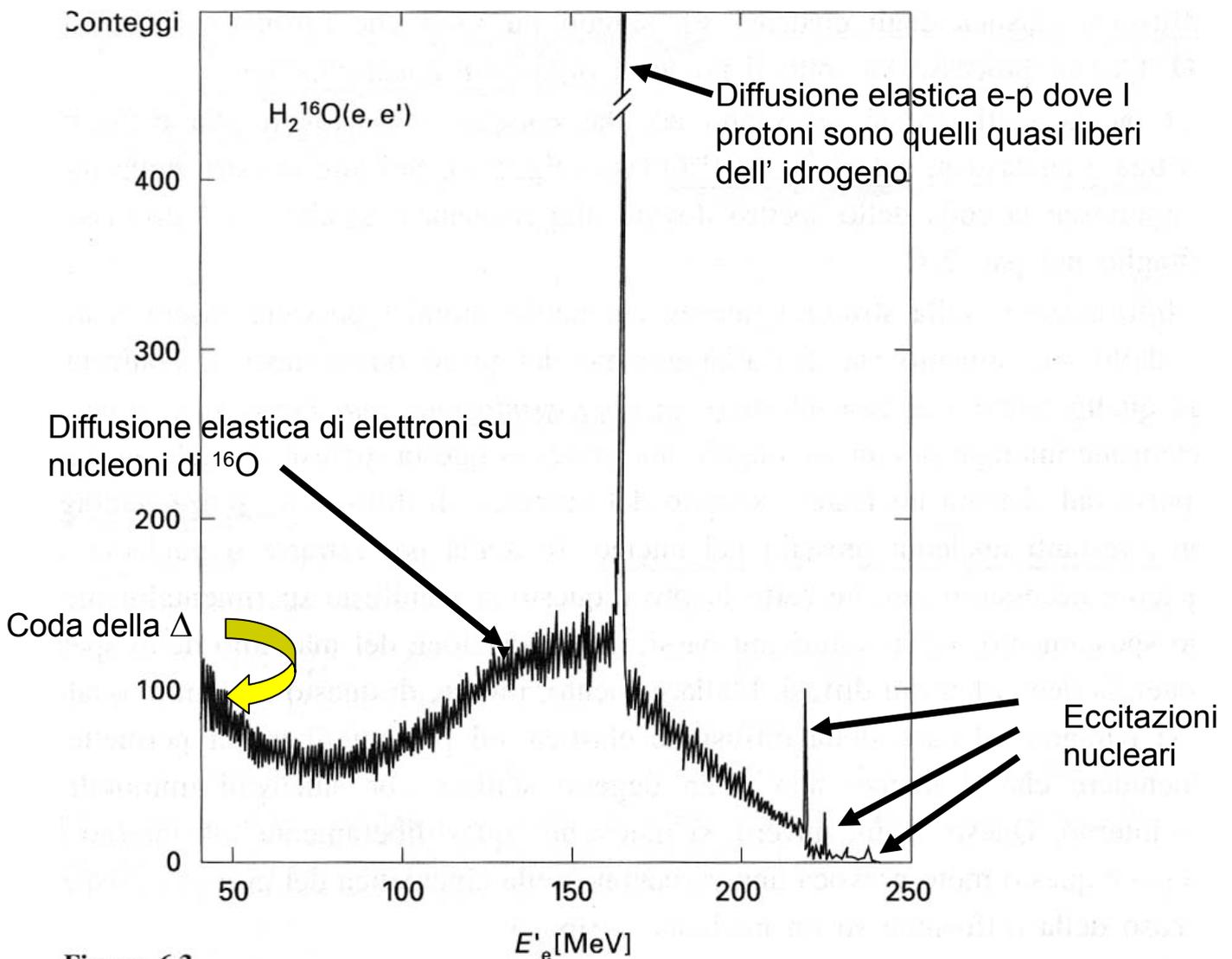


Figura 6.3

Spettro in energia degli elettroni diffusi su un bersaglio sottile di H_2O . La misura è stata effettuata all'acceleratore lineare MAMI-A di Mainz, ad una energia di fascio di 246 MeV e ad un angolo di diffusione di 148.5° .

La diffusione inelastica elettrone-protone

➤ Per capire meglio gli argomenti che hanno portato alla scoperta dei costituenti del protone, riprendiamo un esempio dalla fisica nucleare. In modo specifico consideriamo lo scattering di elettroni da 400 MeV di energia incidente su nuclei di elio ${}^4\text{He}$ ed analizziamo in fig 1a la sezione d'urto, in unita' arbitrarie, per elettroni diffusi a 45° nel laboratorio in funzione di $x=Q^2/(2M_\alpha v)$, (Hofstadter et al 1956).

➤ A $x=1$ vediamo un picco ben pronunciato dovuto allo scattering coerente degli elettroni sui nuclei di elio. A valori piu' piccoli di x , e quindi a piu' grandi valori di energia trasferita al nucleo, e' visibile un picco molto piu' largo dovuto allo scattering quasi-elastico incoerente sui costituenti individuali del nucleo, cioe' i 4 nucleoni del nucleo di elio che in letteratura viene anche chiamato scattering inelastico sul nucleo. Per confronto e' mostrato il picco corrispondente a scattering elastico su nucleoni liberi. Il picco inelastico e' allargato dal moto di Fermi dei nucleoni legati nel volume nucleare. La massa effettiva di ciascun nucleone in ${}^4\text{He}$ sara' circa $m=M_\alpha/4$ per cui se lo scattering elastico avvenisse sui singoli nucleoni dovrebbe corrispondere a $x=Q^2/(2mv)$. Quindi dovremmo avere il picco a $x=m/M_\alpha \cong 1/N$. Dove N e' il numero di nucleoni del nucleo (4 in questo caso).

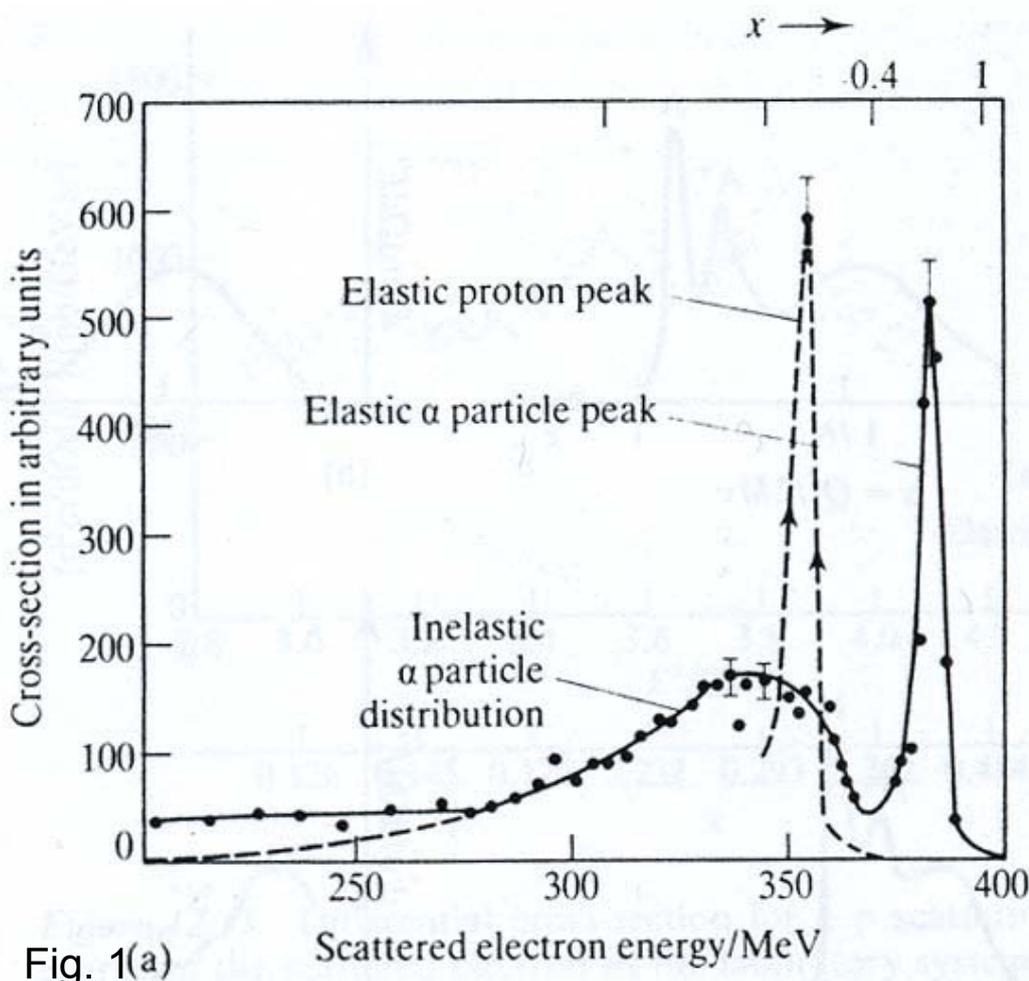


Fig. 1(a)

La diffusione inelastica elettrone-protone

➤ Nella Fig 1b abbiamo ancora le sezioni d' urto elastiche ed inelastiche, di nuovo a 400 MeV , ma ad un angolo $\theta=60^\circ$ che corrisponde quindi ad un piu' alto valore di Q^2 . La prima cosa da notare e' che la sezione d' urto elastica si e' notevolmente ridotta mentre quella inelastica e' essenzialmente indipendente da Q^2 . Questo e' il tipico comportamento dello scattering su particelle puntiformi cioe': **senza struttura interna**. Naturalmente fino alla scala corrispondente al valore del Q^2 scambiato: per valori di Q^2 piu' elevati la sonda diventa sensibile ad eventuali nuove strutture.

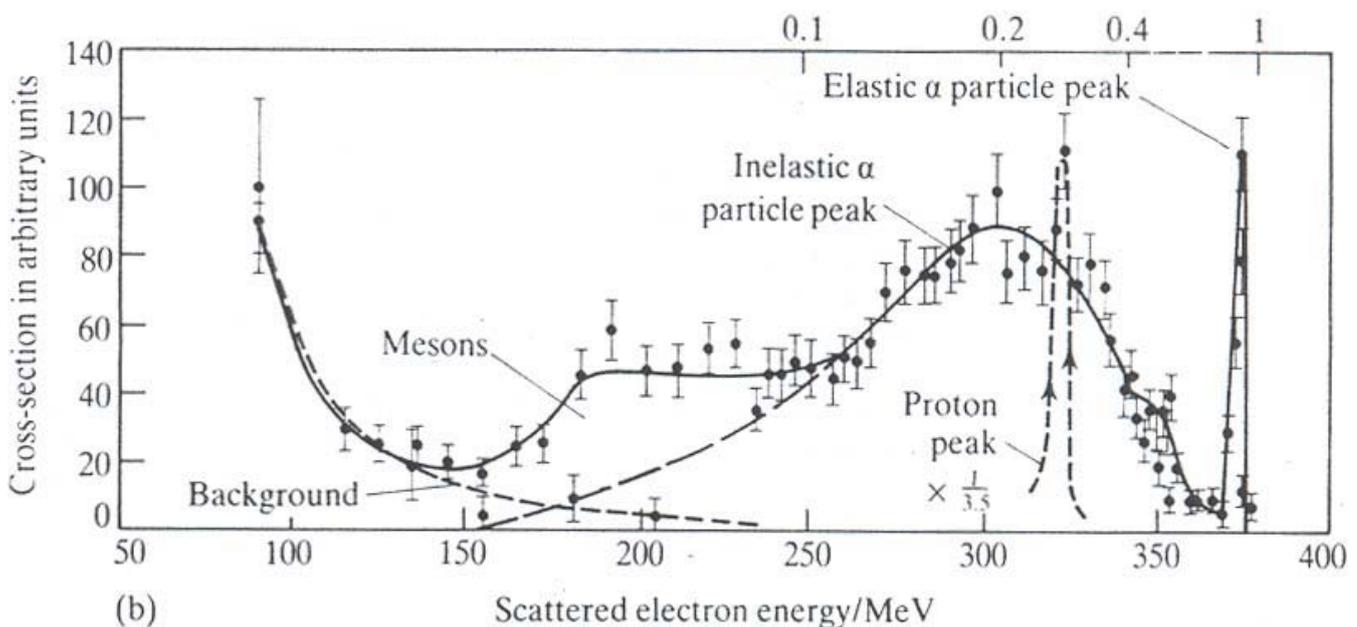


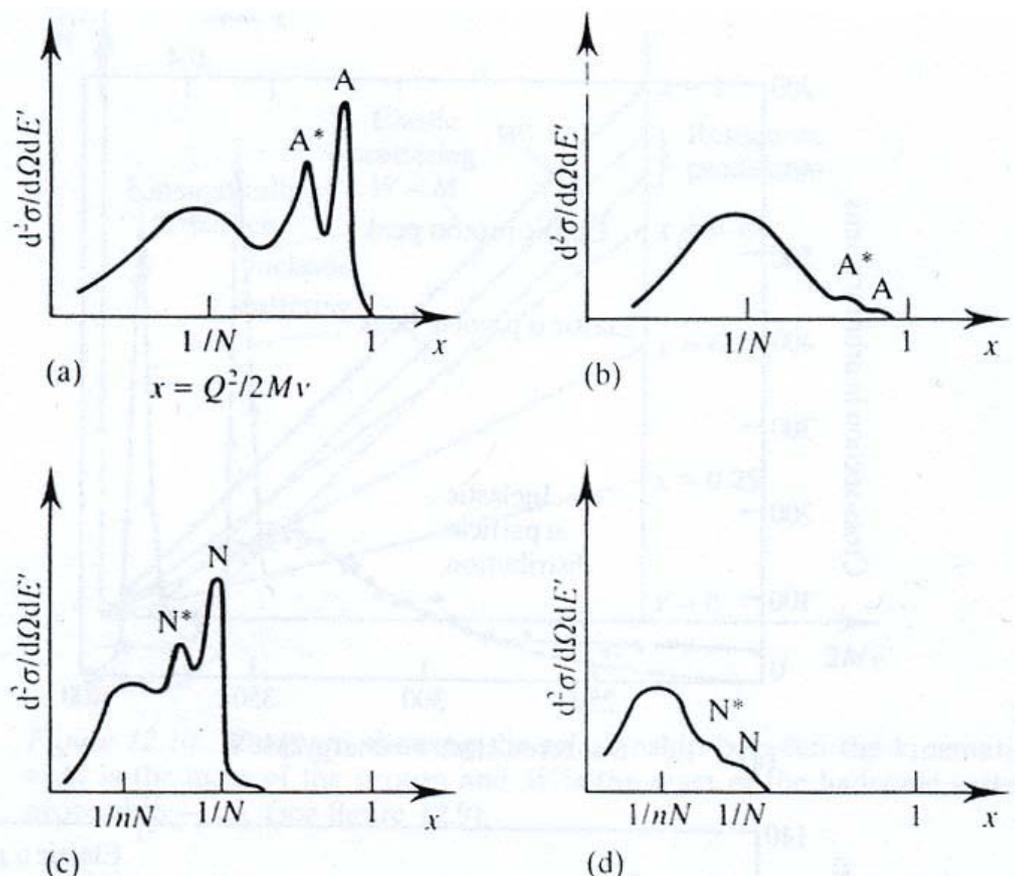
Fig 1 (b) Cross-sections for the elastic and inelastic scattering of 400 MeV electrons by ${}^4\text{He}$ nuclei as a function of x . The scattering angle of the electrons in the laboratory system is 45° in part (a) and 60° in part (b). (After Hofstadter R 1956 *Rev Mod Phys* 28 (214).)

La diffusione inelastica elettrone-protone

➤ Se per esempio consideriamo un fattore di forma dipolare

$F(Q^2) = 1/(1+Q^2/\Lambda_{\text{nucleo}}^2)$, in questa espressione Λ_{nucleo} fissa la scala ed anche il comportamento della sezione d'urto proprio attraverso il fattore di forma.

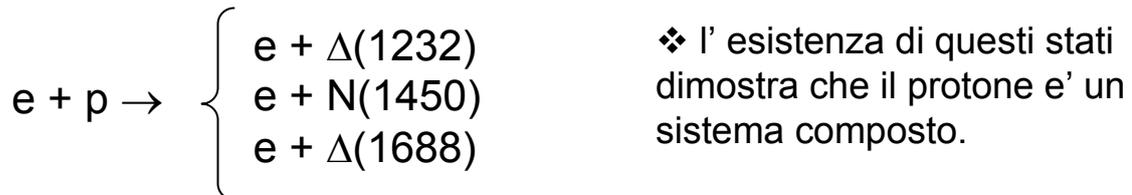
Per $Q^2 \ll \Lambda_{\text{nucleo}}^2$ $F(Q^2) \rightarrow 1$ ed in questa situazione la sonda elettromagnetica ha una lunghezza d'onda molto lunga rispetto alla scala ed è quindi insensibile ai dettagli della struttura interna della targhetta: **lo scattering avviene come su una particella puntiforme**. All'aumentare di Q^2 la sezione d'urto elastica decresce come $1/Q^8$ ed entra in gioco una scala diversa $\Lambda_{\text{nucleone}}$. Ma di nuovo se $Q^2 \ll \Lambda_{\text{nucleone}}^2$ la sonda non può rivelare nessuna eventuale struttura interna del nucleone e la sezione d'urto inelastica avrà luogo come se i nucleoni fossero particelle puntiformi: la sezione d'urto inclusiva scala. Possiamo immaginare di continuare questa procedura supponendo che vi sia una scala definitiva Λ_0 al di là della quale non vi siano più strutture. Non appena $Q^2 > \Lambda_{\text{nucleone}}^2$, la sezione d'urto elastica e-nucleone diventerà più piccola e quella inelastica avrà il sopravvento. Se ci sono n costituenti del nucleone il picco inelastico apparirà a $x=1/(nN)$ di nuovo allargato dal moto di Fermi dei costituenti. La sezione d'urto di scattering sui costituenti del nucleone rimarrà costante all'aumentare di Q^2 e, se non ci dovesse essere un'altra scala, la costanza della sezione d'urto all'aumentare di Q^2 indicherebbe appunto l'assenza di ulteriori sottostrutture. Questo comportamento è riassunto dalla Fig 1c. Notiamo di nuovo lo spostamento graduale del picco inclusivo a valori tanto più bassi di x quanto più costituenti sono rivelati.



15-4-2005
Fig. 1(c)

La diffusione inelastica elettrone-protone

➤ Consideriamo ora lo scattering di elettroni su atomi di idrogeno. Nella Fig. 2 di seguito sono mostrati risultati ottenuti all' elettrosincrotrone di Desy da Bartel et al. Questi dati sono a valori molto più alti di Q^2 di quelli appena analizzati su nuclei di elio ma la somiglianza con le Fig. 1a ed 1b è innegabile. Accanto al picco elastico a $x=1$, sono chiaramente visibili a valori di x più bassi i picchi che corrispondono alla eccitazione delle risonanze del protone attraverso i processi:



➤ Al di là delle risonanze, a più alte energie trasferite al protone (valori più bassi di x), vediamo un' ampia zona continua che, in analogia con lo scattering elettrone-nucleo di elio interpretiamo come scattering incoerente con i costituenti del protone. A valori ancora più alti di Q^2 il picco elastico e quelli delle risonanze diminuiscono ma lo scattering quasi elastico, che abbiamo chiamato inclusivo, non cambia: la sezione d'urto inclusiva scala indicando che lo scattering avviene con costituenti puntiformi. Si osserva una grande produzione di adroni ma NON dei costituenti del protone: NON c'è analogia con il picco quasi elastico dovuto all'urto con i costituenti del nucleo che, a causa dell'urto, vengono espulsi dallo stesso: qualsiasi siano gli oggetti dentro il protone essi NON vengono mai buttati fuori: **sono confinati nel protone.**

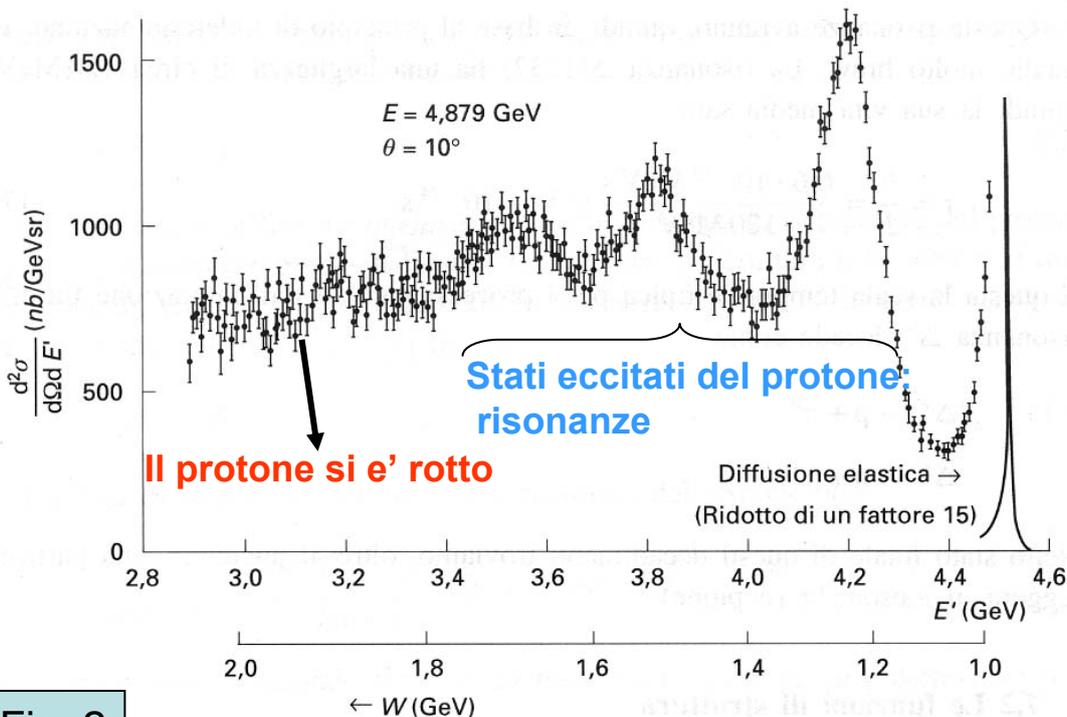


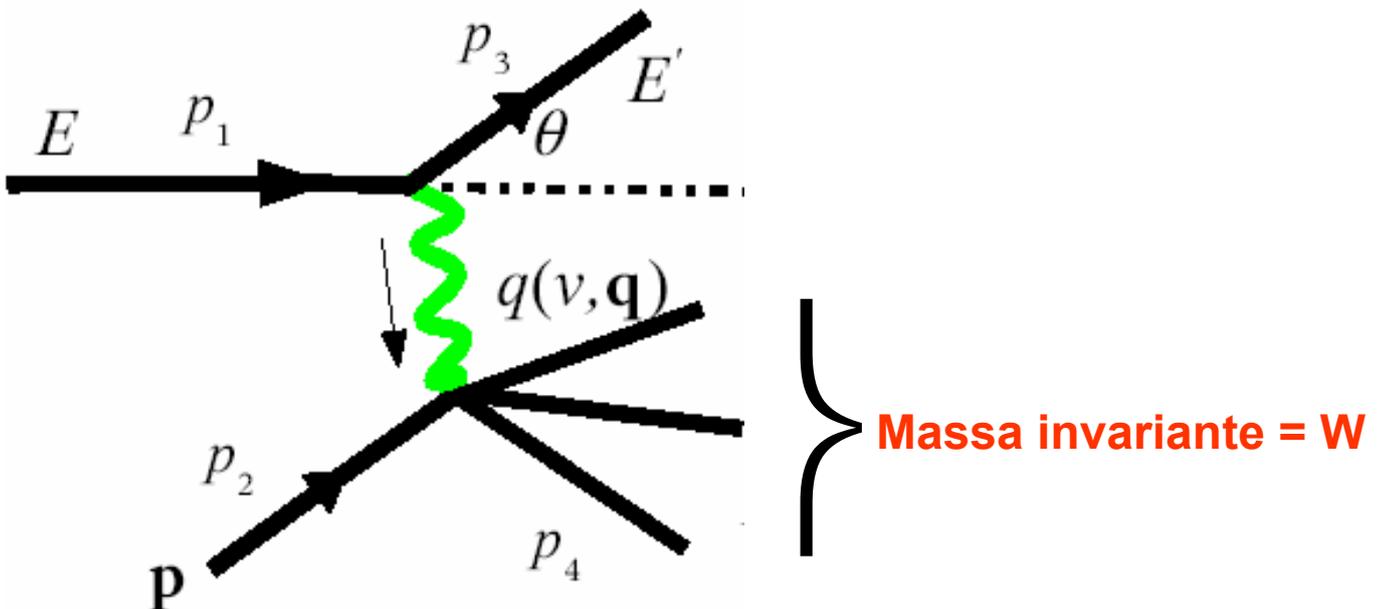
Fig. 2

Spettro degli elettroni diffusi nell'urto elettrone-protone. L'energia degli elettroni incidenti è $E = 4.879 \text{ GeV}$ e l'angolo di diffusione è $\theta = 10^\circ$ (da [Ba68]).

La diffusione inelastica elettrone-protone

➤ A grandi valori di q^2 la sezione d'urto elastica e-p diventa molto piccola e lo scattering inelastico diventa molto più probabile. Consideriamo il processo $ep \rightarrow eX$, dove X è un qualsiasi sistema di adroni. Come abbiamo già detto per valori relativamente bassi di q^2 il protone si trova eccitato in stati risonanti che di seguito decadono, per esempio, in un nucleone ed un pione. A valori di q^2 molto più elevati l'energia trasferita al protone può essere così grande da romperlo in molti adroni perdendo così completamente la sua identità'.

➤ Come nel caso elastico assumiamo che il meccanismo dominante è quello di scambio di un singolo fotone. Il diagramma di Feynman che descrive il processo è schematizzato nella figura che segue



La diffusione inelastica elettrone-protone

➤ in generale sperimentalmente ci si disinteressa del sistema adronico e si misura solo l' energia e l' angolo dell' elettrone diffuso. La sezione d' urto così misurata e' chiamata **sezione d' urto inclusiva**.

➤ Nel caso dello scattering elastico l' energia trasferita $\nu = E - E'$ ed il quadri-momento trasferito q^2 sono legati dall' espressione $\nu = -q^2/2M$ e sono quindi **variabili NON indipendenti**.

➤ Al contrario, **nello scattering inelastico ν e q^2 sono variabili scalari indipendenti** perche' dalla conservazione dell' energia e dell' impulso al vertice adronico abbiamo:

$$p_4 = p_2 + q \text{ e quindi } p_4^2 = p_2^2 + 2p_2 \cdot q + q^2 \quad Q^2 = 2M\nu + M^2 - W^2$$

Dove p_4^2 non e' altro che la massa invariante quadrata, diciamo W^2 , del sistema adronico, e abbiamo posto $p_2 \cdot q = M \cdot \nu$ e $-q^2 = Q^2$.

Poiche' la massa invariante del sistema adronico puo' variare, ne segue che Q^2 (e quindi q^2) e ν sono variabili indipendenti

➤ E' conveniente introdurre la variabile:

$x = Q^2/(2M\nu)$: variabile di scala di Bjorken.

x e' adimensionale e relativisticamente invariante ed avra' un ruolo molto importante in quello che segue.

La cinematica dello scattering inclusivo (1)

→ Sottolineiamo ancora alcuni aspetti importanti della cinematica dello scattering e-p:

◆ una scelta conveniente di variabili cinematiche e' data da:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad (s \text{ e' considerata fissa})$$

$$q^2 = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 = -Q^2$$

$$v = \frac{p_2 q}{M_p} \quad x = \frac{Q^2}{2Mv} \quad y = \frac{p_2 q}{p_2 p_1}$$

◆ Abbiamo quindi introdotto 4 variabili Lorentz invarianti, piu' s che e' considerata fissa, per descrivere lo scattering inelastico.

★ **Solo due tra Q, v, x, e y sono indipendenti**

◆ Nella diffusione elastica, come piu' volte sottolineato, fissata l' energia del fascio, RIMANE SOLO UN PARAMETRO LIBERO.

Se per esempio scegliamo ϑ , fissato ϑ , TUTTO E' DETERMINATO:

$W = M$; $2Mv - Q^2 = 0$ etc.

◆ Nei processi anelastici invece, l' **ENERGIA DI ECCITAZIONE O DI ROTTURA DEL PROTONE AGGIUNGE UN ULTERIORE GRADO DI LIBERTA'**: le sezioni d' urto e le funzioni di struttura, vedi in seguito, saranno quindi funzioni di DUE PARAMETRI INDIPENDENTI.

Per esempio $\{E'; \vartheta\}$ oppure $\{Q^2; v\}$ etc.

Essendo inoltre $W > M$, avremo $2Mv - Q^2 > 0$

La cinematica dello scattering inclusivo (2)

➤ Studiamo l'intervallo di variabilità di Q^2 e ν :

1) ν e' un invariante relativistico e, nel sistema del Lab, vale $E - E'$ per cui: $E \geq \nu \geq 0$;

$$2) \quad q^2 = 2m_e^2 c^2 - 2 \left(\frac{EE'}{c^2} - |\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_3| \cos \theta \right) \cong - \frac{4EE'}{c^2} \sin^2 \theta$$

In generale $p_1 p_3 \geq m_e^2 c^2$. Quindi $\frac{EE'}{c^2} - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 \geq m_e^2 c^2 \Rightarrow q^2 \leq 0$

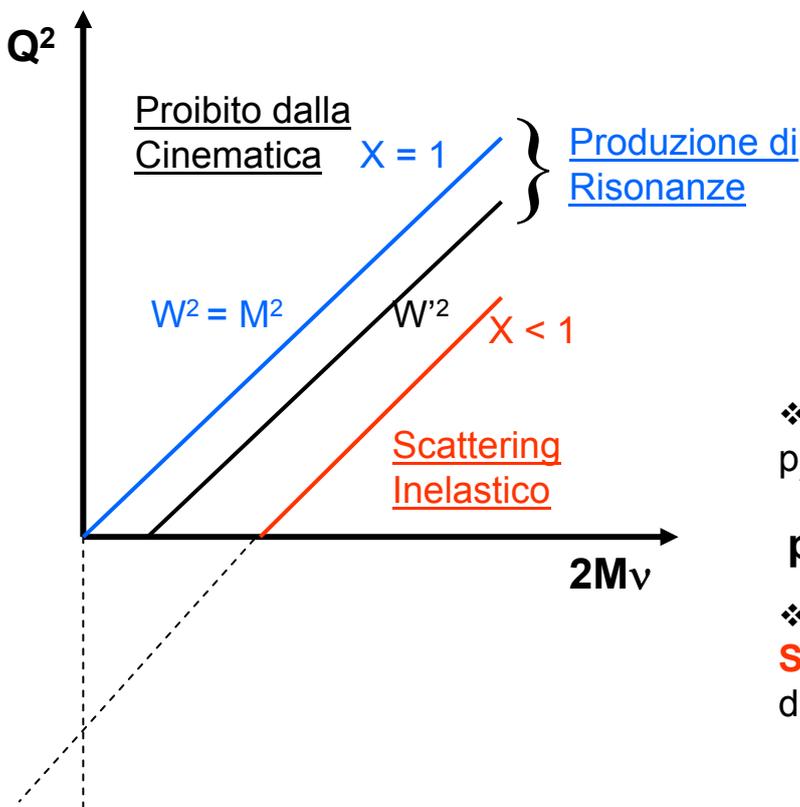
➤ In generale definiamo : $Q^2 = -q^2$

➤ Cerchiamo di analizzare le relazioni che legano le variabili cinematiche Q^2 , ν e x ; come abbiamo ricavato:

$$p_4^2 = p_2^2 + 2p_2 * q + q^2 \quad \text{da cui}$$

$$Q^2 = 2M\nu + M^2 - W^2$$

◆ Questa relazione e' plottata nella fig di seguito:



❖ **Nota Bene:** I quadri impulsi p_1 , p_2 e p_3 sono sempre nel mass shell:

$$p_1^2 = p_3^2 = m_e^2 c^2 ; p_2^2 = M_p^2 c^2$$

❖ Mentre p_4 sara' nel mass shell **SOLTANTO** nel caso particolare dello scattering elastico.

La cinematica dello scattering inclusivo (3)

i) Per $x = 1$ abbiamo $Q^2 = 2Mv$ e quindi $W^2 = M^2$

ii) Per $Q^2 = 0$ abbiamo $\frac{W^2 - M^2}{2M} = v$

iii) Per $v = 0$ abbiamo: $Q^2 = M^2 - W^2 = -(W^2 - M^2)$

➤ Riassumendo:

➤ Nello scattering elastico abbiamo $W = M$ per cui $Q^2 = 2Mv$ e quindi $x = 1$: questo e' rappresentato dalla retta a 45° . Naturalmente la regione sopra questa retta e' **cinematicamente proibita**.

➤ Lo scattering inelastico corrisponde a $W^2 > M^2$ e quindi $Q^2 < 2Mv$ e quindi alla regione al di sotto della retta corrispondente allo scattering elastico, $x=1$.

➤ Le linee parallele a quella con $x= 1$ corrispondono alla produzione di una risonanza, un sistema di adroni con massa invariante W fissa (per esempio la elettroproduzione di uno stato risonante del nucleone targhetta).

➤ Ed infine la regione per cui $W > M$ (risonanze) e' nota come la regione del "**deep inelastic scattering** ": $2Mv - Q^2 > 0$ da cui: $0 < x < 1$

➤ Quindi **la REGIONE CINEMATICA PERMESSA** e' tra la retta con $x = 1$ e l'asse delle ascisse. Si noti che nel caso elastico gli invarianti relativistici si riducono a due perche' $Q^2 = 2Mv$.

Esperimenti di scattering in questa regione sono stati e sono ancora oggi di estrema importanza per rivelare la struttura interna dei protoni, dei quark etc. Come vedremo questi esperimenti hanno dimostrato che il protone e' costituito di particelle puntiformi : I partoni.

La diffusione inelastica elettrone-protone

➤ In analogia con il caso dello scattering elastico, formula di Rosenbluth, la sezione d'urto differenziale per lo scattering inelastico di un elettrone con energia nell'intervallo $E' - E'+dE'$ e nell'angolo solido $d\Omega$, e' :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott}^* \left[W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2 \frac{\vartheta}{2} \right]$$

dove

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott}^* = \frac{4Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 E'^2}{|qc|^4} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$$

Essendo $Z_p = 1$, in unita' naturali si ha :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right]$$

➤ Nello scattering inelastico le funzioni W_1 e W_2 , che sostituiscono i fattori di forma G_E e G_M , sono funzioni di due variabili indipendenti Q^2 e ν e sono comunemente chiamate **Funzioni di Struttura**. Anche qui il secondo termine della formula sotto parentesi quadra contiene l'informazione sull'interazione magnetica.

Le due funzioni di struttura adimensionali W_2 e W_1 parametrizzano l'interazione inelastica fotone-protone rispettivamente nello stesso modo di come G_E e G_M parametrizzano l'interazione fotone-protone nello scattering elastico.

La diffusione inelastica elettrone-protone

➤ I primi esperimenti di diffusione profondamente elastica furono fatti alla fine degli anni 60 a SLAC, utilizzando un acceleratore lineare di elettroni in grado di fornire una energia massima pari a 25 GeV, vedi Fig 1).

La fig. 2) mostra una foto in cui in primo piano si vede lo spettrometro a 8 GeV e nello sfondo quello a 20 GeV.

Nella fig. 3) e' mostrato il disegno dello schema orizzontale dei due spettrometri. Mentre nella fig. 4) sono mostrati i disegni degli schemi, in sezione verticale ed orizzontale, dello spettrometro a 8 GeV.



Wolfgang Panofsky

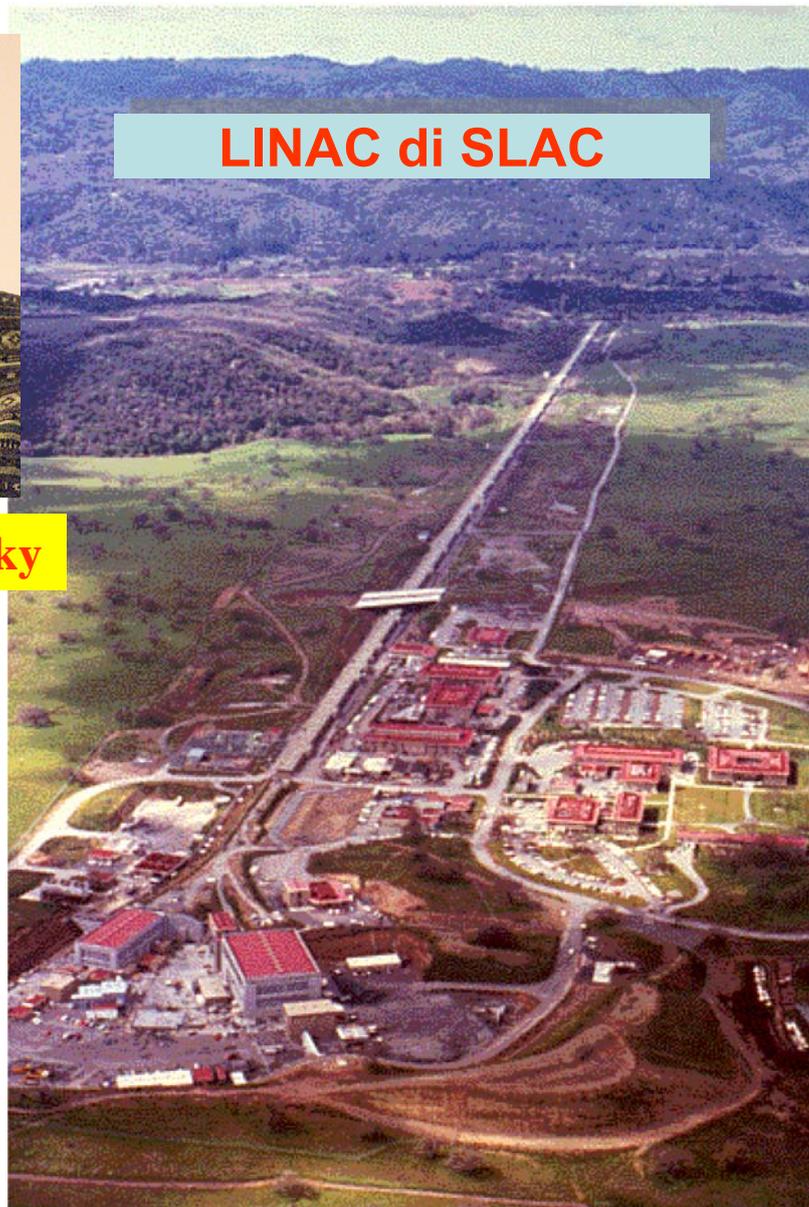


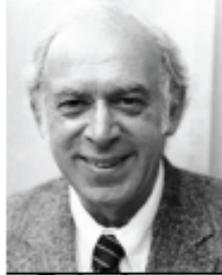
Fig 1)

Esperimento di SLAC: dentro il protone

1968 SLAC - MIT Group



Kendall



Friedman



Taylor

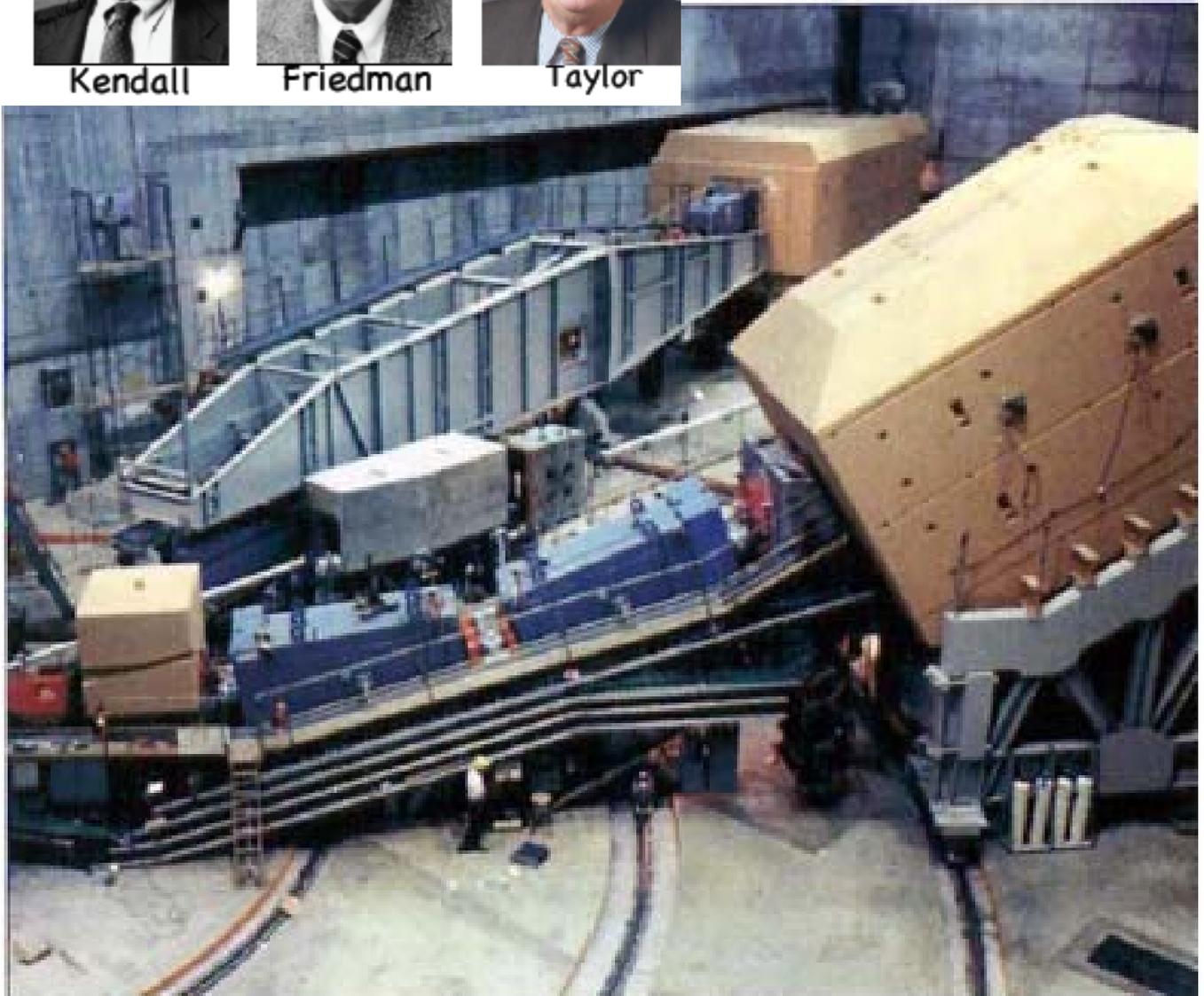


Figure 2 Two spectrometers in SLAC's End Station A that were used to discover quarks in the late 1960s.

Spettrometri

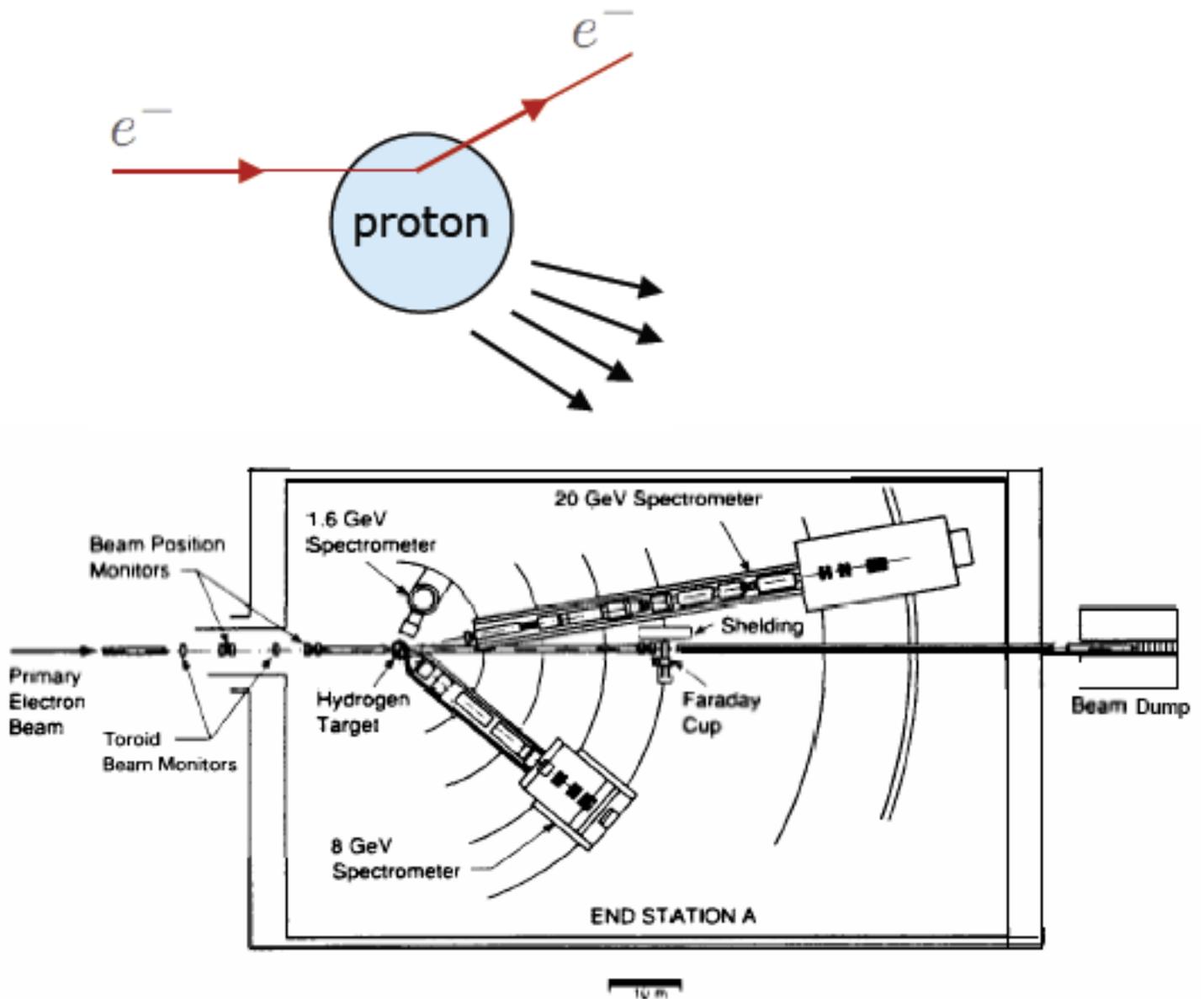


Fig. 14. Layout of spectrometers in End Station A. All three spectrometers can be rotated about the pivot. The 20 GeV spectrometer can be operated from about $1\frac{1}{2}^\circ$ to 25° , the 8 GeV from about 12° to over 90° . The 1.6 GeV spectrometer coverage is from $\sim 50^\circ - 150^\circ$.

Fig. 3

Disegni dello spettrometro a 8 GeV

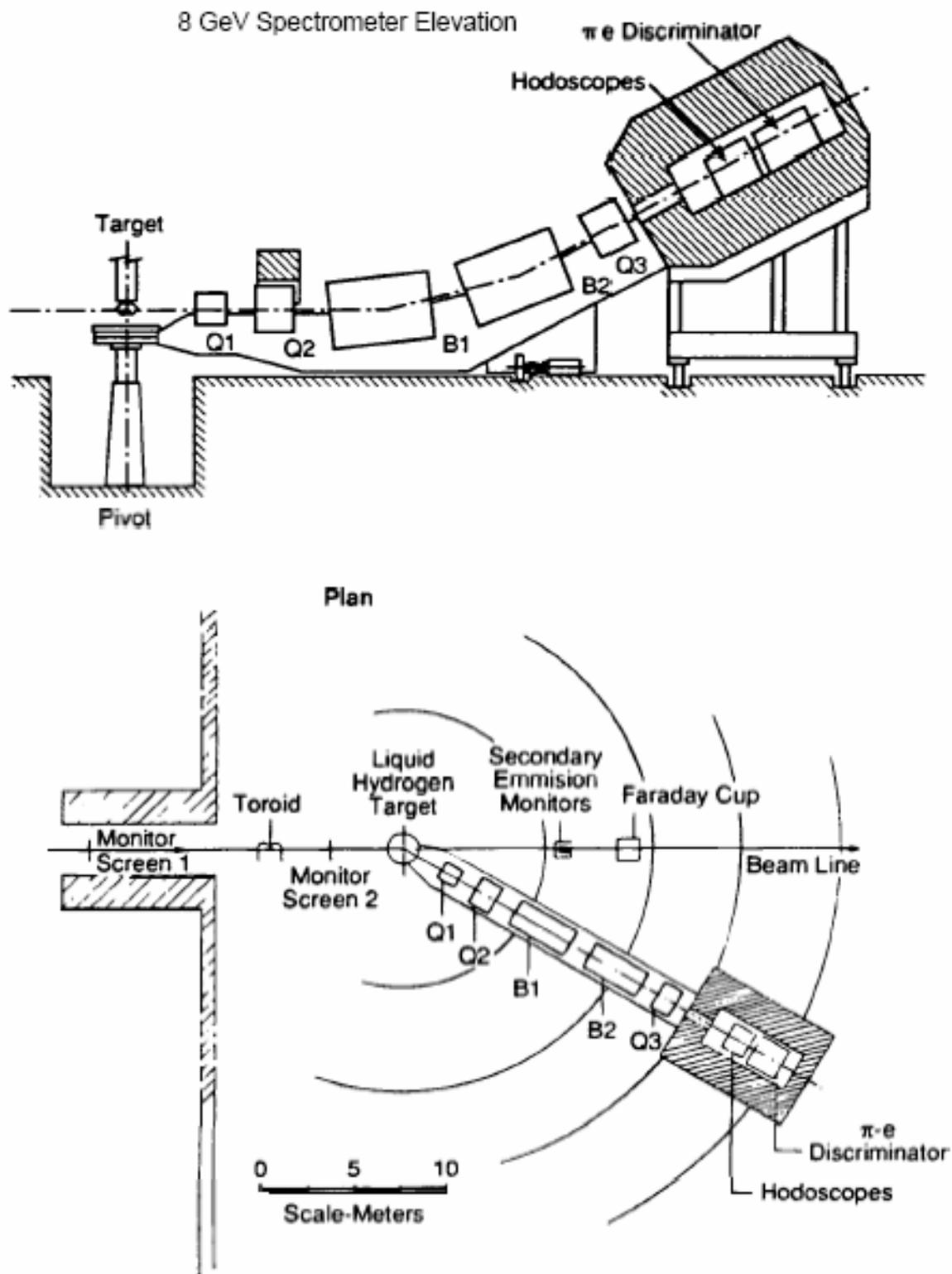


Fig. 4

Fig. 15. Schematic drawings of the 8 GeV spectrometer. Five magnets (two bending magnets, (B), and three quadrupoles, (Q)) direct scattered particles into the detectors which are mounted in a heavily shielded enclosure. The whole assembly rides on the rails and can be pivoted about the target to change the angle of scattering of the detected electrons.

Andamento delle sezioni d'urto differenziali e-protone

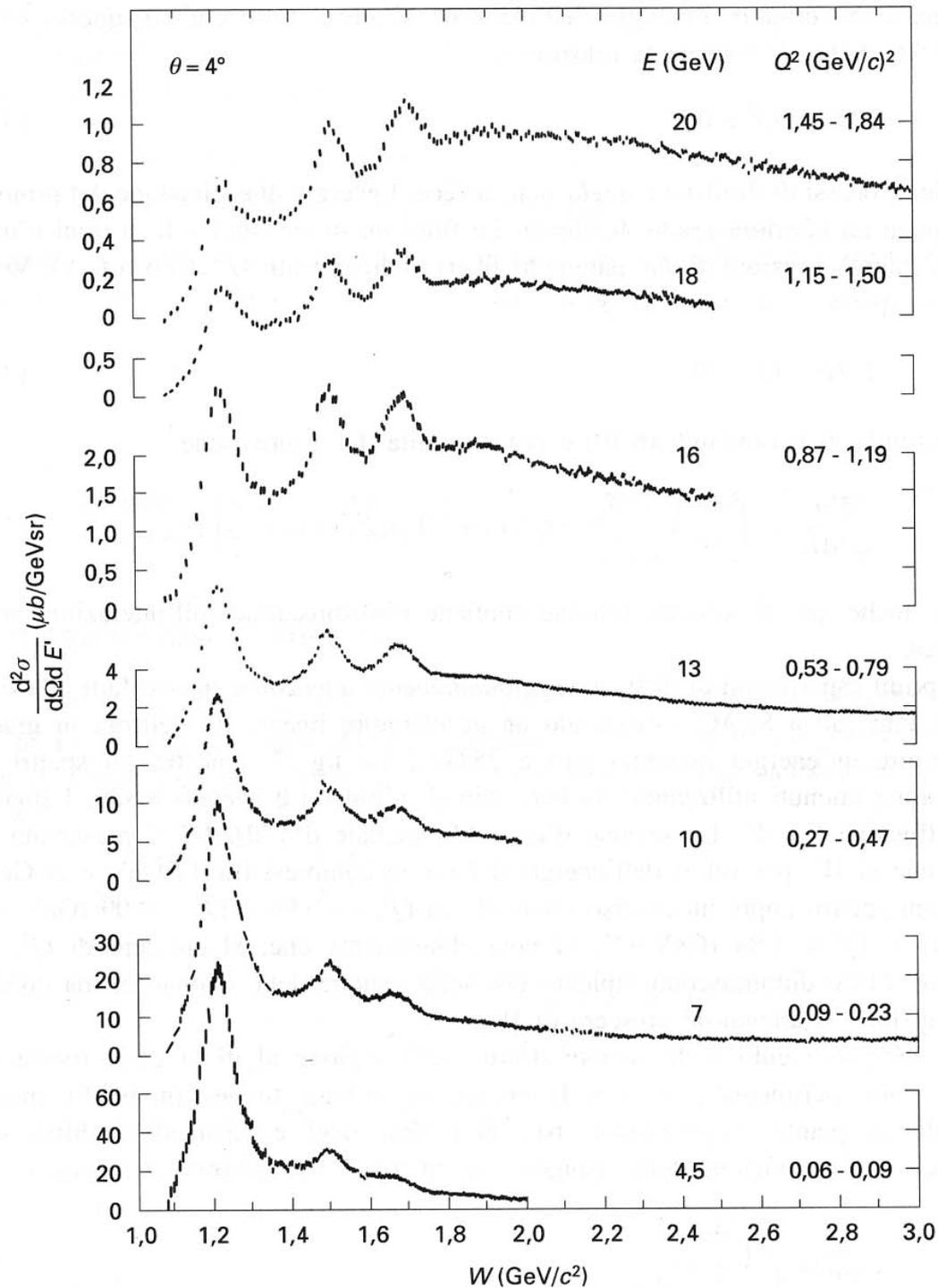


Figura 5

La diffusione elettrone-protone: gli spettri di eccitazione misurati nella diffusione profondamente anelastica elettrone-nucleone sono mostrati in funzione della massa invariante W [St75]. Si noti l'uso di differenti scale sull'asse delle ordinate. Le misure sono state effettuate ad un angolo di diffusione fisso $\theta = 4^\circ$. Il valore medio dell'intervallo in Q^2 coperto dalla misura cresce all'aumentare dell'energia del fascio E . Le risonanze (in particolare la prima a $W = 1.232 \text{ GeV}/c^2$) diventano sempre meno pronunciate, mentre la porzione di spettro continuo ($W \gtrsim 2.5 \text{ GeV}/c^2$) diminuisce solo debolmente.



Confronto tra le sezioni d' urto elastica ed inelastica

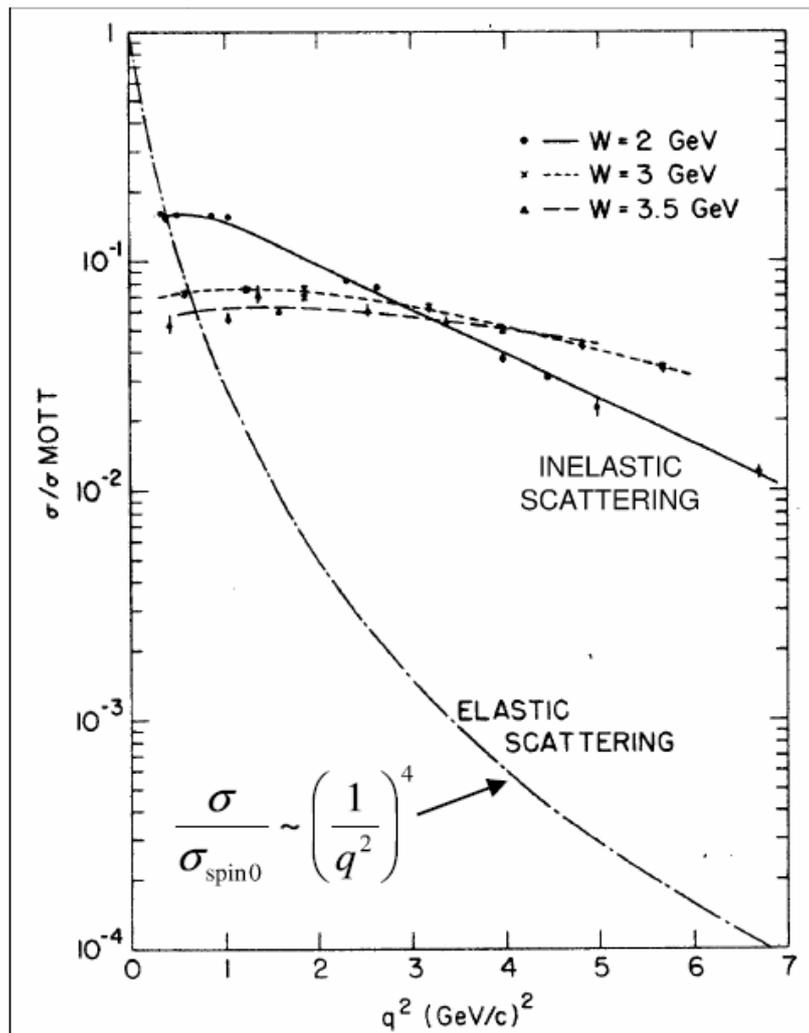


Fig 6)

M.Breidenbach et al.,
Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 935

◇ Questi risultati sono il contrario di quanto ci si aspetta da una distribuzione di MATERIA CONTINUA all' interno del protone.
Ci aspettiamo cioè PICCOLE DEVIAZIONI ANGOLARI mentre misuriamo una esaltazione della sezione d' urto anelastica quando andiamo a grandi valori di Q^2 :
cioè **a grandi deviazioni angolari**
C' e' una differenza drammatica tra lo scattering elastico, con un fattore di forma che va come $1/Q^8$, e lo scattering profondamente inclusivo che, NON mostrando dipendenza da Q^2 , **NON ha fattore di forma: targhetta puntiforme come nello scattering puntiforme alla Rutherford !**

Evidenza dello Scaling delle Funzioni di Struttura

➤ Nella fig. 5 notiamo che, al crescere di Q^2 , le sezioni d'urto diminuiscono rapidamente nella regione delle risonanze, ma questa diminuzione si attenua al crescere di W . Questo comportamento fu un dato sperimentale inatteso. In fig 6 e' mostrato il rapporto delle sezioni d'urto misurate in questi esperimenti, normalizzate a quella di Mott, in funzione di Q^2 per diversi valori di W . Di nuovo si nota che per

$W > 2 \text{ GeV}/c^2$ questo rapporto dipende poco da Q^2 in netto contrasto con l'andamento di tipo dipolare osservato nel caso dello scattering elastico ($|G_{\text{dipolo}}|^2 \cong 1/Q^8$). Quindi: nei processi di diffusione profondamente elastica, le funzioni di struttura W_1 e W_2 , per valori fissati della massa invariante W , sono praticamente indipendenti da Q^2 .

➤ Nella fig. che segue, νW_2 e' plottato, per $W > 2 \text{ GeV}$ e per $x = 0.25$, in funzione di Q^2 : di nuovo vediamo la sua indipendenza da Q^2 .

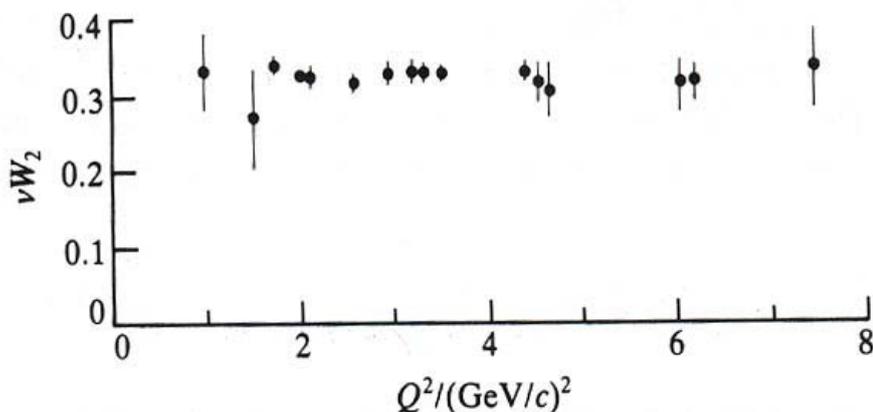


Figure 12.15 The proton structure function νW_2 plotted as a function of Q^2 for the fixed value of $x = 0.25$ and hadron masses greater than 2 GeV. The structure function is independent of Q^2 . (After Friedman J I and Kendall H W 1972 *Ann Rev Nucl Sci* **22** (203).)

Evidenza dello scaling delle Funzioni di Struttura

- Le due funzioni di struttura W_1 e W_2 , aventi dimensioni fisiche di Energia^{-1} , abitualmente sono sostituite da due funzioni di struttura **adimensionali**:

$$F_1(x, Q^2) = Mc^2 W_1(Q^2; \nu) \qquad F_2(x, Q^2) = \nu W_2(Q^2; \nu)$$

- Di nuovo dalla fig in basso si vede che F_1 e F_2 non dipendono, o quasi, da Q^2 : **I nucleoni hanno una struttura interna fatta di costituenti puntiformi.**

- F_1 e' legata all' interazione magnetica ed e' nulla per una particella di spin 0

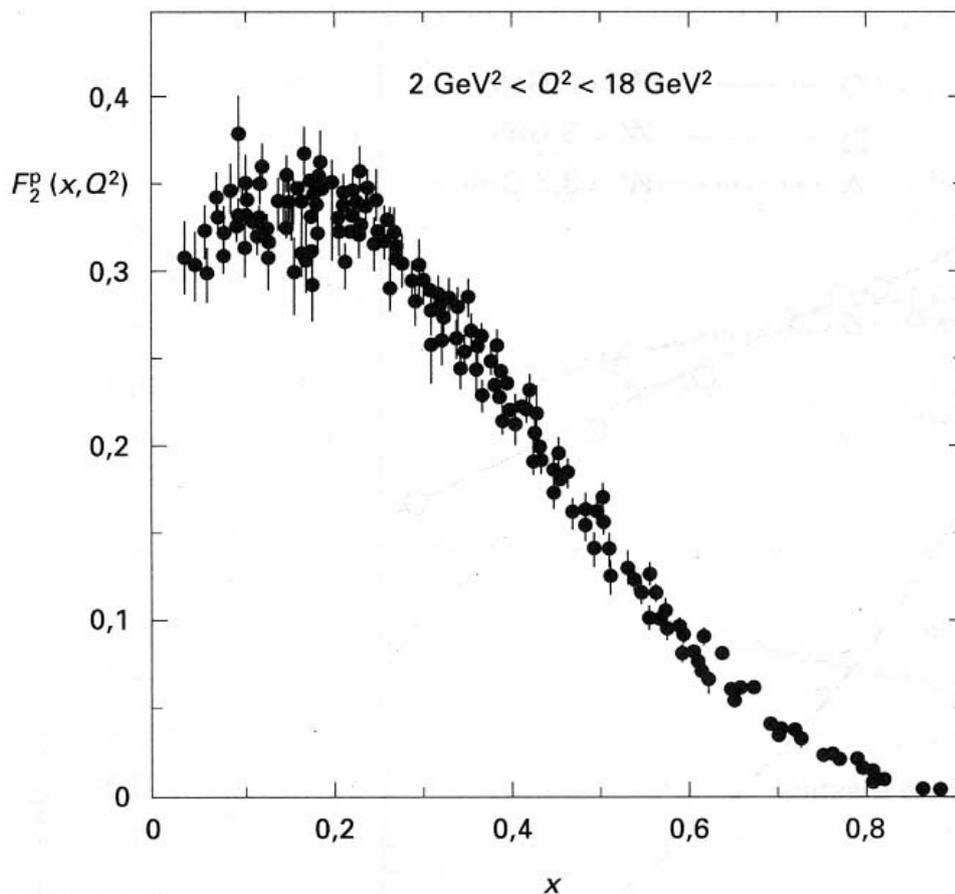


Figura 7.4

La funzione di struttura F_2 del protone in funzione di x , per valori di Q^2 compresi fra 2 $(\text{GeV}/c)^2$ e 18 $(\text{GeV}/c)^2$ [At82].

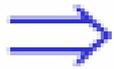
Ricapitolando :



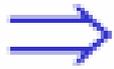
Questo suggerisce che il fotone virtuale “**sbatte**” su dei costituenti puntiformi dentro il protone

$$\lambda \sim \frac{2\pi}{|\mathbf{q}|} \sim \frac{4\pi Mx}{Q^2}$$

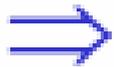
Se sondiamo qualcosa di puntiforme ci aspettiamo:



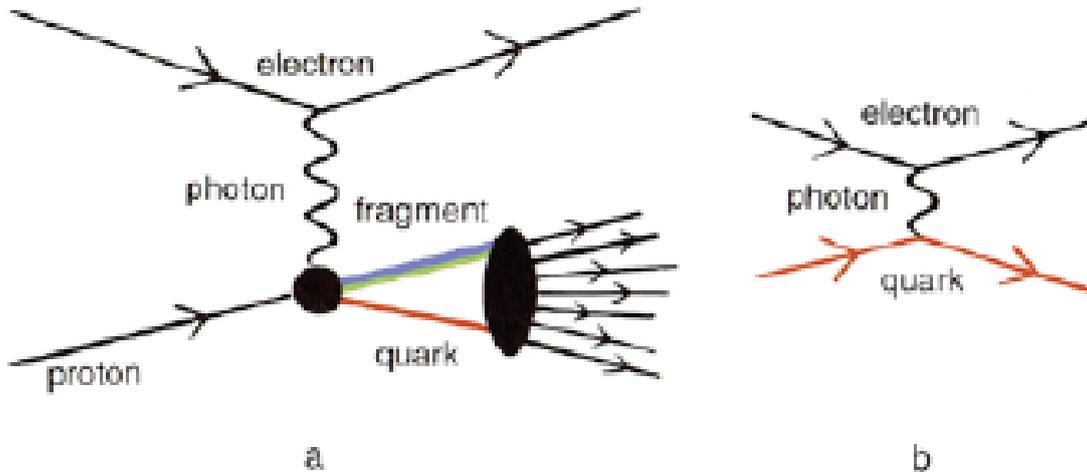
Una sezione d' urto INDIPENDENTE DA λ
(un punto si presenta come un punto
INDIPENDENTEMENTE dalla lunghezza d' onda)



Una sezione d' urto INDIPENDENTE da Q^2



Ancora una volta abbiamo scattering su oggetti puntiformi alla Rutherford



Scaling di Bjorken (1)

➤ Se facciamo l' ipotesi che i costituenti puntiformi del protone, i partoni, sono quarks senza struttura di spin $\frac{1}{2}$ l' espressione (1) che descrive la struttura del protone

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[W_2(Q^2, \nu) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (1)$$

si riduce a (2) che descrive lo scattering elastico e-fermione (**privo di struttura**) di spin $\frac{1}{2}$ e dove m e' la massa del quark.

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{Q^2}{2m^2} \right] \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right) \quad (2)$$

➤ La presenza della funzione δ sottolinea il fatto che nello scattering elastico l' energia trasferita ν e il quadri-momento trasferito Q^2 NON sono indipendenti ma legati dalla relazione $\nu = Q^2/(2m)$.

Se pensiamo lo scattering inelastico e-p come una SOVRAPPOSIZIONE INCOERENTE di scattering elastico **e-quark**, le funzioni di struttura si devono ridurre a forme puntiformi:

$$2W_1(Q^2; \nu) = \frac{Q^2}{2m^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right)$$

$$W_2 = \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right)$$

➤ applicando la proprieta' $\delta(ax) = a^{-1}\delta(x)$ otteniamo:

$$2mW_1(Q^2; \nu) = \frac{Q^2}{2m\nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right)$$

$$\nu W_2(Q^2; \nu) = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right)$$

➤ Queste funzioni di struttura puntiformi hanno la notevole proprieta' che le due variabili indipendenti Q^2 e ν vi appaiano solo nel rapporto adimensionale

$$x = Q^2/(2m\nu)$$

le funzioni di struttura non sono piu' funzioni separate di Q^2 e ν .

Questo fenomeno e' noto come "**Scaling di Bjorken**". Il suo presentarsi segnala il fatto che, non appena Q^2 arriva **nella regione del "deep inelastic scattering"** (quindi la lunghezza d' onda del fotone virtuale diventa sempre piu' corta) lo scattering elastico sul protone e' sostituito dalla sovrapposizione incoerente di scattering elastici su singoli quark puntiformi.

Ricordiamo che lo scattering elastico sul protone puo' essere considerato come dovuto alla azione coerente di tutti i quark dentro il protone.

Scaling di Bjorken

➤ Riassumendo lo scaling delle funzioni di struttura era stato anticipato da Bjorken che ipotizzava che nel limite per $Q^2 \rightarrow \infty$ e $\nu \rightarrow \infty$, con $x=Q^2/(2M\nu)$ fissato, le funzioni di struttura scalano come:

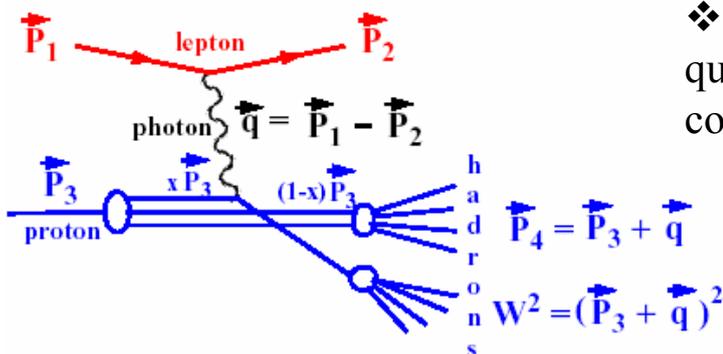
$$MW_1(Q^2; \nu) \rightarrow F_1(x)$$

$$\nu W_2(Q^2; \nu) \rightarrow F_2(x)$$

Interpretazione dello Scaling di Bjorken: il Modello a Partoni

➤ La prima interpretazione dello scaling di Bjorken, ed in particolare del significato della variabile x , e' stata data da Feynman nel 1969. Feynman ipotizzò che il protone fosse formato da particelle puntiformi chiamate "PARTONI".

E' la nascita del **Modello a Partoni**: ciascun partone nel protone trasporta solo una frazione dell' energia e del momento del protone . Il processo di scattering si puo' quindi visualizzare come



❖ Il tempo di interazione sia così breve, e quindi l' interazione così forte, da poter considerare i partoni "liberi" nel protone

❖ Il fotone virtuale, con quadri-momento q , e' assorbito da un particolare partone che ha

$$p_i = x \cdot p_{\text{protone}} \quad m_i = x \cdot M_{\text{protone}}$$

◆ Si puo' dimostrare che la frazione "x" del momento del partone e' proprio uguale alla variabile "x" di Bjorken:

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu}$$

◆ Da questa formula discende, mettendo $m=xM$, che:

$$\nu = \frac{Q^2}{2xM} = \frac{Q^2}{2m}$$

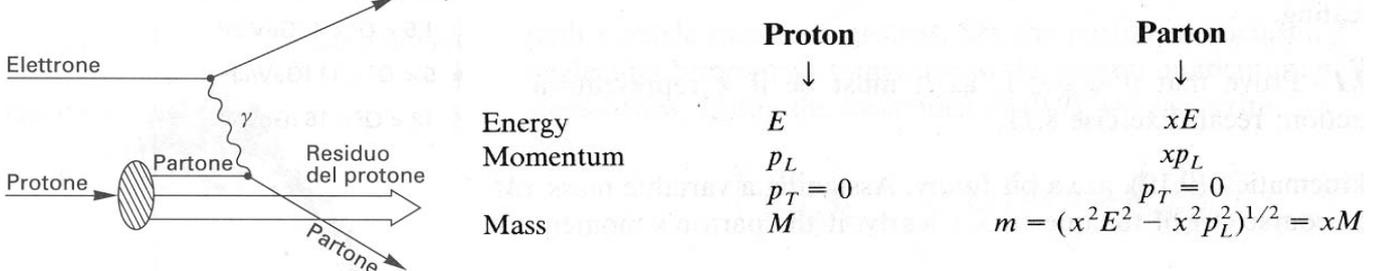
che e' la relazione che lega ν e Q^2 in uno scattering elastico per una particella puntiforme di massa m . Dimostriamolo usufruendo del "infinite momentum frame".

Infinite Momentum Frame

→ L' interpretazione dei processi di diffusione profondamente anelastici su protone e' notevolmente **semplificata dalla scelta di un sistema di riferimento opportuno** (la fisica e' ovviamente indipendente da una tale scelta).

→ Se si osserva il processo da un sistema di riferimento che si muove ad alta velocita', gli impulsi trasversi e le masse a riposo dei costituenti del protone possono essere trascurati e la struttura del protone sara' determinata solo dagli **impulsi longitudinali** dei suoi costituenti: Infinite Momentum Frame (IMF).

→ Un altro sistema adeguato e' **il sistema di Breit** nel quale il fotone non trasferisce alcuna energia ($q_0=0$):



Dimostrazione:

Nel sistema di riferimento IMF il quadrimpulso del protone e':

$$p \equiv (E; \vec{p}) = (p; 0; 0; p)$$

$p^2 = M^2 \cong 0$ (massa del protone che nel IMF puo' essere trascurata)

Quadrimpulso del partone dopo l'urto: $xp+q$; $(xp+q)^2 \cong m^2 \cong 0$ (massa partone)

$$x^2 p^2 + 2xp \cdot q + q^2 = 0 \Rightarrow x = q^2 / 2(p \cdot q)$$

$p \cdot q$, essendo un invariante relativistico, lo calcolo nel sistema di riferimento del Laboratorio dove il protone e' fermo: $p = (M; 0; 0; 0)$.

Mentre avremo $q = (v; \mathbf{q})$ dove $v = E - E'$.

Quindi: $p \cdot q = Mv \Rightarrow v = p \cdot q / M$ Sostituendo si trova:

$$x = -q^2 / 2Mv = Q^2 / 2Mv \quad \text{c. v. d.}$$

NB questo e' valido in modo rigoroso solo nel IMF.

Significato di x

- E' intrigante constatare che la variabile cinematica $x = Q^2/2m\nu$, e' identica alla frazione di quadri-momento x . Questo vuol dire che affinche' il fotone sia assorbito da un partone con quadri-momento x **DEVE AVERE** proprio i giusti valori di Q^2 e ν tali da dare nel rapporto proprio quel valore di x ! In buona sostanza: **e' proprio il vincolo dello scattering elastico ($\nu = Q^2/2m_i = Q^2/2Mx$ cioe' $x = Q^2/2M\nu$) che da' il comportamento osservato di scaling nella regione del deep-inelastic scattering !**
- Ricordiamo ancora che questa interpretazione della variabile x e' valida SOLO in approssimazione impulsiva !**

Il Modello a Partoni

→ Questo approccio e' alla base del **Modello a Partoni** di Feynman e Bjorken in cui i costituenti del protone sono chiamati **partoni**.
L' interazione e' data dalla somma incoerente degli urti elastici tra elettrone e partoni.

→ **Questa approssimazione, detta di impulso**, e' valida se la durata dell' interazione e' cosi' breve da potersi trascurare l' interazione partone-partone. In altre parole il nucleone viene trattato come **una targhetta che contenga un gas di partoni reali.**

→ Poiche' $q^2 < 0$, possiamo sempre passare, mediante una opportuna trasformazione di Lorentz, ad un sistema di riferimento ove la componente temporale di q si **annuli**. Cioe' nel quale:

l' elettrone trasferisce al nucleone SOLTANTO QUANTITA DI MOTO, LASCIANDONE INVARIATA La sua ENERGIA !!!

◆ **il Modello a Partoni e' formulato piu' facilmente nell' “ infinite momentum frame ($E_2 \gg M$):**

Proton → “infinite” momentum
→ quark momentum parallel to proton momentum

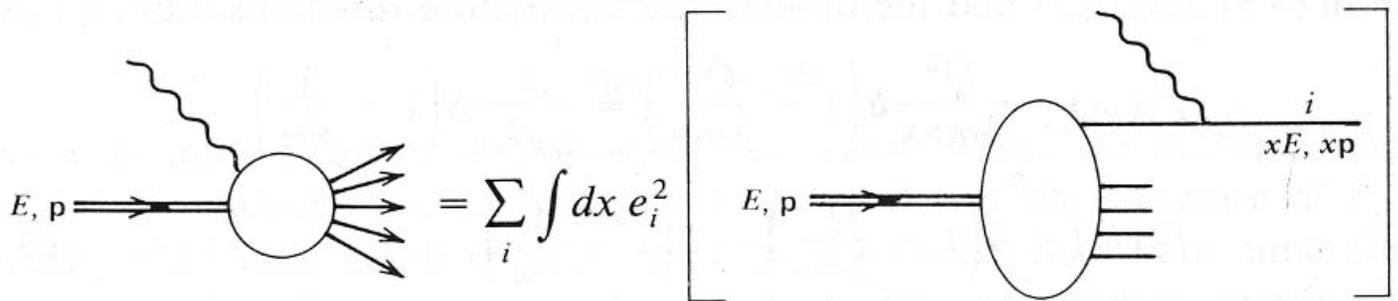
x = fraction of proton's momentum carried by quark:

◆ **Possiamo misurare il momento del quark dalla misura del solo elettrone “scatterato”:** (E_3, θ)

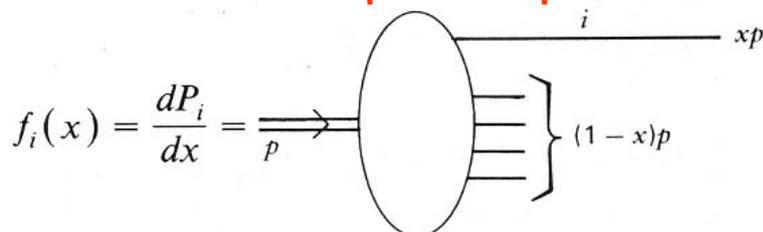
(In questo modo non e' necessario misurare il sistema adronico X. Vedremo in seguito che in realta' oggi spesso si misura l' attivita' adronica nel rivelatore.)

Distribuzione di Impulso dei Partoni

— Come ricordato la domanda è: sono queste particelle, chiamate **partoni** da Bjorken, gli stessi **quark** scoperti nella spettroscopia degli adroni?



— come si vede vari tipi di partoni puntiformi costituiscono il protone ($i=u,d,s$..quark, con varie cariche, così come i gluoni. Naturalmente questi ultimi NON interagiscono con i fotoni !!) Ognuno trasporta una diversa frazione x del momento e dell' energia del protone. Introduciamo la **Distribuzione in impulso dei partoni**:



$f_i(x)$ descrive la probabilità che il partone urtato i trasporta una frazione x del momento del protone. Naturalmente la somma su x deve dare 1:

$$\sum_{i'} \int dx [x f_{i'}(x)] = 1$$

Nota Bene: i' è sommata su **TUTTI** i partoni e NON solo su quelli carichi con cui il fotone può interagire.

Lo spin del quark : la relazione di Callan-Gross

➤ Tenendo conto della sostituzione di α con $\alpha \bullet e_i$, dove e_i e' la carica frazionaria del quark di tipo i , la sezione d' urto per lo scattering elastico di un elettrone con un quark di spin $1/2$ e di tipo i diventa:

$$\frac{d^2\sigma^i}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[e_i^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e_i^2 \frac{Q^2}{2m_i^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right)$$

da cui troviamo che il contributo del partone i alle funzioni di struttura W_1 e W_2 e':

$$W_1^i = e_i^2 \frac{Q^2}{4M^2 x^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right)$$

$$W_2^i = e_i^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right)$$

➤ Sia $f_i(x)$ la probabilita' che un partone di tipo i ha di avere una frazione di impulso x . Nel processo di scattering e-quark i partoni "non partecipanti" hanno il ruolo di "spettatori" ed assumiamo che i contributi dei diversi quark alla sezione d' urto dello scattering profondamente inelastico e-p si sommi **in modo incoerente**. Possiamo quindi scrivere:

$$W_1(Q^2; \nu) = \sum_i \int e_i^2 \frac{Q^2}{4M^2 x^2} f_i(x) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right) dx$$

➤ Integriamo ricordando che vale: $\int f(x) \delta[g(x)] dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$ Ed otteniamo:

$$MW_1(Q^2; \nu) = \sum_i \frac{e_i^2}{2} f_i(x) \equiv F_1(x)$$

➤ Inoltre: $W_2(Q^2; \nu) = \sum_i \int e_i^2 f_i(x) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right) dx$ E di nuovo:

$$\nu W_2(Q^2; \nu) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \equiv F_2(x)$$

➤ Ne segue **la relazione di Callan-Gross**:

15-4-2005

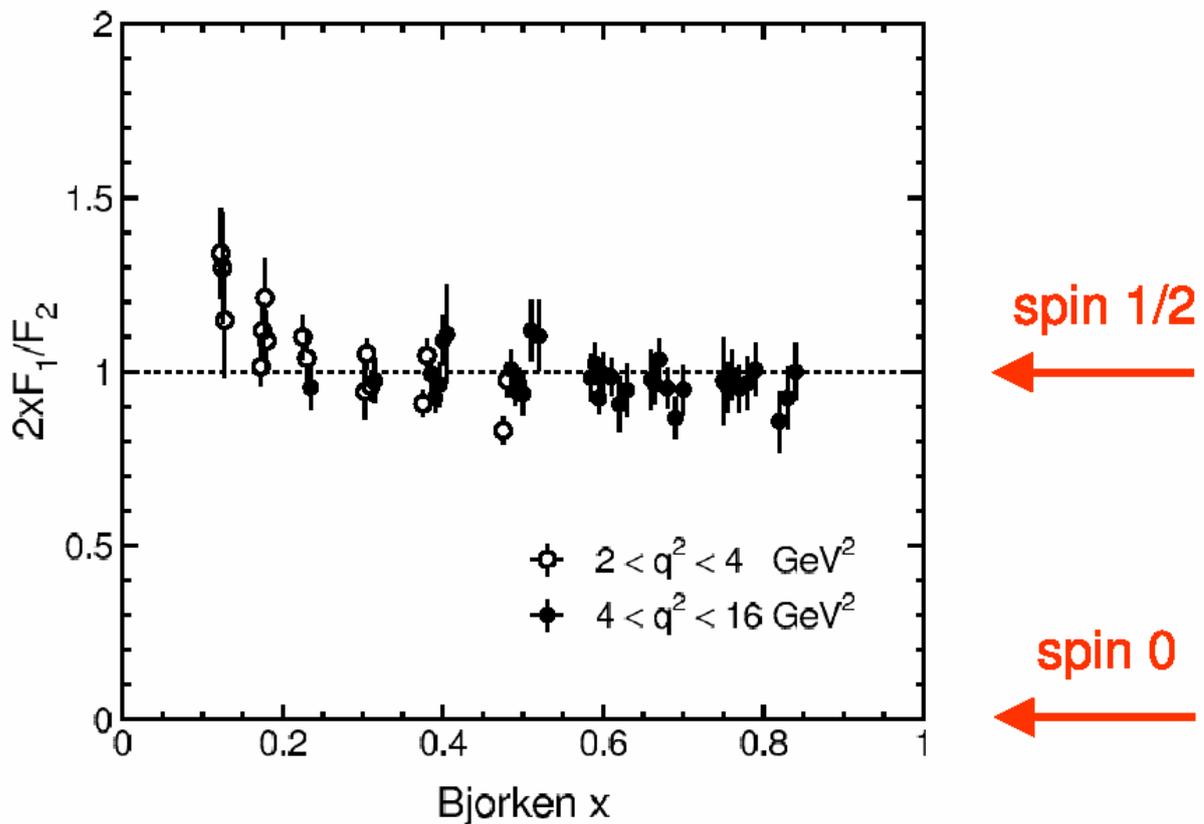
$$2xF_1(x) = F_2(x)$$

68

La relazione di Callan-Gross

➤ Naturalmente la relazione di Callan-Gross e' valida solo se i partoni hanno spin $\frac{1}{2}$ (se lo spin fosse 0 il termine F_1 , che e' legato alla interazione magnetica, sarebbe nullo cosi' come lo sarebbe quindi il rapporto $2xF_1/F_2$). **I risultati sperimentali supportano questa previsione:**

◆ F_1 and F_2 are found to be closely related :



derived from Table XV of
A.Bodek et al, Phys. Rev. **D20** (1979) 1471

Data consistent with
Callan-Gross relation :

$$F_2 = 2xF_1$$

➤ **I costituenti puntiformi del protone hanno spin 1/2**

Struttura a quark del nucleone

Abbiamo visto che lo scaling di Bjorken e' riassunto da:

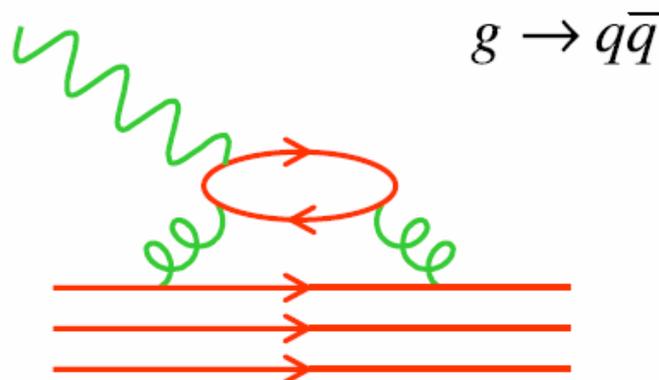
$$MW_1(Q^2; \nu) \rightarrow F_1(x) = \sum_i \frac{e_i^2}{2} f_i(x) \quad \text{Eq. (a)}$$

$$\nu W_2(Q^2; \nu) \rightarrow F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \quad \text{Eq. (b)}$$

Inoltre l'evidenza sperimentale della relazione di Callan-Gross indica che il nucleone contiene come costituenti dei fermioni puntiformi che chiamiamo partoni.

D'altra parte, i quark costituenti di Gell-Mann hanno dato una descrizione molto soddisfacente delle proprietà "STATICHE" degli adroni. Per esempio i numeri quantici del protone sono predetti correttamente se si assume che il protone consiste di due quark up e uno down. Questi sono chiamati **quark di "valenza"**. Tuttavia se aggiungiamo coppie quark-antiquark, I numeri quantici NON cambiano. Gli esperimenti di DIS dimostrano anche l'esistenza di questi quark che vengono chiamati **quark del "mare"**.

⇒ I nucleoni contengono i **3 quark di "valenza"** ed un **"mare"** di coppie quark-antiquark. ($p= uud$, $n= ddu$)
Il contenuto in anti-quark dei nucleoni deriva da processi di ordine piu' alto:



Struttura a quark del nucleone

- ◆ Usando l'equazione (b) della pagina precedente e i numeri quantici dei quark u, d e s, possiamo scrivere F_2 dello scattering elettrone-protone come:

$$F_2^{ep} = x \left\{ \frac{4}{9} [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \frac{1}{9} [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \frac{1}{9} [s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \right\}$$

dove si e' assunto che il contributo dai quark c e b sia trascurabile. In questa espressione $u^p(x)$ e' la pdf (probability density function) del quark u nel protone etc

$u^p(x)dx =$ Numero di quark di tipo u nel protone con frazione di momento tra x e x+dx

Piu' definizioni simili per gli altri "sapori" dei quark e anti-quark:

$$d^p(x), \bar{u}^p(x), \bar{d}^p(x), \dots$$

- ◆ In modo simile la funzione di struttura per lo scattering e-n sara':

$$F_2^{en} = x \left\{ \frac{4}{9} [u^n(x) + \bar{u}^n(x)] + \frac{1}{9} [d^n(x) + \bar{d}^n(x)] + \frac{1}{9} [s^n(x) + \bar{s}^n(x)] \right\}$$

Con ovvie definizioni simili per il neutrone:

$$u^n(x), d^n(x), \bar{u}^n(x), \bar{d}^n(x), \dots$$



Ora, poiché il protone e il neutrone così come i quark u e d formano un doppietto di isospin I , ci aspettiamo che dalla invarianza delle interazioni forti per rotazione nello spazio di $SU(2)$ di isospin valgano le seguenti relazioni:

$$u^p(x) = d^n(x) \equiv u(x)$$

$$d^p(x) = u^n(x) \equiv d(x)$$

$$s^p(x) = s^n(x) \equiv s(x)$$

Ed analogamente per gli antiquark:

$$\bar{u}^p(x) = \bar{d}^n(x) \equiv \bar{u}(x)$$

$$\bar{d}^p(x) = \bar{u}^n(x) \equiv \bar{d}(x)$$

$$\bar{s}^p(x) = \bar{s}^n(x) \equiv \bar{s}(x)$$

Le distribuzioni di quark del mare nel protone e nel neutrone sono identiche. Avremo allora:

$$F_2^{ep} = x \left\{ \frac{4}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [s(x) + \bar{s}(x)] \right\}$$

$$F_2^{en} = x \left\{ \frac{4}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [s(x) + \bar{s}(x)] \right\}$$

Quark di valenza e quark del mare

◆ Esprimiamo le funzioni di distribuzione dei quark in termini dei quark di valenza e di quelli del mare. Per ogni sapore di quark avremo:

$$q(x) = q_v(x) + q_s(x)$$

Nel protone, essendo i quark di valenza u_v, u_v e d_v , avremo che i quark strani e tutti gli antiquark devono appartenere al mare.

Avremo quindi:

$$q_v(x) = 0 \text{ per } q \equiv s, \bar{s}, \bar{u}, \bar{d}$$

Quindi:

$$u(x) = u_v(x) + u_s(x)$$

$$d(x) = d_v(x) + d_s(x)$$

Se inoltre facciamo l'ulteriore semplificazione di assumere che nel mare i tre quark leggeri u, d, s appaiano con la stessa frequenza e distribuzione di impulso, avremo:

$$u_s(x) = d_s(x) = s_s(x) = \bar{u}_s(x) = \bar{d}_s(x) = \bar{s}_s(x) \equiv s(x)$$

Con questa semplificazione le funzioni di struttura del protone e del neutrone diventano:

$$F_2^{ep} = x \left\{ \frac{4}{9} [u_v + u_s + \bar{u}_v + \bar{u}_s] + \frac{1}{9} [d_v + d_s + \bar{d}_v + \bar{d}_s] + \frac{1}{9} [s_v + s_s + \bar{s}_v + \bar{s}_s] \right\}$$

$$F_2^{en} = x \left\{ \frac{4}{9} [u_v + s + \bar{u}_v + s] + \frac{1}{9} [d_v + s + \bar{d}_v + s] + \frac{1}{9} [s_v + s + \bar{s}_v + s] \right\}$$

$$F_2^{ep} = x \left\{ \frac{4}{9} [u_v + 2s] + \frac{1}{9} [d_v + 2s] + \frac{1}{9} [2s] \right\} = x \left\{ \frac{4}{9} u_v + \frac{8}{9} s + \frac{1}{9} d_v + \frac{2}{9} s + \frac{2}{9} s \right\}$$

$$F_2^{ep} = \frac{x}{9} (4u_v + d_v) + \frac{4}{3} xs \quad \text{Analogamente otteniamo:}$$

$$F_2^{en} = \frac{x}{9} (u_v + 4d_v) + \frac{4}{3} xs$$

Verifica dell'esistenza dei quark del mare

Consideriamo ora due casi estremi:

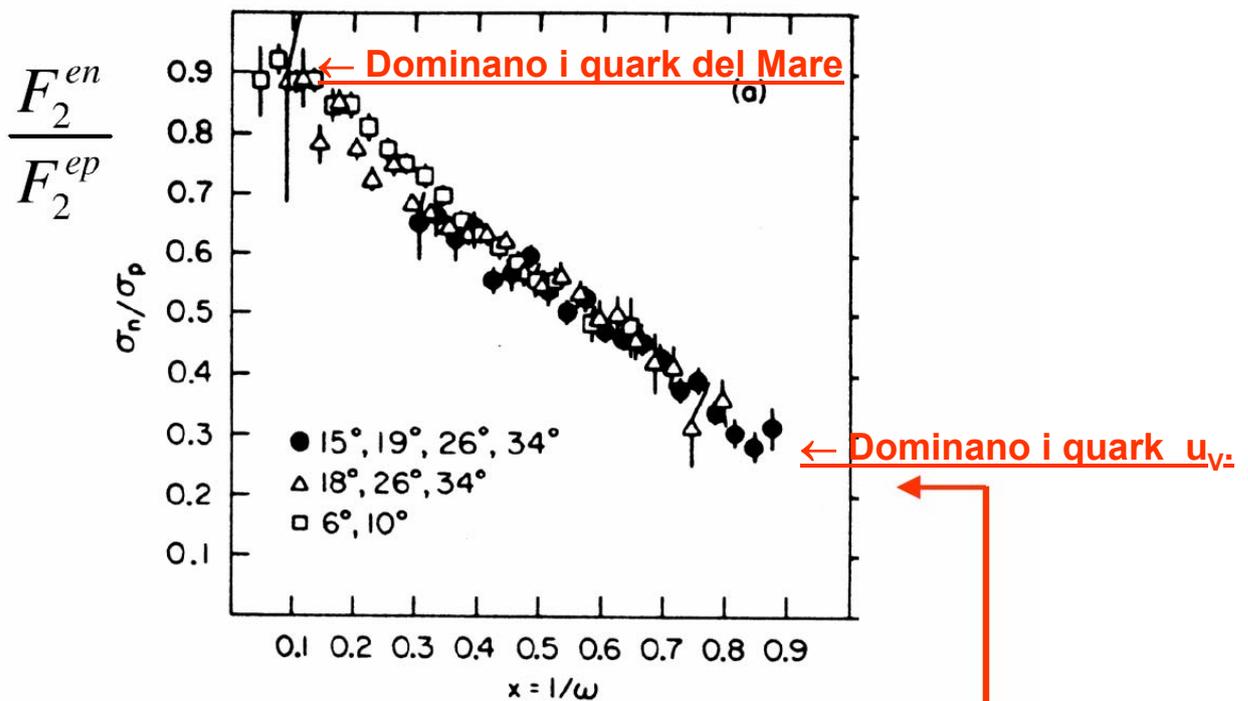
a) domina il contributo dei quark di valenza:
Allora ci aspettiamo

$$\frac{F_2^{en}}{F_2^{ep}} \rightarrow \frac{4d_v + u_v}{4u_v + d_v}$$

E, se u_v e' dominante, il rapporto deve tendere a 1/4

b) dominano i quark del mare: allora ci aspettiamo che il rapporto tenda a 1.

Nelle figura di seguito e' mostrato il rapporto misurato in funzione di x nel DIS. Per x vicino a 1 il rapporto vale $1/4$ mentre per x che tende a 0 vale circa 1. Questo ci dice che i quark di valenza dominano ad alti valori di x mentre quelli del mare dominano a x tendente a 0.



$\Rightarrow d_v \ll u_v$ as $x \rightarrow 1$

Verifica dell'esistenza dei quark del mare

⇒ Nota: $u_v = 2d_v$ per $x \rightarrow 1$, darebbe un valore del rapporto di 2/3.

Questo valore corrisponde a

$$\rightarrow \frac{(2 \cdot z_d^2 + z_u^2)}{(2 \cdot z_u^2 + z_d^2)}$$

Il valore misurato e' pero' 1/4 cioe' $\frac{z_d^2}{z_u^2}$

⇒ Questo implica che nel protone (neutrone) una grande frazione dell'impulso e' trasportata dai quark u (d).

Regole di Somma

Le funzioni di distribuzioni di probabilita' dei quark (pdf) soddisfano della regole di Somma molto semplici.

Ad esempio per il protone abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx = 2 \quad \leftarrow 2 \text{ quark } u \text{ di valenza} \\ \int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx = 1 \quad \leftarrow 1 \text{ quark } d \text{ di valenza} \\ \int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] dx = 0 \quad \leftarrow \text{stranezza } 0 \end{array} \right.$$

La prova sperimentale di queste relazioni richiede dati dallo scattering neutrini e anti-neutrini su nucleoni.

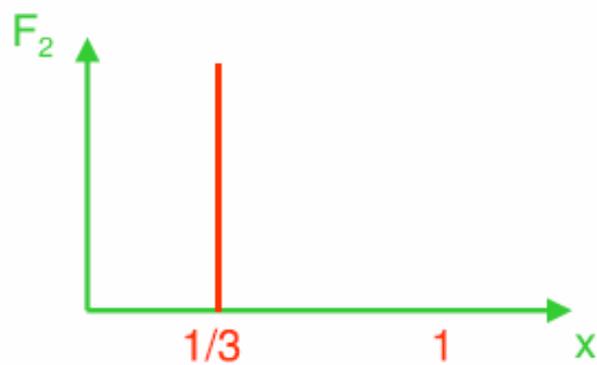
Difatti, come vedremo nel capitolo VI, I neutrini e gli anti-neutrini sondano separatamente le distribuzioni di quark e anti-quark.

F_2 per Diverse Composizioni del Protone

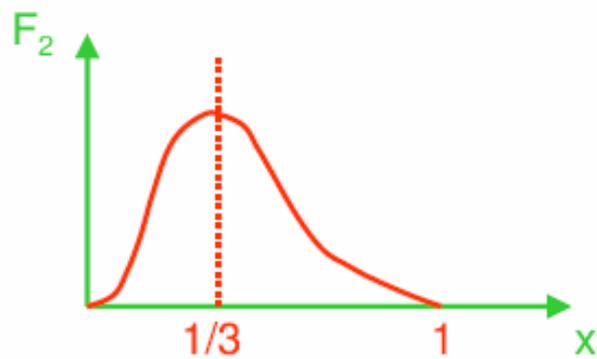
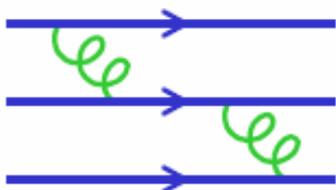
Dirac proton



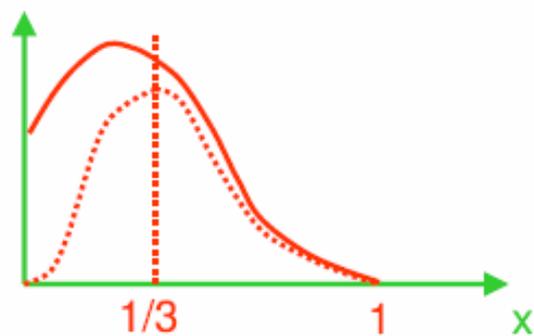
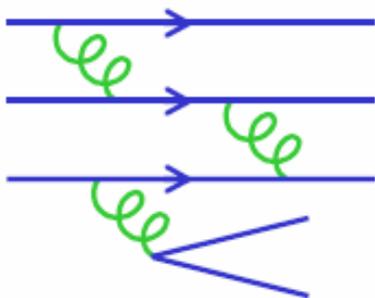
3 free quarks



3 bound quarks



3 bound quarks plus "stuff"



“Valence” and “Sea” Components

$$u(x) = u_V(x) + S(x)$$

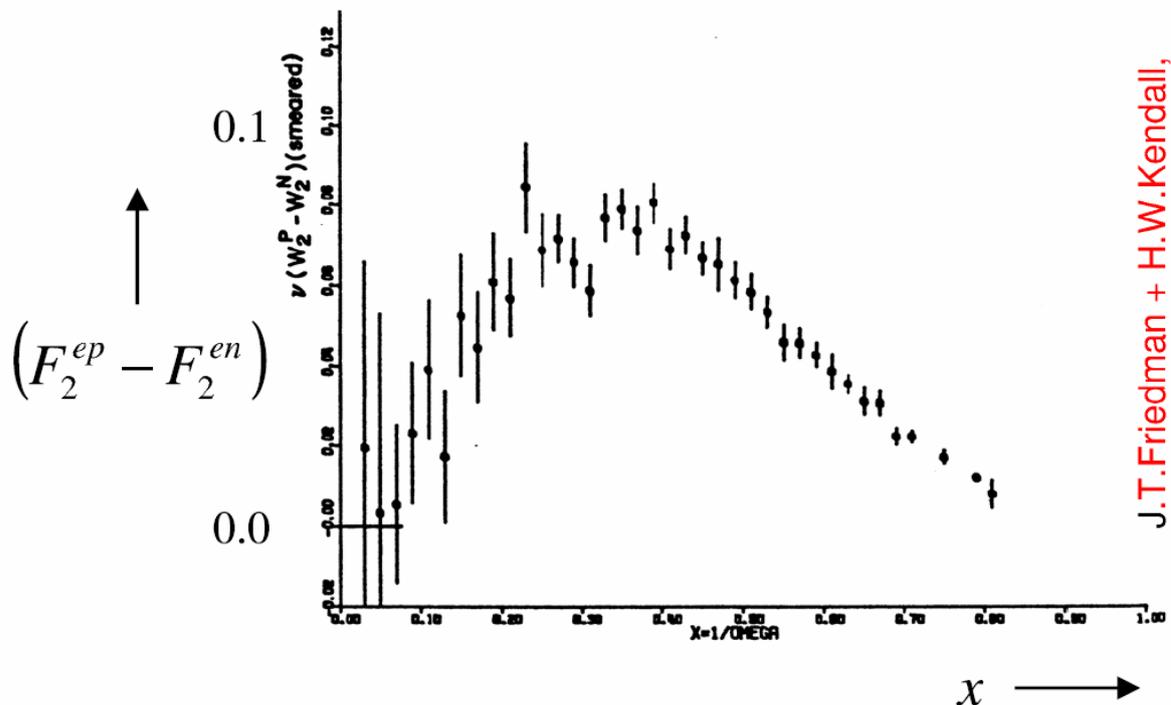
$$\bar{u}(x) = \bar{d}(x) = S(x)$$

$$d(x) = d_V(x) + S(x)$$



Attraverso la differenza delle Funzioni di Struttura e' possibile estrarre la componente di valenza:

$$F_2^{ep} - F_2^{en} = x \left[\frac{1}{3} u_V - \frac{1}{3} d_V \right]$$



J.T.Friedman + H.W.Kendall,
Ann. Rev. Nucl. Sci. **22** (1972) 203

⇒ In modo naïve ci aspettiamo $u_V \approx 2d_V$ essendo $p=uud$

$$\Rightarrow F_2^{ep} - F_2^{en} \approx \frac{1}{3} x d_V$$

In realta' questo vale in modo molto approssimativo ⇒

Integrali delle Funzioni di Struttura

◆ Calcoliamo l'area sotto F_2 :

$$\begin{aligned} \text{proton : } \int_0^1 F_2^{\text{ep}} dx &= \frac{4}{9} \int_0^1 x(u + \bar{u}) dx + \frac{1}{9} \int_0^1 x(d + \bar{d}) dx \\ &\equiv \frac{4}{9} f_u + \frac{1}{9} f_d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{neutron : } \int_0^1 F_2^{\text{en}} dx &= \frac{4}{9} \int_0^1 x(d + \bar{d}) dx + \frac{1}{9} \int_0^1 x(u + \bar{u}) dx \\ &\equiv \frac{4}{9} f_d + \frac{1}{9} f_u \end{aligned}$$

⇒ Dove $f_u =$ alla frazione del momento del protone trasportata da tutti i quark di tipo u ed anti-quark di tipo \bar{u}

◆ Le misure danno:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 F_2^{\text{ep}} dx &= \frac{4}{9} f_u + \frac{1}{9} f_d \approx 0.18 \\ \int_0^1 F_2^{\text{en}} dx &= \frac{4}{9} f_d + \frac{1}{9} f_u \approx 0.12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f_u \approx 0.36 \\ f_d \approx 0.18 \end{array}$$

⇒ Solo ~ 50% del momento del protone e' trasportato dai quark e anti-quark !

Il resto e' trasportato dai gluoni

Riassumendo: Il Modello a quark-partoni predice:

1) Bjorken scaling : $F(x, Q^2) \rightarrow F(x)$

F1 ed F2 sono funzioni di una sola variabile e NON di due
poiche' lo scattering e' puntiforme.

→ no dependence on photon λ

→ no dependence on Q^2 at fixed x

2) Callan-Gross relation : $F_2 = 2xF_1$

→ quarks are spin 1/2

Abbiamo quindi SOLO UNA funzione non nota perche' per le
particelle di Dirac la carica e e il momento magnetico μ sono
legate da:

$$\left[\mu = \frac{e}{2m} \right]$$

3) Parton momentum fractions :

La frazione di momento totale trasportata da quark e anti-
quark e':

$$f_u + f_d = \frac{9}{5} \left[\int_0^1 F_2^{\text{ep}} dx + \int_0^1 F_2^{\text{en}} dx \right] \approx 0.5$$

La Carica dei quark

Come vedremo la carica dei quark la possiamo ricavare dal confronto delle funzioni di struttura dello scattering neutrino-nucleone anti-neutrino-nucleone con quelle elettrone(o muone) su protone e neutrone. Possiamo anticipare questo confronto utilizzando le funzioni di struttura “media “ del nucleone. Riscriviamo :

$$F_2^{ep} = x \left\{ \frac{4}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [s(x) + \bar{s}(x)] \right\}$$

$$F_2^{en} = x \left\{ \frac{4}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [s(x) + \bar{s}(x)] \right\}$$

La funzione di struttura del “nucleone medio “ e' :

$$F_2^{eN} = \frac{F_2^{ep} + F_2^{en}}{2} = \frac{x}{2} \left\{ \frac{4+1}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1+4}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{2}{9} [s(x) + \bar{s}(x)] \right\}$$

$$F_2^{eN} = \frac{5}{18} x \left\{ [u(x) + \bar{u}(x)] + [d(x) + \bar{d}(x)] \right\} + \frac{x}{9} [s(x) + \bar{s}(x)]$$

Trascuriamo il contenuto del mare e concentriamo l'attenzione sul termine 5/18.

$$\frac{5}{18} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} \quad \text{quindi sembra dovuto alle cariche dei quark u e d.}$$

Come vedremo neutrini e anti-neutrini si accoppiano in modo diverso ai differenti tipi di quark e anti-quark. Queste differenze pero' si cancellano nella funzione di struttura media del nucleone. Si ottiene:

$$F_2^{vN} = x \left\{ [u(x) + \bar{u}(x)] + [d(x) + \bar{d}(x)] \right\}$$



Per una targhetta ISOSCALARE (cioè' con un numero di protoni e neutroni uguali: $Z=A/2$) la funzione di struttura rilevante e' :

$$F_2^{\nu N} = \frac{1}{2} (F_2^{\nu p} + F_2^{\nu n}) = x[u + d + \bar{u} + \bar{d}]$$

Per lo scattering eN abbiamo ricavato :

$$F_2^{eN} = \frac{1}{2} (F_2^{ep} + F_2^{en}) = \frac{5}{18} x[u + d + \bar{u} + \bar{d}]$$



$$F_2^{eN} = \frac{5}{18} F_2^{\nu N}$$

$$(= 0.27 F_2^{\nu N})$$

Si ricava dalla media della carica quadrata dei quark :

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right]$$



Mentre lo scattering eN : **DIPENDE** da Z_q^2 ;

Lo scattering νN : **E' INDIPENDENTE** dalla carica del quark !

\Rightarrow **Sperimentalmente si trova :**

$$\rightarrow 0.29 \pm 0.02$$

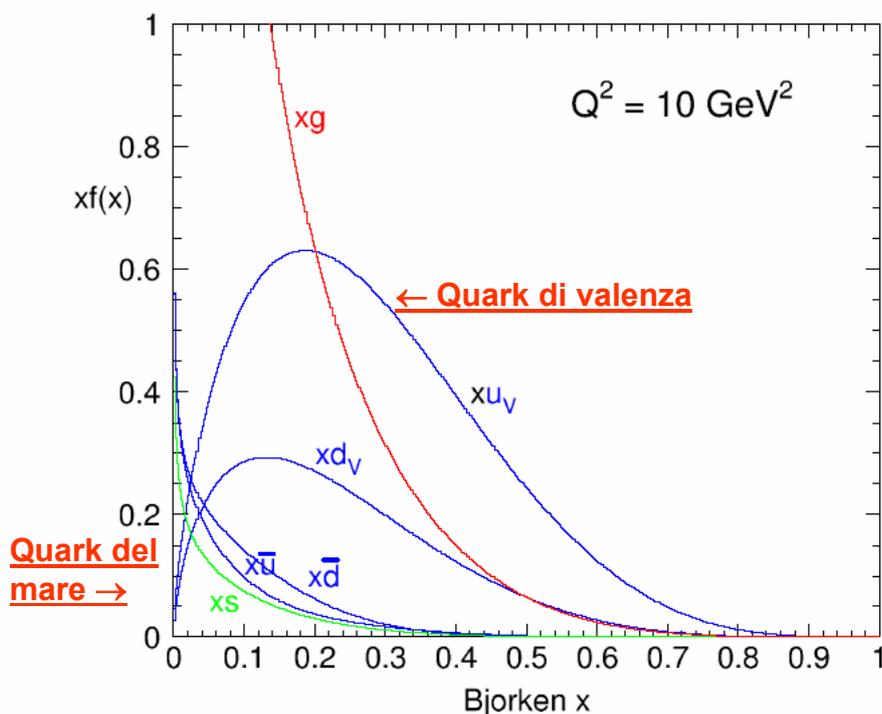
Parton Distributions

In questo tipo di esperimenti oltre agli elettroni si possono utilizzare, come vedremo in seguito, anche fasci di muoni o di neutrini. I muoni, come gli elettroni, sono particelle cariche puntiformi con il vantaggio di poter essere prodotti con energie più alte. La dinamica del processo di diffusione è totalmente analoga e le sezioni d'urto sono identiche.

La diffusione di neutrini permette invece, come vedremo, di strarre informazioni complementari sulle distribuzioni dei quark. I neutrini, accoppiandosi ai quark attraverso la interazione debole, permettono di distinguere tra i diversi tipi di quark ed anche tra quark ed antiquark.

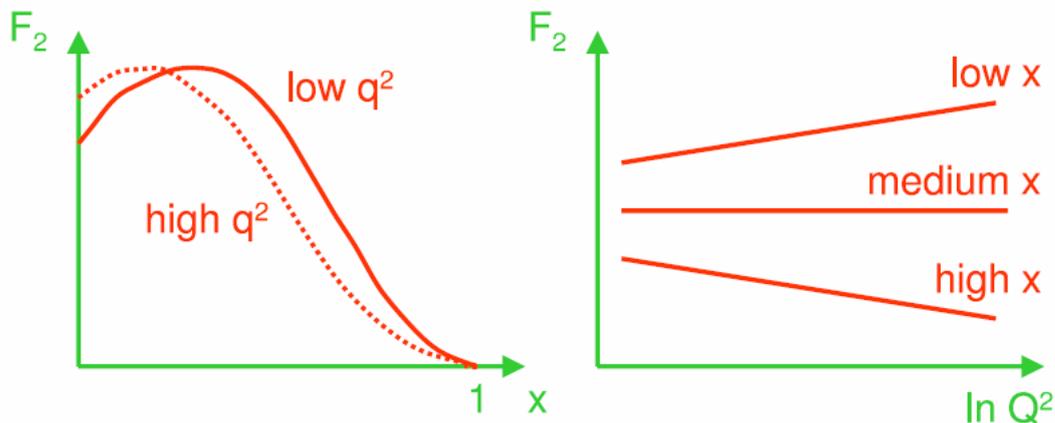
Combinando i risultati della diffusione di neutrini ed anti-neutrini, si ottengono separatamente **la distribuzioni in impulso per i quark di valenza e del mare.**

- ◆ From a fit to all current data :
(including neutrino scattering - see later)

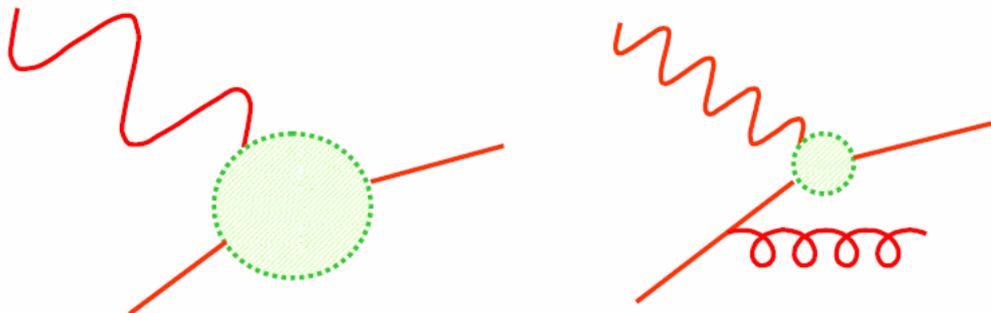


Violazione dello Scaling delle Funzioni di Struttura

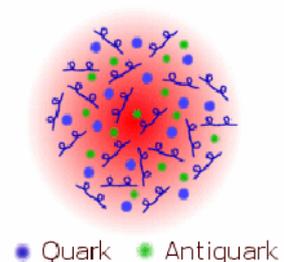
- ◆ Esperimenti di precisione dimostrano delle piccole deviazioni dallo scaling esatto di Bjorken:



- ◆ Al crescere di Q^2 nel nucleone ci sono sempre meno quark che hanno una frazione consistente dell' impulso totale. In altre parole i quark che trasportano una piccola frazione dell' impulso totale tendono a predominare.

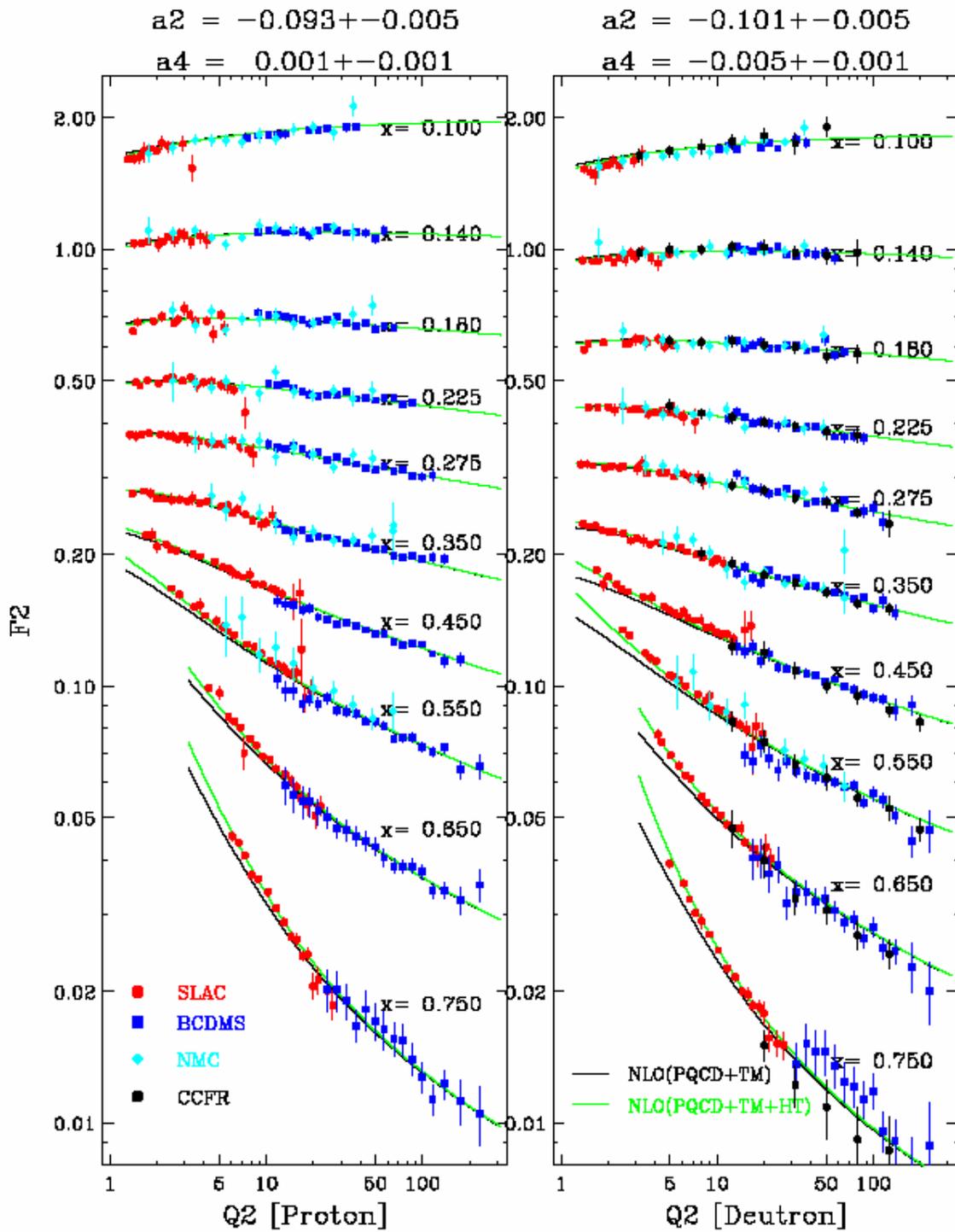


- ⇒ Questa violazione di scala NON e' dovuta ad una qualche dimensione FINITA dei quark. E' invece riconducibile, nell' ambito della QCD, ai processi fondamentali che intervengono nelle continue interazioni fra i partoni all' interno dei nucleoni. Ne risulta che la distribuzione di impulso dei costituenti del nucleone cambia in continuazione.



Scaling violations: $F_2(x, Q^2)$

Summary of fixed target data:



e^-p, μ^-p

$e^-d, \mu^-d, (vd)$

Bibliografia Cap. 2

- ◆ Particelle e Nuclei ; B. Povh et all
Capitoli 6 e 7 e paragrafo 8.1.
- ◆ Nuclear and Particle Physics ; Burcham and Jobes
Paragrafi : 12.1; e dal paragrafo 12.3 al paragrafo
12.8 compreso