

# Stochastic Cooling




Alessandro Lovato

# La Luminosità

Lo scopo ultimo dell'acceleratore è produrre il maggior numero di eventi nel minor tempo possibile.

La rate di produzione di eventi è data dalla relazione:

$$\dot{N} = \sigma_p L$$


“Sezione d’urto” data dalle leggi della Natura

“Luminosità”, una misura della probabilità di interazione tra i fasci e determinata dalle performance dell’acceleratore.

Abbiamo visto che la luminosità è:

$$L = \frac{1}{4\pi} \frac{f_{rev} N_1 N_2}{\sigma_x \sigma_z}$$

Notiamo l’importanza di avere tante particelle circolanti e fasci con sezioni strette.

# Alcuni numeri...

Per avere un'idea degli ordini di grandezza in gioco riporto le energie e le luminosità di picco di alcuni acceleratori

SPS	protone-antiprotone	400 GeV	$L_{\text{picco}} = 5,0 \cdot 10^{28} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$
Tevatron	protone-antiprotone	960 GeV	$L_{\text{picco}} = 3,0 \cdot 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}$
KEK	elettrone-positrone	8,0 GeV; 3.5 GeV	$L_{\text{picco}} = 3,0 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}$
PEPII	elettrone-positrone	9,0 GeV; 3.1 GeV	$L_{\text{picco}} = 1,6 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}$
Daφne	elettrone-positrone	510 MeV	$L_{\text{picco}} = 1,6 \cdot 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}$

E' da notare che le Luminosità dei collisori leptonici sono molto più alte rispetto a quelli adronici.

# Uso degli antiprotoni

Uno dei più potenti mezzi che abbiamo a disposizione osservare le interazioni fondamentali è l'annichilazione tra quark e antiquark.

Fino ad energie di circa 3 TeV la sezione d'urto adronica è dominata dagli effetti dei quark e degli antiquark di valenza. Per questo motivo i collisori adronici usati finora, tutti ben sotto i 3TeV, sono macchine protone-antiprotone.

Le macchine protone-antiprotone hanno inoltre il vantaggio di poter avere un solo anello, grazie alle cariche opposte delle particelle circolanti.



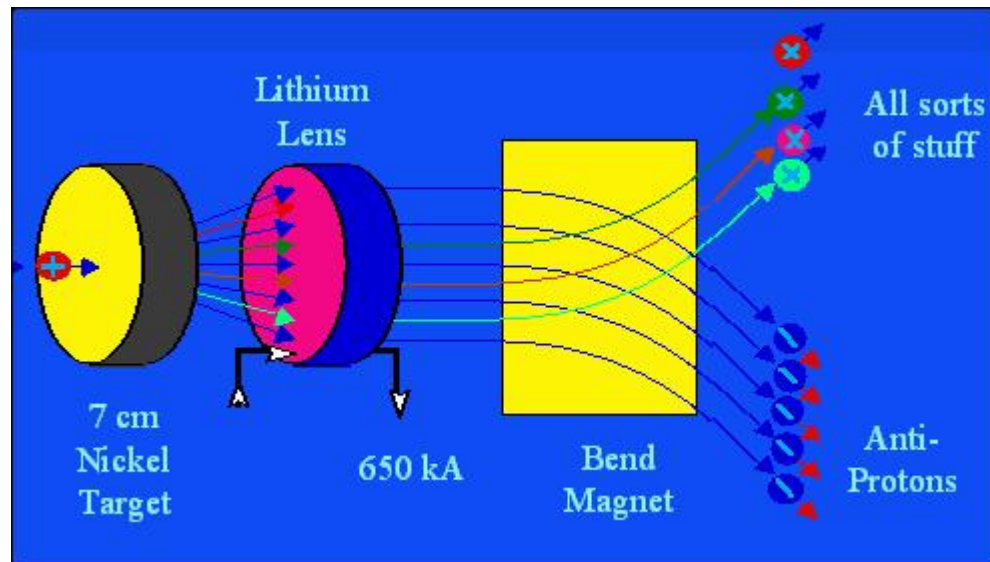
Gli antiprotoni si producono facendo sbattere fasci di protoni su una targhetta. Il fascio così risultante non è certo adatto all'esperimento, perché:

- Ha una sezione trasversa grande;
- Non è puro;
- E' poco intenso;

# Creazione di antiprotoni

Per capire come si fa per usare gli antiprotoni ripercorriamo a grandi linee la catena del Tevatron, il più grande collisore protone antiprotone mai realizzato.

1. Un fascio di protoni a 120 GeV sbatte su una targhetta di Nickel ogni 1.5 secondi.
2. Tutte le particelle risultanti da questa interazione vengono foceggiate da una lente di Litio.
3. Usando un magnete curvante gli antiprotoni vengono separate dalle altre particelle.



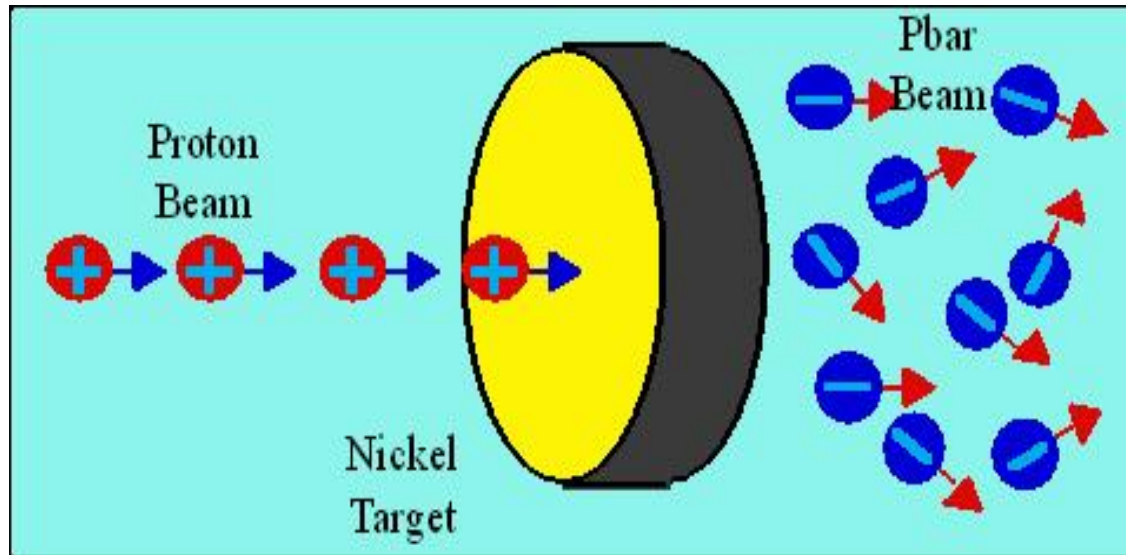
# Perché “cooling”

Gli antiprotoni selezionati dal magnete curvante sono “caldi”. Cosa vuol dire questo?

Nella teoria cinetica dei gas la temperatura è proporzionale all’energia cinetica media delle particelle secondo la relazione:

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle$$

Gli antiprotoni uscenti dalla targhetta sono quindi “caldi” perché la loro velocità quadratica media nel centro di massa è elevata.

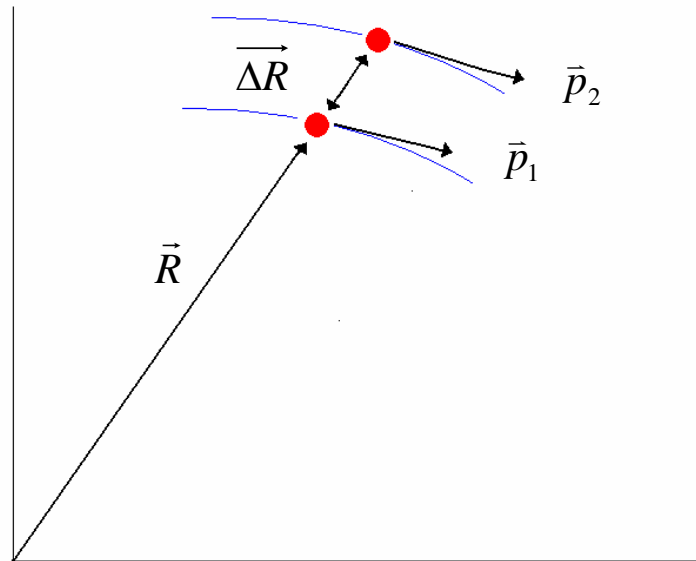


# Impulso e raggio dell'orbita

In fisica degli acceleratori il valore dell'impulso (ovvero dell'energia) ed il raggio dell'orbita sono legati dalla relazione:

$$pc[GeV] = 0.33 R[metro]B[Tesla]$$

Si capisce quindi facilmente perché avere particelle “fredde” corrisponde ad avere un fascio con sezione trasversa molto ridotta.

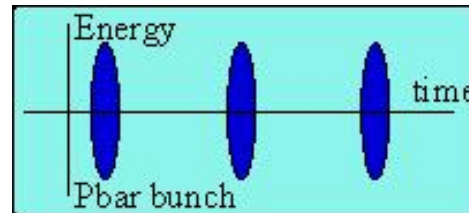


Continuiamo a seguire il viaggio degli antiprotoni per capire le tecniche di raffreddamento.

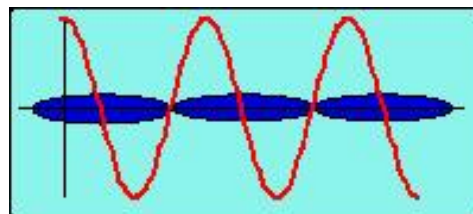
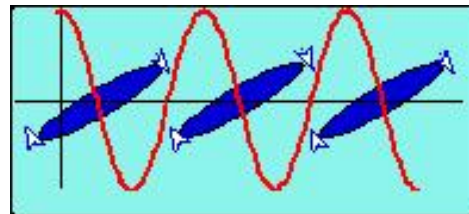
# Il Debuncher del Tevatron

Abbiamo visto che a causa del processo di collisione sulla targhetta gli antiprotoni presentano un'elevata dispersione in energia.

Dato che i protoni incidenti sulla targhetta viaggiano in pacchetti, anche i caldi antiprotoni uscenti sono divisi in bunch.



Da qui la necessità di usare il Debuncher, un piccolo anello circolare a bassa energia (8 GeV) dotato di cavità RF. Grazie all'azione di questa cavità le particelle più energetiche sono rallentate, quelle meno energetiche accelerate.





# Lo stochastic cooling

A causa della pressoché nulla emissione per radiazione di sincrotrone da parte degli antiprotoni, il processo di riduzione della dispersione col solo uso della cavità RF non è sufficiente e giunge al limite entro 100 ms.

Si ricorre allora al raffreddamento stocastico, sempre nel Debuncher.

Una volta raffreddati, gli antiprotoni vengono iniettati nell'accumulatore, un anello sempre a 8 GeV concentrico al Debuncher, ad intervalli di circa 2 secondi. Il processo di riempimento dell'accumulatore, che può contenere fino a  $1,5 \cdot 10^{12}$  antiprotoni è piuttosto lungo, circa un giorno. Gli antiprotoni infatti devono occupare una piccola porzione dello spazio delle fasi per poter essere iniettati.

Dall'ottobre del 2005 per migliorare le prestazioni del Tevatron è operativo il Recycler, un anello di accumulazione dotato di "electron cooling".

# Oscillazioni di Betatrone

Ricordiamo che in un acceleratore l'equazione che governa il moto di una particella soggetta agli elementi dell'ottica lineare è:

$$x''(s) + K(s)x(s) = \frac{1}{R} \frac{\Delta p}{p_0}$$

Con:

$$K(s) = \left( \frac{1}{R^2} - k \right) (s)$$

Se trascuriamo il termine  $\frac{1}{R} \frac{\Delta p}{p_0}$ , otteniamo l'equazione di Hill:

$$x''(s) + K(s)x(s) = 0$$

La soluzione di Floquet di questa equazione è:

$$x(s) = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s) + \varphi]$$

Emittanza

Ampiezza di Betatrone

# Oscillazioni di Betatrone

Il teorema di Floquet ci dice inoltre che nell'equazione:

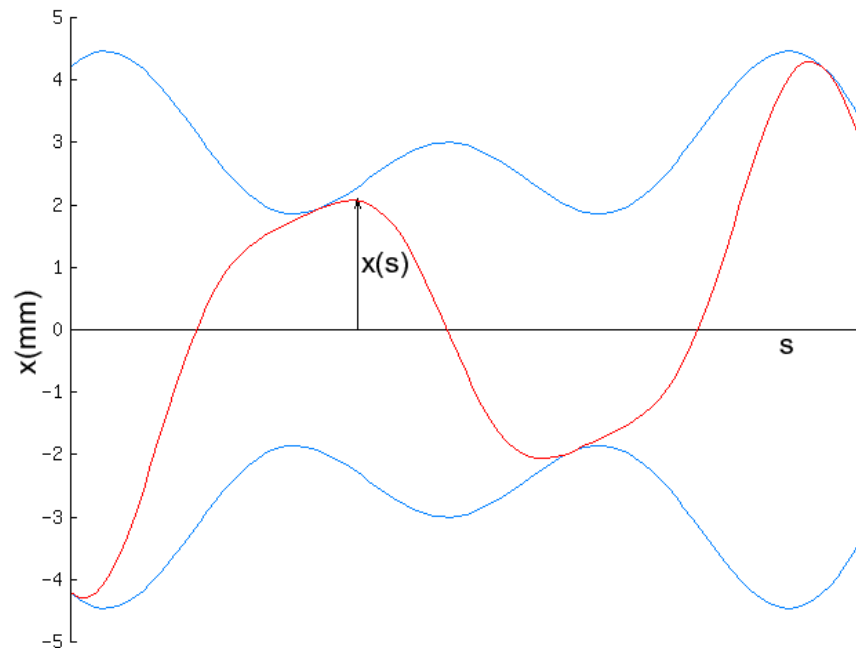
$$x(s) = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s) + \varphi]$$

Si ha che:

$$\beta(s + L) = \beta(s)$$

$$\psi(s + L) - \psi(s) = 2\pi\mu \quad \text{con} \quad m\mu_x + n\mu_y \neq p \quad (m, n, p \in \mathbb{N})$$

Sempre dalla soluzione di Floquet osserviamo che il moto delle particelle si svolge all'interno di un involuppo:



# Il teorema di Liouville

Usando la soluzione di Floquet e la sua derivata, ricordando la relazione trigonometrica generale:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

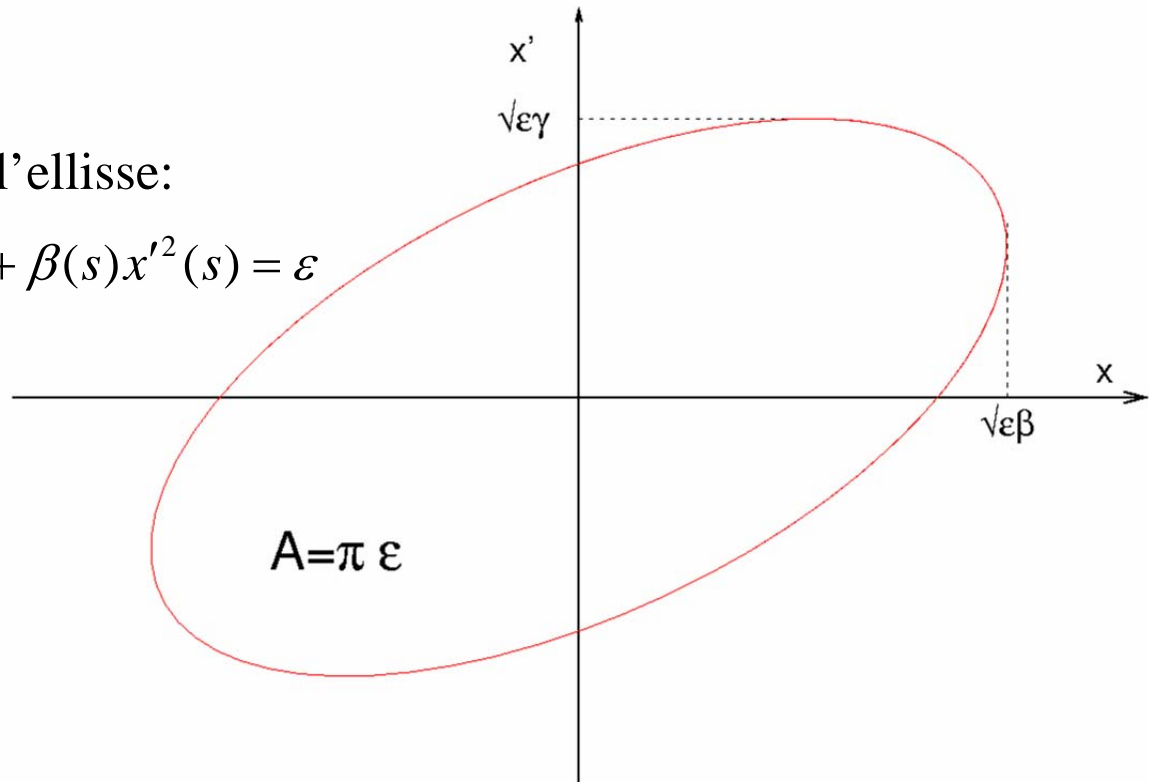
Otteniamo l'equazione dell'ellisse:

$$\gamma(s)x^2(s) + 2\alpha(s)x(s)x'(s) + \beta(s)x'^2(s) = \varepsilon$$

Avendo introdotto:

$$\alpha(s) = -\frac{\beta'(s)}{2}$$

$$\gamma(s) = \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)}$$



Abbiamo trovato quindi che l'emittanza è proporzionale all'area dell'ellisse.



Per il teorema di Liouville è una costante del moto!

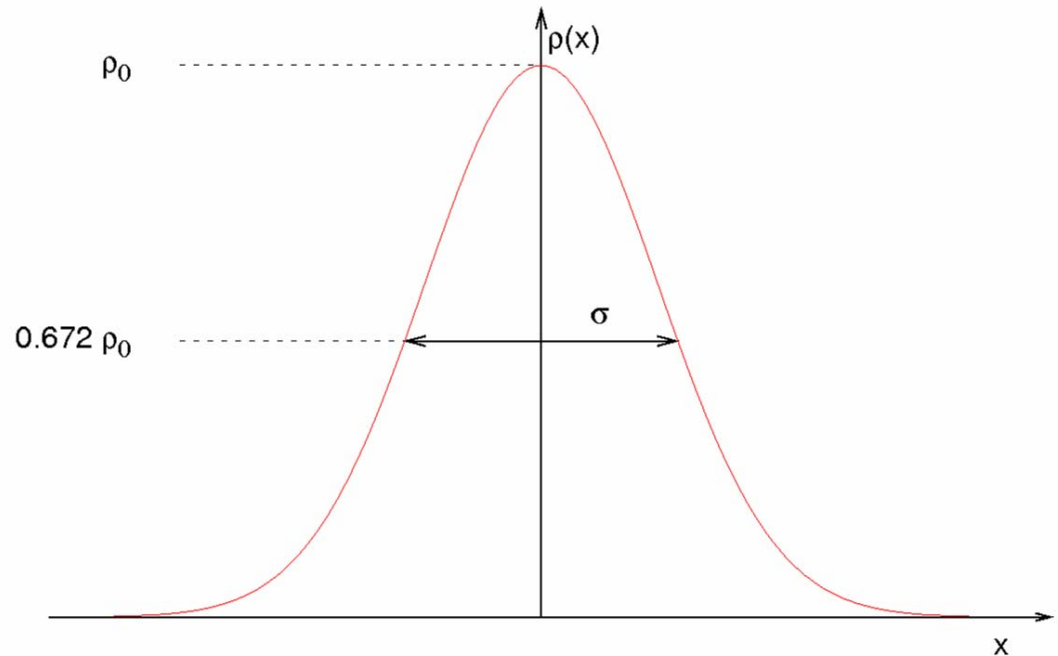
# Più particelle

In un acceleratore ogni particella ha la sua emittanza e quindi, un diverso ellisse nello spazio delle fasi, con una diversa area.

Sorge il problema di definire l'emittanza media del fascio.

Nel caso degli elettroni la radiazione di sincrotrone fa sì che la densità di carica all'equilibrio sia gaussiana:

$$\rho(x) = \frac{Ne}{2\pi\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$



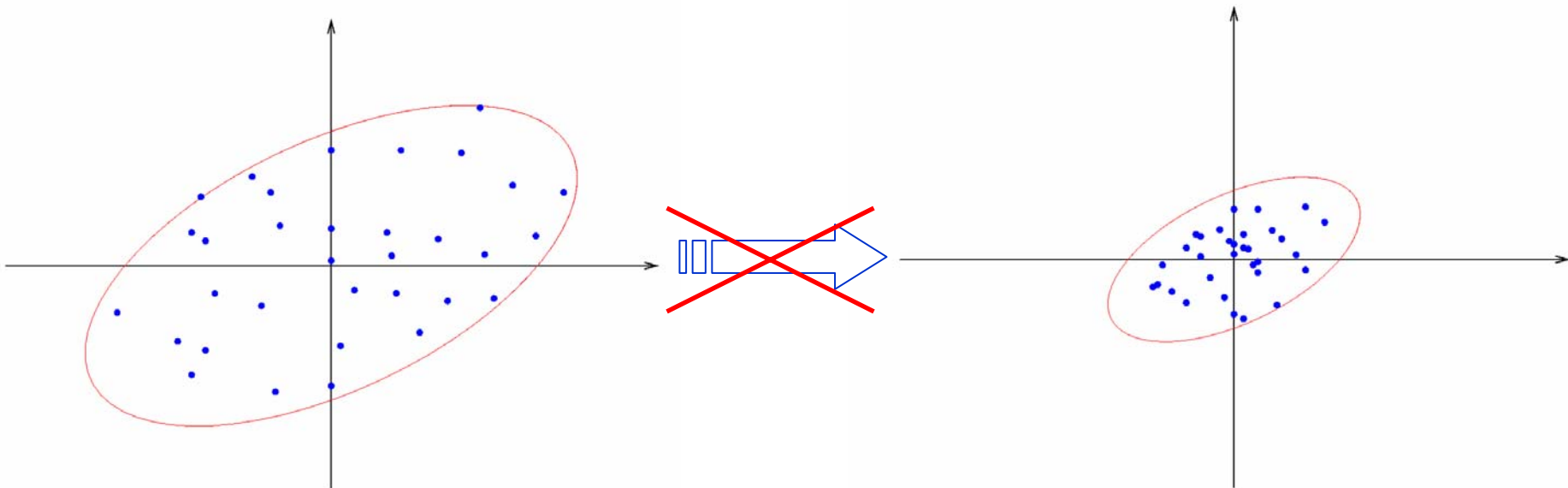
# Violazione Liouville?

Possiamo quindi dare significato statistico all'emittanza del fascio definendola come l'emittanza di una particella che si trova a una deviazione standard  $\sigma$  dall'asse:

$$\sigma(s) = \sqrt{\varepsilon_{STD} \beta(s)}$$

Quindi...vi ho imbrogliato?

Se l'emittanza è una costante del moto come faccio a raffreddare il fascio? Raffreddare il fascio infatti vuol dire aumentare la densità delle particelle nello spazio delle fasi, ovvero restringere l'ellisse durante il moto, cosa vietata dal teorema di Liouville.

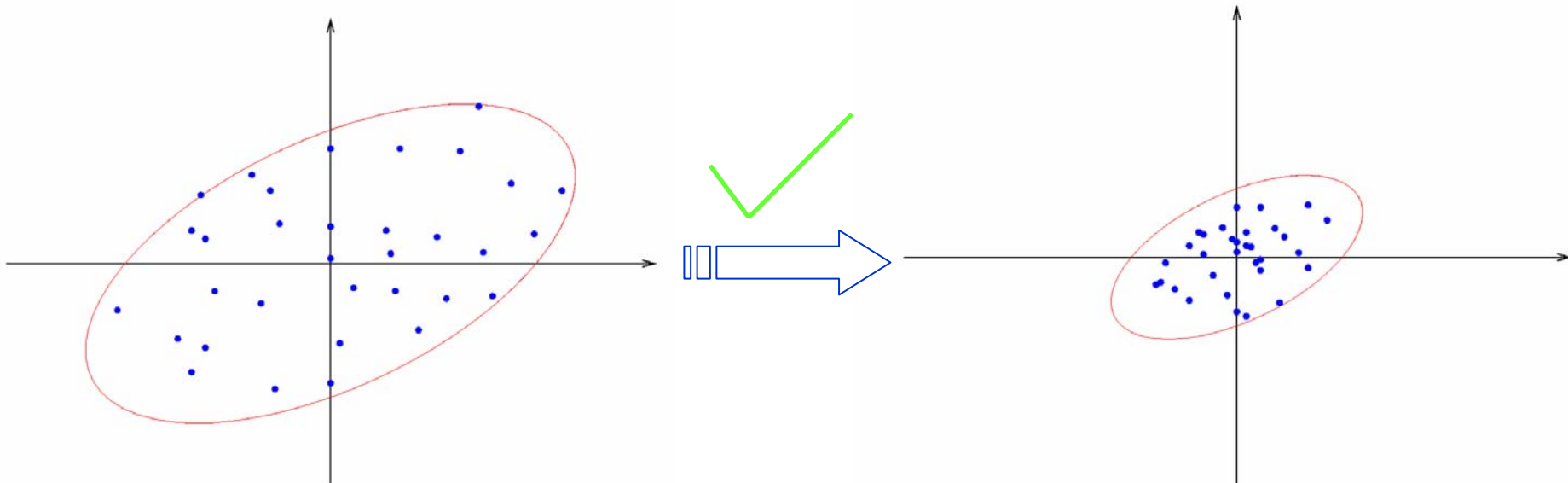


# Ciruire Liouville

Chiaramente non vi sto imbrogliando e il teorema di Liouville non viene violato.

Ai diversi metodi di raffreddamento corrispondono diverse strategie per ciruire il teorema di Liouville.

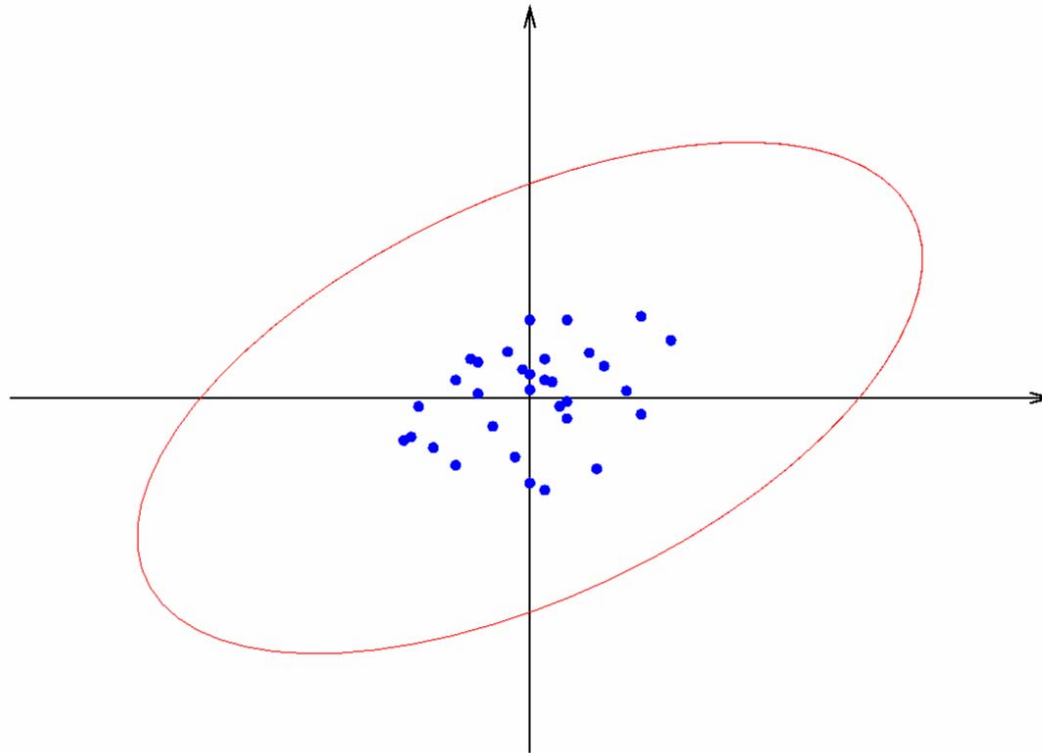
- Nel “Radiation damping” l’emissione di radiazione di sincrotrone viola la conservazione dell’energia, il sistema non è più Hamiltoniano e quindi il teorema di Liouville non si può più applicare.
- Nell’electron cooling si può fare lo stesso ragionamento, ma per i dettagli...dovrete aspettare un quarto d’ora!



# L'idea dello stochastic cooling

L'idea di Van der Meer per ridurre lo spazio delle fasi occupato dal sistema è sfruttare il fatto che le particelle sono punti circondate dallo spazio vuoto.

Se distorciamo lo spazio delle fasi in modo da spostare le particelle al centro dell'ellisse e lasciare lo spazio vuoto all'esterno, abbiamo ottenuto il nostro scopo senza violare Liouville!



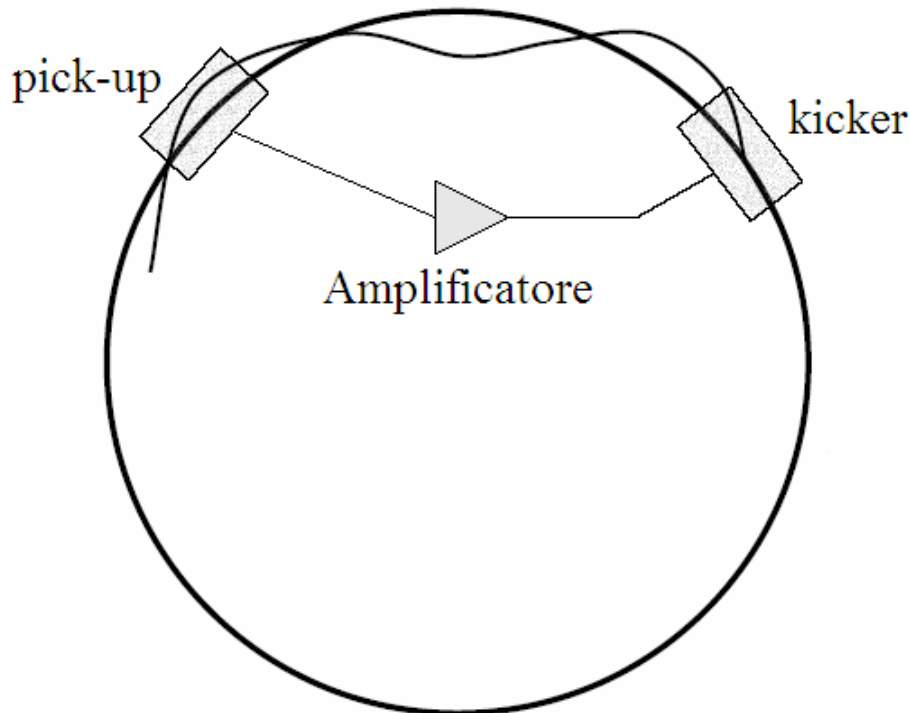


# Schema dello stochastic cooling

Per poter applicare questo metodo occorre però:

- Rilevare la posizione delle singole particelle;
- Spostarle individualmente.

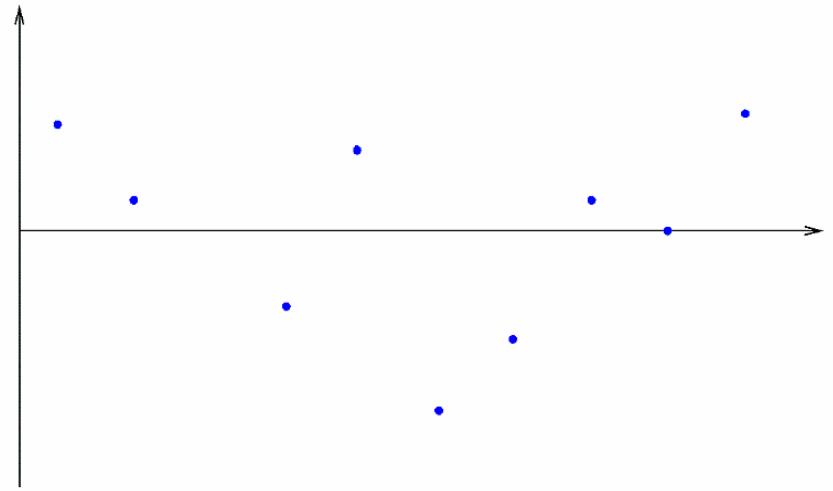
Una rappresentazione schematica del sistema del raffreddamento stocastico che permette tutto questo è la seguente:



# Il sistema dello stochastic cooling

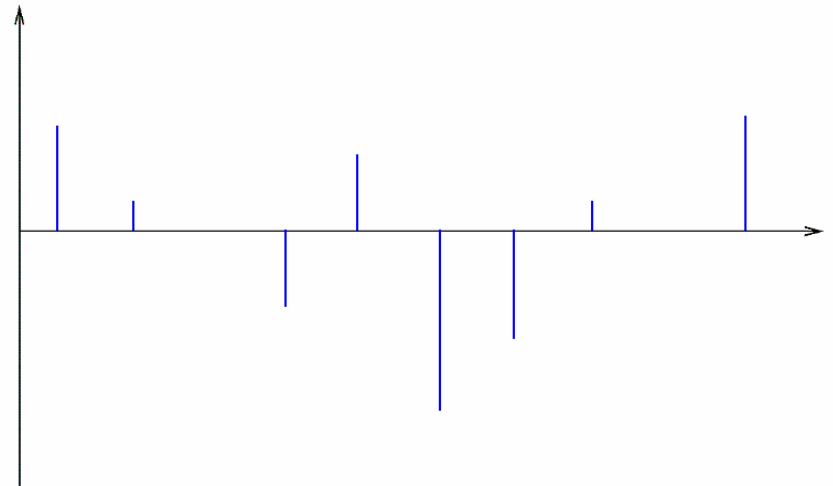
Se avessimo un sistema ideale in grado di risolvere la singola particella e di riuscire a darle il giusto “calcio” per portarla al centro dello spazio delle fasi, in un giro il fascio sarebbe completamente raffreddato.

Posizione trasversa delle particelle



Segnale pick-up con larghezza di banda infinita:

$$\lambda(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_k)$$

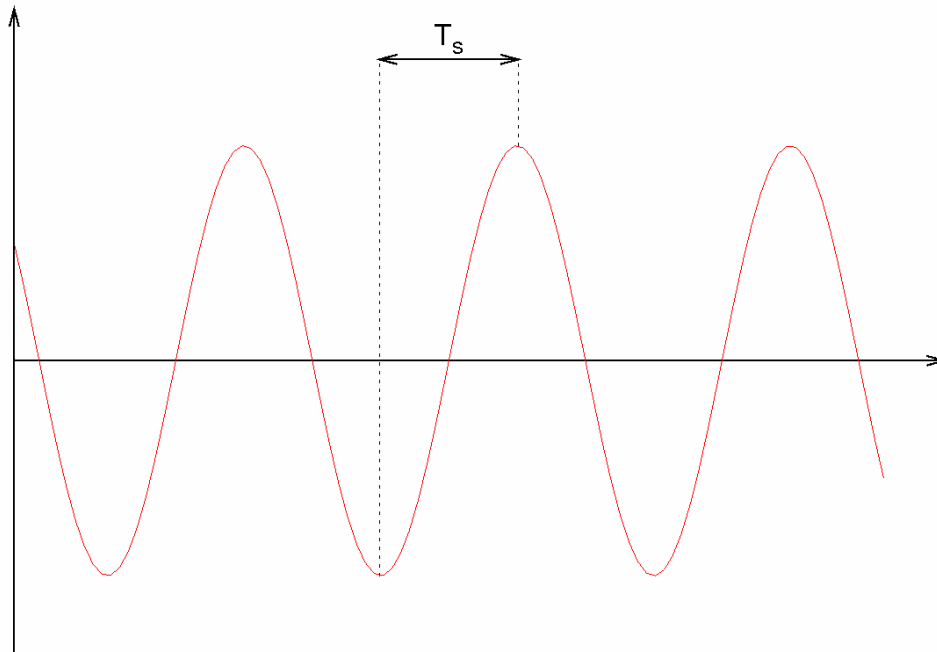


# Situazione reale

In un sistema reale dobbiamo tener conto che la larghezza di banda è finita, ovvero che la massima frequenza del segnale nell'elettronica non è infinita.

Se applichiamo il teorema di Nyquist-Shannon possiamo dire che se  $W$  è la larghezza di banda del sistema, due particelle per essere risolte devono distare almeno:

$$T_s = \frac{1}{2W}$$



# Il Sample

Il “Sample” è l’insieme di tutte le particelle che attraversano il pick-up in tempi inferiori a  $2T_s$  e sono quindi indistinguibili.

Il numero di particelle contenute nel sample è dato da:

$$N_s = \frac{N}{T} T_s = \frac{N}{2WT}$$

Numeri tipici per un acceleratore sono:

$$\begin{cases} N \sim 10^9 \\ W \sim 100 \text{ MhZ} \leftrightarrow T_s \sim 5 \text{ ns} \\ T \sim 1 \mu\text{s} \end{cases}$$

Quindi:

$$N_s \sim 5 \cdot 10^6$$

E’ un numero molto grande che ci permetterà di fare della statistica.

# Mirare e calciare

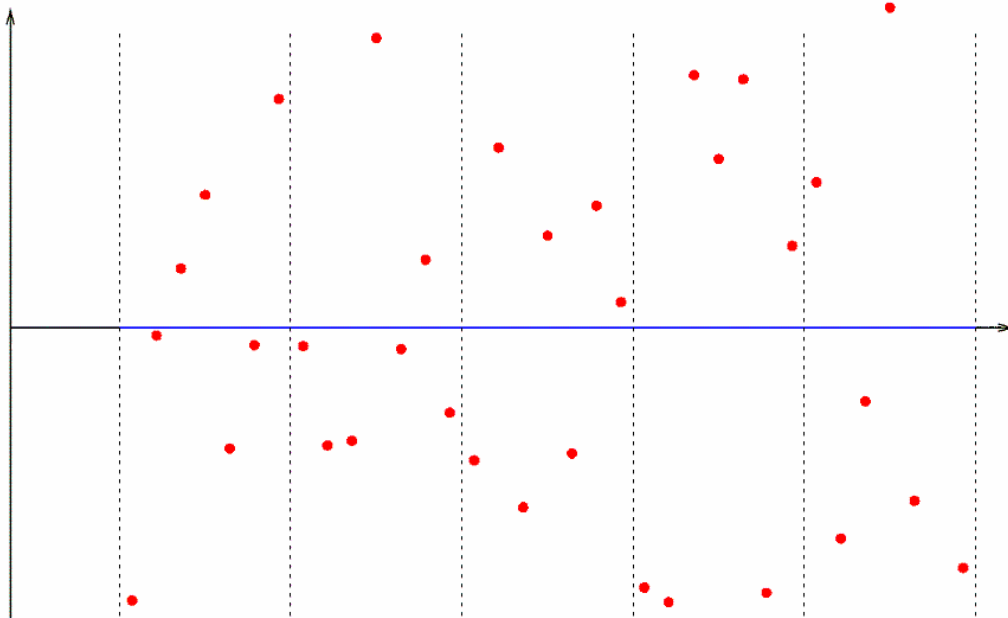
Andiamo ad analizzare nel dettaglio il processo di raffreddamento nel dominio del tempo per ricavare il tempo di cooling.

Ad ogni giro il pick-up rileva la posizione media delle particelle nel sample...

$$x_{s,n} = \frac{1}{N_s} \sum_{\text{sample}} x_{i,n}$$

... e il kicker corregge la posizione di ogni particella come:

$$x_{n+1} = x_n - x_{s,n}$$



Dopo il primo giro il valor medio della posizione di tutte le particelle  $M$  è nullo:

$$\overline{x}_n = \frac{1}{M} \sum_{\text{tutte}} x_{i,n} = 0 \quad \text{se } n \geq 1$$

# Perché “stochastic”?

Se il moto delle particelle fosse statico, ovvero tipo corpo rigido, il cooling si arresterebbe dopo un giro. Questo perché la posizione media delle particelle in ogni sample si troverebbe già sull'asse del fascio.

Grazie al fatto che  $\mu$  non è intero e al fatto che particelle differenti hanno energie differenti e quindi tempi di rivoluzione differenti, possiamo assumere che i sample si rinnovino completamente ad ogni giro e siano perciò “stocastici”.

Per dare un'idea visiva del processo di cooling ho scritto in LabView un piccolo programma che simula il processo di raffreddamento iterando questi processi:

1. Estrae N numeri secondo una distribuzione gaussiana centrata in 0 con  $\sigma=1$ .
2. Calcola la media dei numeri estratti (in generale  $\neq 0$ ) e la sottrae ad ognuno in modo da costruire una nuova gaussiana a media nulla.
2. Calcola la  $\sigma'$  della nuova gaussiana e reitero con  $\sigma=\sigma'$ .

# Calcolo del tempo di cooling

Dopo aver visto che la sezione trasversa del fascio diminuisce all'aumentare delle interazioni, facciamo il calcolo esatto del tempo di raffreddamento. Ci mettiamo nel caso semplice in cui si ha:

- Completo mixing dei sample ad ogni giro.
- Segnale privo di rumore

Abbiamo visto che il kicker ad ogni giro corregge la posizione di ogni particella come:

$$x_{n+1} = x_n - x_{s,n}$$

Eleviamo al quadrato e mediamo su tutte le M particelle circolanti.

$$\overline{x_{n+1}^2} = \overline{x_n^2} - \overline{2x_n x_{s,n}} + \overline{x_{s,n}^2}$$

E' immediato dimostrare che:

$$\overline{2x_n x_{s,n}} = \overline{2x_{s,n}^2}$$

# Calcolo del tempo di cooling

Sostituendo otteniamo:

$$\overline{x_{n+1}^2} - \overline{x_n^2} = -\overline{x_{s,n}^2} \longrightarrow \frac{\overline{x_{n+1}^2} - \overline{x_n^2}}{\Delta n} = -\overline{x_{s,n}^2} \longrightarrow \frac{\overline{x_{n+1}^2} - \overline{x_n^2}}{\Delta n} = -\frac{\overline{x_{s,n}^2}}{\overline{x_n^2}} \cdot \overline{x_n^2}$$

Dai teoremi di statistica si può dimostrare che:

$$\frac{\overline{x_{s,n}^2}}{\overline{x_n^2}} = \frac{1}{N_s}$$

Giungiamo quindi all'equazione discreta i cui “cavallerescamente” prendiamo il limite per  $\Delta n \rightarrow 0$ .

$$\frac{\overline{x_{n+1}^2} - \overline{x_n^2}}{\Delta n} = -\frac{1}{N_s} \cdot \overline{x_n^2} \longrightarrow \frac{d\overline{x^2}}{dn} = -\frac{1}{N_s} \overline{x^2}$$

L'ultima equazione è facilmente integrabile e arriviamo infine a:

$$\overline{x^2}(n) = \overline{x^2}(0) \cdot e^{-\frac{n}{N_s}}$$



# Calcolo del tempo di cooling

Dato che, come abbiamo detto:

$$\overline{x(n)} = 0 \quad \text{per } n \geq 1$$

Per la sezione trasversa del fascio:

$$\sigma(n) = \sqrt{x^2(n)} = \sigma(0) \cdot e^{-\frac{n}{2N_s}}$$

Possiamo calcolare il numero di giri  $n_\tau$  per cui la  $\sigma(n)$  si riduce di un fattore  $1/e$ :

$$n_\tau = 2N_s$$

Dal quale discende il “tempo di cooling”  $\tau$ , ovvero il tempo in cui la  $\sigma(n)$  si riduce di un fattore  $1/e$ :

$$\tau = n_\tau T = 2N_s T = \frac{N}{W}$$

Per giungere al risultato corretto però bisogna considerare che le particelle non arrivano sempre al kicker con la fase voluta. Bisogna correggere il risultato con un fattore 2, dovuto al valor medio del seno al quadrato:

$$\tau = \frac{2N}{W} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\tau} = \frac{W}{2N}$$

# Calcolo del tempo di cooling

Se introduciamo il fattore di guadagno “g” nell’azione del kicker:

$$x_{n+1} = x_n - gx_{s,n}$$

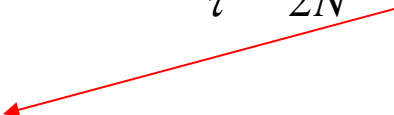
Rifacendo esattamente gli stessi conti si trova per il tempo di cooling:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{W}{2N} (2g - g^2)$$


che chiaramente ha un minimo per  $g=1$  come trovato in precedenza.

L’utilità del parametro di guadagno sussiste quando consideriamo un fascio “vero”. In questo caso per il tempo di cooling si trova:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{W}{2N} [2g - g^2(M + U)]$$



Termine coerente, corrisponde all’effetto della particella su se stessa.



Termine incoerente, rappresenta il riscaldamento dovuto alle altre particelle del sample. E’ dovuto al cattivo mescolamento ( $M > 1$ ) e al rumore del segnale (U).

# Il tempo di cooling ottimale

Possiamo impostare il guadagno del kicker per minimizzare il tempo di cooling.

Deriviamo allora l'espressione del tempo di cooling rispetto a  $g$  per trovarne il minimo (ovvero il massimo dell'inverso):

$$0 = \frac{d}{dg} \left( \frac{1}{\tau} \right) = \frac{d}{dg} \left( \frac{W}{2N} [2g - g^2(M + U)] \right) \longrightarrow g = \frac{1}{(M + U)}$$

Troviamo quindi il tempo di cooling ottimale:

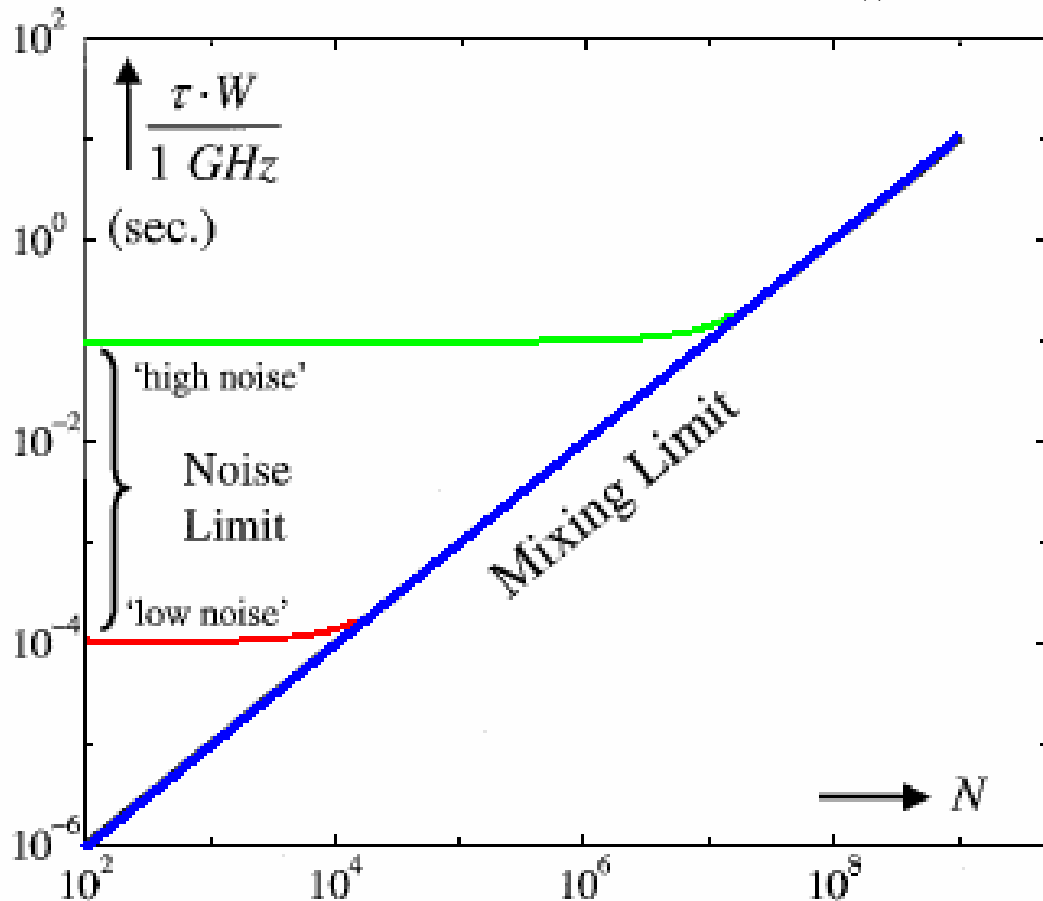
$$\frac{1}{\tau_{ottimale}} = \frac{W}{2N} \frac{1}{(M + U)} \longrightarrow \tau_{ottimale} = \frac{2N}{W} (M + U)$$

Per ottimizzare il sistema occorre quindi un'elettronica con una larghezza di banda molto grande (attualmente  $\sim$  GHz) e una buona randomizzazione del fascio.

# Il tempo di cooling ottimale

Grafichiamo l'andamento del tempo di cooling ottimale in funzione del numero  $N$  di particelle, distinguendo i vari termini dominanti.

$$\tau_{ottimale} = \frac{2N}{W}(M + U)$$



I contributi dominanti nelle varie zone sono:

—  $\tau_{M.L.} = \frac{2N}{W}M$   
—  $\tau_{h.n.} = \frac{2N}{W}(U_h)$   
—  $\tau_{l.n.} = \frac{2N}{W}(U_l)$

# SPS

La prima applicazione dello Stochastic cooling è stata fatta all'SPS, il protosincrotone del CERN.

La storia di questa macchina acceleratrice è piuttosto particolare.

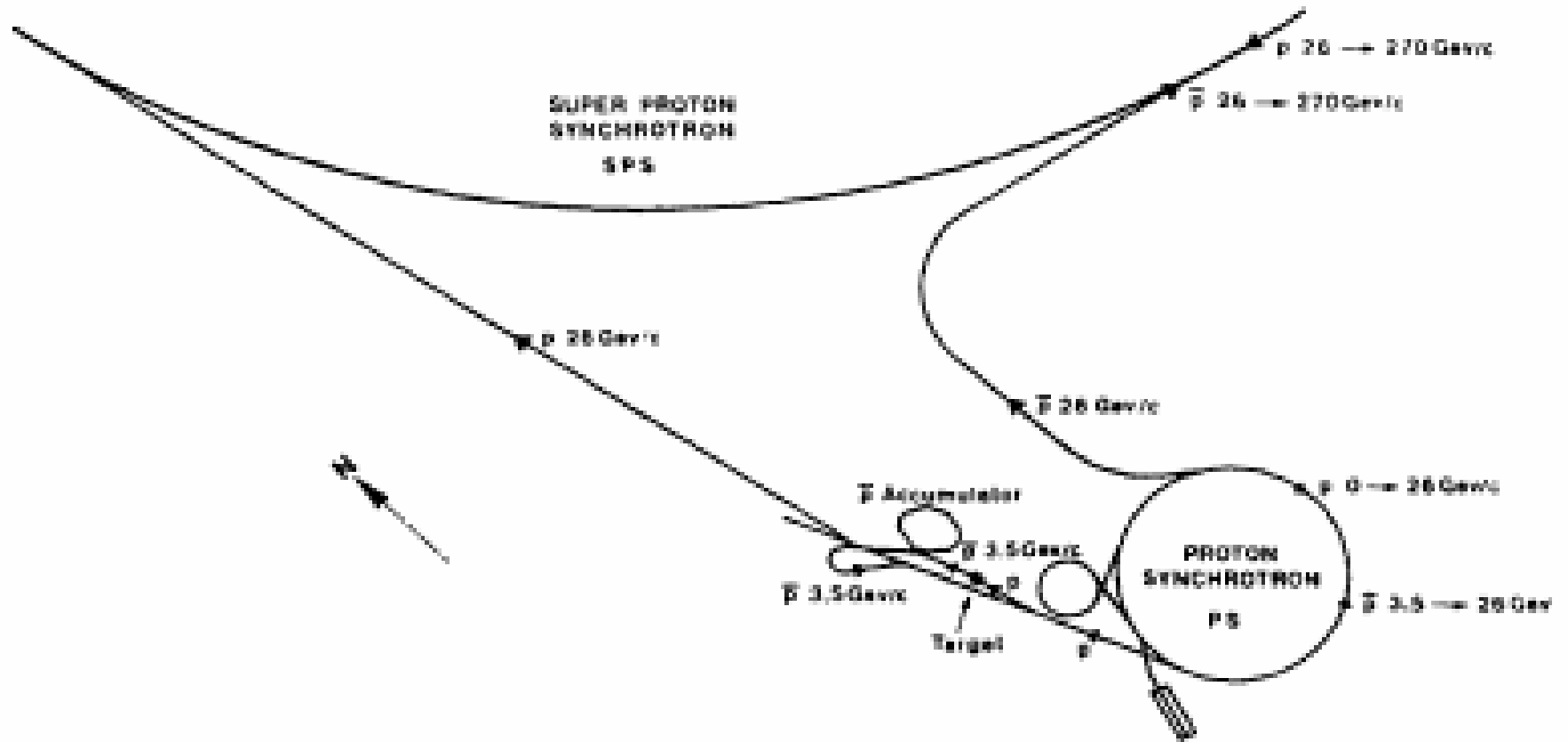
Venne progettata come macchina a protoni e l'energia di progetto di 400 GeV fu raggiunta il 17 Giugno 1976. Al Fermilab però il 14 Maggio dello stesso anno era stata raggiunta l'energia di 500 GeV.

L'idea di Rubbia allora fu di convertire il protosincrotrone in un collider tra protoni e antiprotoni. In due dei sei punti di collisione erano posizionati gli esperimenti UA1 e UA2, che, come ben sappiamo, osservarono per la prima volta i bosoni  $W^\pm$  e  $Z^0$ .

Tutto questo non sarebbe stato possibile senza lo stochastic cooling, ideato in quegli anni da Simon Van Der Meer che permetteva di accumulare gli antiprotoni necessari all'esperimento prima di essere iniettati nel collider vero e proprio.

Una curiosità al riguardo è che Rubbia non voleva utilizzare il raffreddamento stocastico, ancora in fase sperimentale, ma il più rodato electron cooling.

# SPS



# Bibliografia

- **S. Van Der Meer** *An Introduction to Stochastic Cooling*, CERN/PS/84-33
- **S.P. Moller** *Cooling Techniques*.
- **D. Möhl** *Beam Cooling: Past, present and future* Beam Cooling and Related Topics Workshop.
- **A.V. Fedotov** *High energy electron cooling in a collider* New journal of physics.