

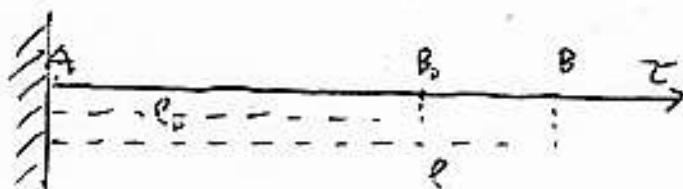
# EQUAZIONE UNIDIMENSIONALE DELLE ONDE

In questo capitolo vogliamo studiare un modello con numero infinito di gradi di liberta' e mostrare come lo si possa affrontare con i metodi lagrangiani precedentemente introdotti. Studieremo l'importante equazione delle onde; la esamineremo nel caso unidimensionale ove viene detta anche della *corda vibrante*. Il modello fisico e' di grande interesse e si riferisce a sistemi molto famigliari (come vedremo). Inoltre i risultati che otterremo saranno utili per gli studi di ulteriori modelli piu' sofisticati nella cosiddetta "teoria dei campi".

Il modello finale oggetto del nostro studio sara' molto schematico (anche se assai realistico); nel primo paragrafo vogliamo evidenziare le approssimazioni introdotte.

## 1. Filo elastico, energia di deformazione, piccoli moti trasversali

Si consideri un tratto di filo AB, omogeneo, perfettamente flessibile e *perfettamente elastico*, di lunghezza naturale  $l_0$ . Pensiamo l'estremo A fissato ed applichiamo all'estremo B una forza di trazione gradualmente crescente da zero fino ad un valore finale  $\tau$  che si conserva poi stazionario.



Il filo trova assetto in un ben determinato stato rettilineo di equilibrio C con lunghezza  $l$  ( $> l_0$ ) dipendente dalla trazione  $\tau$

$$l = \phi(\tau), \quad (1.1)$$

oltre che dalla lunghezza naturale  $l_0$ , dalle dimensioni trasverse del filo e dalla sua natura materiale.

Durante la deformazione, la trazione, gradualmente crescente da zero a  $\tau$ , compie un lavoro positivo  $L$  detto *lavoro di deformazione*.

La perfetta elasticità del filo implica, per definizione, la reversibilità del fenomeno: diminuendo gradualmente fino a zero la trazione esercitata sulla estremità B il filo torna fino alla lunghezza naturale  $l_0$  restituendo in questa fase di ripristino tutto il lavoro  $L$  che esso aveva ricevuto durante la fase di deformazione. Ciò induce a postulare che tutto il lavoro  $L$  eseguito sul filo durante la fase di deformazione sia andato ad accumularsi in esso sotto forma di una *energia potenziale elastica*  $U$ , dipendente unicamente dallo stato di deformazione del filo.

Non ci preoccupiamo di entrare nel dettaglio di come sia fatta la  $\phi$  nella (1.1), né della espressione che si potrebbe dedurre per  $U$ , ma consideriamo il filo nel precedente detto stato di equilibrio rettilineo forzato sotto la trazione  $\tau$  ed immaginiamo che per effetto di una variazione infinitesima (algebraica)  $\delta\tau$  di questa trazione il filo subisca una nuova deformazione infinitesima. La lunghezza del filo subirà una variazione (algebraica)  $\delta l$  ed in corrispondenza la trazione compirà un lavoro infinitesimo che a meno di infinitesimi di ordine superiore sarà dato da  $\tau \delta l$  essendo  $\tau$  la tensione iniziale (cioè la tensione uniforme del filo nello stato di equilibrio forzato C). La stessa quantità misura evidentemente l'aumento algebrico dell'energia potenziale del filo durante la deformazione infinitesima:  $\delta U = \tau \delta l$ . Se convenzionalmente si assume uguale a zero l'energia potenziale del filo nello stato di equilibrio forzato C la formula precedente si può semplicemente scrivere

$$U = \tau \cdot \delta l. \quad (1.2)$$

La formula (1.2) fornisce un mezzo molto semplice per calcolare l'energia potenziale di un filo negli stati infinitamente prossimi allo stato di equilibrio forzato C.

Estrapolando i risultati precedenti anche a condizioni dinamiche, noi ammetteremo che la formula (1.2) fornisca l'energia potenziale elastica del filo ogniqualvolta esso si trovi, in condizioni statiche o dinamiche, in una configurazione  $C'$ , anche non rettilinea, infinitamente prossima alla condizione di equilibrio forzato  $C$ . (Sottolineo che quando si dice che la configurazione  $C'$  e' infinitamente prossima a  $C$ , non si intende soltanto che la *linea geometrica*  $C'$  e' infinitamente prossima alla *linea geometrica*  $C$ , ma si vuole intendere che ogni *punto fisico* di  $C'$  e' infinitamente vicino alla posizione che esso occupa in  $C$ ).

Abbiamo svolto una prima approssimazione sulla energia potenziale  $U$ . Vediamo ora altre approssimazioni sullo stato dinamico del filo.

Consideriamo un tratto di filo elastico omogeneo teso fra due estremi fissi  $A$  e  $B$ , in stato di equilibrio. Introduciamo una terna cartesiana trirettangola  $xyz$  con l'asse  $x$  sovrapposto ed equiorientato alla retta  $AB$  ed origine in  $A$ . Supponiamo che per effetto di una perturbazione iniziale (spostamento del filo dalla posizione di equilibrio ed eventualmente velocita' iniziali imprresse ai suoi punti) il filo incominci a muoversi. Trattandosi di un sistema continuo unidimensionale il suo moto risultera' descritto da tre equazioni del tipo:

$$x = x(x^*, t), \quad y = y(x^*, t), \quad z = z(x^*, t) \quad (1.3)$$

dove la variabile  $x^*$ , ascissa del generico punto del filo nella posizione di equilibrio, basta da sola ad individuare un punto fisico del filo stesso. (Tale maniera di descrivere un sistema continuo viene detta "lagrangiana").

Faremo sul moto le seguenti ipotesi semplificative:

i) **Infinitesimalita' fisica del moto.**

Con tale ipotesi si vuole intendere che per tutta la durata del moto la configurazione del filo si mantiene prossima in *distanza* ed in *forma* alla configurazione di equilibrio. Piu' precisamente cio' significa imporre alle funzioni (1.3) la seguenti limitazioni:

$$\frac{|x - x^*|}{l} < \epsilon, \quad \frac{|y|}{l} < \epsilon, \quad \frac{|z|}{l} < \epsilon, \quad (1.4)$$

$$\left| \frac{\partial(x - x^*)}{\partial x^*} \right| < \epsilon, \quad \left| \frac{\partial y}{\partial x^*} \right| < \epsilon, \quad \left| \frac{\partial z}{\partial x^*} \right| < \epsilon, \quad (1.5)$$

e essendo un valore numerico prefissato. (Osserviamo che le condizioni (1.4) da sole assicurano soltanto che la configurazione del filo si mantiene prossima alla configurazione di equilibrio *in distanza*. Per assicurare la vicinanza anche *in forma* si richiede l'aggiunta delle condizioni (1.5)).

ii) Moto piano.

Ammettiamo che il moto della corda si svolga tutto in un piano fisso passante per la retta AB. Se si sceglie tale piano coincidente con quello  $xy$  si avrà:

$$z(x^*, t) = 0 \quad (1.6)$$

iii) Trasversalita' del moto

Con questa ipotesi si vuole intendere che ogni punto P della corda si muove su una retta  $r(P)$  perpendicolare all'asse  $x$  e passante per la posizione  $P_0$  occupata da P nella posizione di equilibrio. In conseguenza di cio', tenuto conto della ipotesi del moto piano, il moto restera' descritto dall'unica equazione  $y = y(x^*, t)$  le altre due coordinate restando costanti:  $x = x^*$ ,  $z = 0$ . In conclusione, scrivendo  $x$  in luogo di  $x^*$ , il moto potra' essere descritto da

$$y = y(x, t). \quad (1.7)$$

Usando l'ipotesi della trasversalita' del moto, le ipotesi di infinitesimalita' del moto si riducono a

$$\left| \frac{\partial y}{\partial t} \right| < \epsilon, \quad \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| < \epsilon. \quad (1.8)$$

A queste condizioni si devono aggiungere naturalmente le condizioni vincolari che traducono l'immobilita' degli estremi A e B della corda. Esse diventano:

$$y = y(0, t) = 0, \quad y = y(l, t) = 0. \quad (1.9)$$

Da esse si deduce ovviamente

$$\left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x=l} = 0 \quad (1.10)$$

relazioni che esprimono l'annullarsi identico delle velocita' in A ed in B.

Un commento sulle tre assunzioni fatte. La seconda equivale ad una scelta dei dati iniziali contenuti in un piano, mentre la prima e la terza sono

piu' profonde: vuol dire che non soltanto i dati iniziali sono piccoli, ma che anche nelle equazioni che descrivono l'evoluzione trascuriamo termini di ordine superiore. E' un problema analogo a quello che abbiamo gia' incontrato nelle "piccole oscillazioni". Come allora, alla fine per coerenza dobbiamo vedere che le equazioni ottenute evolvano buoni dati iniziali in buoni dati evoluti. Nelle piccole oscillazione questa proprieta' era assicurata se avevamo sviluppato i piccoli moti attorno ad un punto di equilibrio stabile. Qui nel seguito vedremo che le equazioni della "corda vibrante" rispetteranno questa proprieta'. Torneremo brevemente su questo punto.

## 2. Equazione differenziale del moto

All'istante generico  $t$  la configurazione della corda e' fornita dalla equazione  $y = y(x, t)$ . Trattandosi di una configurazione molto prossima a quella di equilibrio, la sua energia potenziale  $U$  ( o meglio la differenza fra la sua energia potenziale attuale e l'energia potenziale dello stato di equilibrio) si potra' approssimamente valutare mediante la (1.2) nella quale dobbiamo solo calcolare  $\delta l$ , cioe' la differenza fra la lunghezza attuale  $l'$  della corda e la sua lunghezza  $l_0$  nello stato di equilibrio. Consideriamo un tratto infinitesimo di filo la cui lunghezza attuale vale

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad (2.1)$$

cioe'

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}. \quad (2.2)$$

Tenuto conto della infinitesimalita' di  $\frac{\partial y}{\partial x}$ , assunta come ipotesi, sviluppando in serie la formula precedente e trascurando termini di ordine superiore, si ha

$$ds \approx dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx. \quad (2.3)$$

La lunghezza dello stesso trattino nello stato di equilibrio vale  $dx$ . Il suo allungamento vale pertanto  $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$  e l'allungamento totale del filo e' dato da

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \quad (2.4)$$

da cui, nella approssimazione scelta,

$$U[y] = \frac{1}{2} \int_0^l \tau \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.5)$$

Nello stesso istante  $t$  al filo compete l'energia cinetica

$$T[y] = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.6)$$

ove  $\mu$  e' la densita' lineare del filo. Supporremo che, nelle approssimazioni assunte, anche  $\mu$ , come gia'  $\tau$ , sia indipendente da  $x$ .

Siamo quindi in grado di scrivere la lagrangiana del nostro sistema (energia cinetica meno energia potenziale):

$$L[y] = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \tau \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2.7)$$

Come e' naturale trattandosi di un sistema continuo ( e quindi ad infiniti gradi di liberta' ) la Lagrangiana non e' piu' una funzione di un numero finito di coordinate lagrangiane e delle loro derivate temporali, ma e' un funzionale della funzione  $y(x, t)$ .

Per ricavare le leggi di moto della corda ci varremo del principio di Hamilton  $\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$ , la cui validita' si puo' ragionevolmente estendere anche a sistemi continui. Imporremo pertanto che sussista la condizione variazionale

$$\delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \tau \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt = 0 \quad (2.8)$$

in corrispondenza a variazioni arbitrarie della funzione  $y(x, t)$  soggetta ad annullarsi ad ogni  $x$  agli estremi temporali

$$\delta y(x, t_0) = 0 \quad , \quad \delta y(x, t_1) = 0 \quad (2.9)$$

e per ogni  $t$  agli estremi della corda

$$\delta y(0, t) = 0 \quad , \quad \delta y(l, t) = 0 \quad (2.10)$$

Il principio variazionale (2.8) si esplicita in stretta analogia a quello che abbiamo fatto nel Cap.6. Si scrive anzitutto, come e' ovvio,

$$\delta A = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \mu \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial(\delta y)}{\partial t} - \tau \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial(\delta y)}{\partial x} \right] dx dt = 0 \quad (2.11)$$

Mediante due integrazioni per parti, una sul primo termine ed una sul secondo, si ottiene

$$\delta A = \int_0^l \left[ \mu \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \right]_0^l dx - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \tau \frac{\partial y}{\partial x} \delta y \right]_0^l dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[ \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \delta y dx dt = 0 \quad (2.12)$$

I primi due termini sono nulli a causa delle condizioni (2.9) e (2.10). Tenuto conto dell'arbitrarietà di  $\delta y$  si ricava, come equazione di Eulero associata al principio variazionale,

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (2.13)$$

Posto

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad (2.14)$$

essa può' scriversi

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.15)$$

E' questa l'equazione differenziale della corda vibrante, chiamata anche equazione unidimensionale delle onde o equazione <sup>d'</sup> d'Alembert. Essa appartiene alla classe delle cosiddette equazioni differenziali di tipo iperbolico, classe specificamente connessa con i fenomeni di propagazione. Inoltre essa e' lineare.

Per lo studio dei piccoli moti di una corda elastica con estremi fissi l'equazione (2.15) va completata con le condizioni al contorno (1.9).

#### Osservazioni

1) La validità dell'equazione indefinita (2.15) non e' limitata al caso di una corda elastica con estremi fissi ma permane, purché lo stato di equilibrio attorno a cui si svolge il moto sia stabile, anche in altre condizioni come ad esempio nel caso di una corda omogenea rettilinea prolungantesi all'infinito da una od entrambe le parti.

2) Le considerazioni precedenti si possono estendere, con qualche adattamento, al caso in cui  $\mu$  e  $\tau$  anziché costanti siano funzioni di  $x$  (corda non omogenea e tensione non uniforme); l'equazione indefinita diviene allora

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial y}{\partial x} \right) - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.16)$$

Il caso di tensione non uniforme si verifica, per esempio, in un tratto di filo pesante fissato ad un estremo e liberamente pendolante.

3) I sistemi fisici modellizzati dalla equazione della corda vibrante si incontrano nella vita di tutti i giorni: pensate ad una chitarra, un violino o altri strumenti musicali come il pianoforte. E' utile e molto significativo applicare le considerazioni dei prossimi paragrafi al familiare esempio della chitarra.

### 3. Alcune proprietà dell'equazione della corda vibrante

#### i) Sovrapponibilità dei moti

Dal carattere lineare ed omogeneo della equazione (2.15) della corda vibrante e dalle condizioni al contorno scelte segue che la combinazione lineare di due soluzioni  $y_1(x, t)$ ,  $y_2(x, t)$ ,  $y(x, t) = ay_1 + by_2$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , e' ancora una soluzione. Questa proprietà viene chiamata *principio di sovrapposizione degli stati dinamici*: due diversi stati dinamici (cioe' due moti) separatamente possibili sono possibili anche simultaneamente senza influenzarsi l'un l'altro.

#### ii) Integrale generale

Con un cambiamento di variabili a determinante non nullo

$$\xi = x - vt, \quad \eta = x + vt \quad (3.1)$$

l'equazione (2.15) assume la forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} = 0. \quad (3.2)$$

Se ne trae che  $\frac{\partial y}{\partial \xi}$  e' una funzione arbitraria della sola  $\xi$  e che come conseguenza deve essere

$$y = \phi(\xi) + \psi(\eta) \quad (3.3)$$

con  $\phi$  e  $\psi$  funzioni arbitrarie dei rispettivi argomenti. Tornando alle primitive variabili si ha che ogni soluzione della corda vibrante (2.15) non puo' essere che del tipo

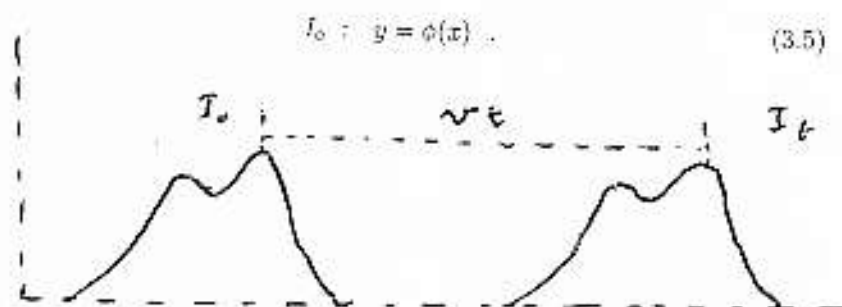
$$y(x, t) = \phi(x - vt) + \psi(x + vt) \quad (3.4)$$



e che pertanto l'integrale generale della (2.15), senza riguardo alle condizioni al contorno, è data dalla formula precedente con  $\phi$  e  $\psi$  funzioni arbitrarie. Naturalmente le condizioni al contorno impongono una relazione fra la  $\phi$  e la  $\psi$ , ma non ci soffermiamo su questo punto.

iii) Interpretazione di una soluzione del tipo  $y = \phi(x - vt)$

Nel piano  $xy$  nel quale si svolge il moto della corda si consideri il diagramma  $I_0$  della funzione  $y(x, t) = \phi(x - vt)$  all'istante  $t = 0$ :



Esso rappresenta la configurazione della corda all'istante iniziale. Il diagramma  $I_t$  della funzione  $y$  al generico istante  $t$ ,

$$I_t : y = \phi(x - vt) \quad (3.6)$$

che da' la configurazione della corda all'istante  $t$ , si ottiene immediatamente dal diagramma precedente con un semplice traslazione di entità  $vt$  nella direzione positiva dell'asse  $x$ . Si può concludere che le successive configurazioni della corda in una soluzione del tipo (3.6) si ottengono facendo *propagare rigidamente* la configurazione iniziale con velocità costante  $v$  nella direzione dell'asse  $x$ . Esprimeremo il risultato dicendo che una soluzione del tipo (3.6) rappresenta una *onda rigida progressiva* dotata di *velocità di propagazione*  $v$ .

In modo analogo si riconosce che una soluzione del tipo

$$y = \psi(x + vt) \quad (3.7)$$

con  $\psi$  qualunque, rappresenta una onda traslante con velocità  $v$  nella direzione negativa dell'asse  $x$  (*onda rigida retrograda*).

È chiaro che né una onda progressiva né una retrograda sono compatibili *isolatamente*, con le condizioni al contorno (1.9). Una onda progressiva

(o retrograda) e' invece possibile in una corda infinitamente estesa da entrambi i lati.

Comunque anche in una corda di lunghezza finita, soggetta a condizioni ai bordi, ogni moto risulta essere la *sovrapposizione* di due convenienti onde rigide, una progressiva ed una retrograda.

Le considerazioni qui fatte mettono in evidenza un carattere tipico del moto ondoso: il *carattere propagatorio*. La propagazione delle perturbazioni provocate in un punto o in una regione della corda ha luogo, nell'una e nell'altra direzione, con una velocita'  $v$  che dipende dalla natura fisica ( $\mu$ ) e dalle condizioni ( $\tau$ ) della corda in esame, ma non dalla forma e dalla entita' della perturbazione stessa. (Si noti che questa caratteristica dipende dalla linearita' dell'equazione e si perde quando i fenomeni nonlineari diventano rilevanti come, per esempio, nelle onde anomale dei maremoti).

Esiste anche un altro aspetto tipico del moto ondoso che fino ad ora non e' risultato in evidenza: l'*aspetto oscillatorio*, che sara' oggetto del nostro studio nel prossimo paragrafo.

## 4. Corda con estremi fissi

### Soluzioni semplici

Come gia' detto, anche nel caso di estremi fissi potremmo studiare il problema partendo dalla soluzione generale  $y(x, t) = \phi(x - vt) + \psi(x + vt)$ , imponendo i dati iniziali e le condizioni al contorno, ma questo metodo non mette bene in evidenza il carattere *oscillatorio* del moto. Seguiremo un altro metodo di frequente applicazione in molti campi della fisica teorica. Seguiremo una strada analoga a quella percorsa nelle piccole oscillazioni: prima cerchiamo soluzioni particolari, poi sfruttando la linearita' del problema costruiremo una soluzione generale come sovrapposizione di quelle particolari.

Riprendiamo l'equazione della corda vibrante, che qui riscriviamo per comodita' del lettore:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

$$y = y(0, t) = 0, \quad y = y(l, t) = 0. \quad (4.2)$$

e cerchiamo se esistono soluzioni del tipo

$$y(x, t) = G(x) F(t) \quad (4.3)$$

ove  $G, F$  sono due funzioni da determinare. Questo metodo si chiama della separazione delle variabili.

Sostituendo la (4.3) nell'equazione (4.1). Si ottiene

$$v^2 G''(x) F(t) = G(x) F''(t) \quad (4.4)$$

L'apice indicando la derivazione rispetto all'unico argomento da cui ogni funzione dipende. Di qui, separando le variabili (e cioè dividendo per  $G(x)F(t)$ ) si ha

$$v^2 \frac{G''(x)}{G(x)} = \frac{F''(t)}{F(t)} \quad (4.5)$$

Al primo membro compare una funzione della sola  $x$ , mentre al secondo una funzione della sola  $t$ : dovendo identificarsi, esse non possono che essere uguali ad una medesima costante  $C$ . Si ha pertanto

$$F''(t) - CF(t) = 0 \quad (4.6)$$

$$G''(x) - \frac{C}{v^2} G(x) = 0 \quad (4.7)$$

Le condizioni al contorno escludono che la costante  $C$  possa essere positiva o nulla. Infatti ove fosse  $C > 0$  la soluzione generale della (4.7) sarebbe

$$G(x) = ae^{\frac{\sqrt{C}}{v}x} + be^{-\frac{\sqrt{C}}{v}x} \quad (4.8)$$

e le condizioni al contorno darebbero

$$G(0) = a + b = 0, \quad G(l) = ae^{\frac{\sqrt{C}}{v}l} + be^{-\frac{\sqrt{C}}{v}l} = 0 \quad (4.9)$$

Esse non potrebbero essere soddisfatte che ponendo  $a = b = 0$  e cioè darebbe luogo ad una soluzione banale e non significativa. Altrettanto avverrebbe per  $C = 0$ .

Soltanto i valori negativi sono dunque possibili per  $C$ , che d'ora innanzi indicheremo con  $-\omega^2$ . Non sarà questa però, come vedremo, la sola limitazione che le condizioni al contorno impongono a questa costante.

Le equazioni (4.6) e (4.7) (scritto  $-\omega^2$  in luogo di  $C$ ) ammettono rispettivamente gli integrali generali

$$F(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (4.10)$$

$$G(x) = c \cos \frac{\omega}{v} x + d \sin \frac{\omega}{v} x \quad (4.11)$$

L'arbitrarietà delle costanti  $a, b, c, d$  subisce una forte restrizione se si impone che la funzione (4.3) rispetti le condizioni al contorno. A sostituzioni avvenute queste impongono

$$c = 0, \quad d \sin \frac{\omega}{v} l = 0 \quad (4.12)$$

Escludendo per  $d$  il valore nullo, per evitare di cadere nella soluzione banale  $y(x, t) = 0$ , la (4.12) impone che la quantità  $\frac{\omega}{v} l$  sia un multiplo intero di  $\pi$ ; quindi per la costante  $\omega$  sono dunque concessi soltanto i valori

$$\omega_n = \frac{\pi v}{l} n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.13)$$

Conglobando la costante  $d$  in  $a$  e  $b$ , ogni soluzione non banale delle (4.1), (4.2) a variabili separate e' del tipo

$$y_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \left[ a_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right] \quad (4.14)$$

con  $a_n$  e  $b_n$  costanti arbitrarie.

Dalla (4.14) appare che la  $n$ -esima soluzione a variabili separate e' una combinazione lineare delle due soluzioni particolari

$$\sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi v}{l} t, \quad \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi v}{l} t \quad (4.15)$$

che chiameremo *soluzioni semplici* di indice  $n$ . Al variare di  $n$  nell'insieme dei numeri positivi si ottiene una duplice infinita' numerabile di tali soluzioni, tutte fra loro linearmente indipendenti.

#### Esame di una generica soluzioni semplice

Consideriamo il moto di una corda elastica corrispondente ad una soluzione semplice, per esempio

$$\sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi v}{l} t, \quad (4.16)$$

Un tale moto si suol chiamare anche *onda stazionaria*, il perche' si vedra' da quanto segue.

In esso tutti i punti della corda si muovono di moto armonico con comune frequenza

$$\nu_n = \frac{n v}{2l} \quad (4.17)$$

(*frequenza dell'onda*), tutti in fase, ma con ampiezza diversa per i vari punti. Per qualcuno di essi e precisamente per gli  $n + 1$  punti di ascissa

$$0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}, \dots, \frac{(n-1)l}{n}, l \quad (4.18)$$

questa ampiezza risulta nulla ed i punti rimangono fissi (*nodi dell'onda*). I punti che dimezzano gli intervalli suddetti hanno invece ampiezza massima (*ventri dell'onda*).



Tre momenti diversi di una onda stazionaria.

La corda in ogni istante ha una configurazione sinusoidale il cui periodo spaziale

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (4.19)$$

si chiamera' *lunghezza dell'onda stazionaria*. Tale lunghezza d'onda e' legata alla frequenza (4.17) dalla semplice relazione

$$\lambda_n \nu_n = v \quad (4.20)$$

La frequenza piu' bassa, quella dell'onda stazionaria di indice 1, e'

$$\nu_1 = \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad (4.21)$$

si chiama *frequenza o armonica fondamentale* della corda. Le altre frequenze, multiple della fondamentale, costituiscono le *armoniche superiori*.

Quando il moto si riduce ad una semplice onda stazionaria la corda emette un suono puro della frequenza corrispondente. Come vedremo fra poco, un moto generico e' invece la sovrapposizione di un numero, finito ad infinito, di onde stazionarie con emissione simultanea di varie armoniche. (Abbiamo parlato di suono anche se abbiamo solo studiato i moti della corda. In realta' il suono non e' altro che un rapido moto oscillatorio di compressione del mezzo, per esempio l'aria; la corda vibrando altera l'aria che la circonda e genera queste perturbazioni che noi percepiamo come suoni).

In una soluzione semplice risulta evidente un aspetto che non appariva nella soluzione esatta (3.4) e cioe' il carattere *oscillatorio e periodico* del moto. E' questo uno degli aspetti tipici che siamo soliti associare al concetto di onda e che pertanto giustifica il nome di onda stazionaria data al moto stesso.

Viceversa una soluzione semplice sembra mancare, come l'epiteto "stazionaria" sottolinea, quell'altro aspetto tipico di un movimento ondoso che e' l'aspetto *propagatorio*. Ma in realta' questa assenza puo' essere solo apparente dato che, come abbiamo visto, ogni soluzione dell'equazione delle onde e' sempre data dalla sovrapposizione di due onde rigide propagantisi in senso opposto. Del resto che cio' sia vero anche per una onda stazionaria si puo' riconoscere nel modo seguente.

Si consideri la sovrapposizione dell'onda rigida progressiva sinusoidale

$$y_1 = \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{l} (x - vt) \quad (4.22)$$

e dell'onda retrograda

$$y_2 = \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{l} (x + vt) \quad (4.23)$$

Basta sviluppare il seno della differenza nella prima espressione e della somma nella seconda per riconoscere che la sovrapposizione delle due onde da' luogo proprio ad una soluzione semplice:

$$y = y_1 + y_2 = \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi}{l} vt \quad (4.24)$$

**Determinazione del moto corrispondente a determinati dati iniziali con il metodo dello sviluppo in serie di soluzioni semplici**

Il principio di sovrapposizione ci assicura che la somma di un numero finito od infinito (purché convergente) di onde stazionarie di frequenza diversa è ancora un moto possibile per la corda. Vogliamo mostrare che per questa via si ottengono tutte le soluzioni. Faremo uso di un importante strumento matematico, lo sviluppo in serie di Fourier, di cui daremo un breve cenno nel paragrafo successivo, e che verrà svolto più in dettaglio nel corso di metodi.

Consideriamo la corda vibrante fissa agli estremi e supponiamo di conoscere la configurazione e l'atto di moto iniziali

$$y(x, 0) = h(x) \quad , \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = k(x) \quad . \quad (4.25)$$

Supporremo esplicitamente che  $h(x)$  e  $k(x)$  siano funzioni  $C^1$  compatibili, naturalmente, con le condizioni al contorno

$$h(0) = h(l) = 0 \quad , \quad k(0) = k(l) = 0 \quad . \quad (4.26)$$

Posto formalmente

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (4.27)$$

(serie di onde stazionarie) vediamo come determinare le costanti  $a_n$ ,  $b_n$  in modo tale che la serie, oltre a possedere i necessari requisiti di convergenza e quindi soddisfare all'equazione della corda vibrante con le condizioni al contorno fissate agli estremi, verifichi anche le condizioni iniziali (4.25). Dalle (4.27) e (4.25) si ha

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x = h(x) \quad (4.28)$$

nonché

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{l} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = k(x) \quad (4.29)$$

D'altra parte tanto  $h(x)$  quanto  $k(x)$ , funzione  $C^1$  nell'intervallo  $(0, l)$  e nulle ai suoi estremi, possono essere sviluppate in serie di Fourier

di soli seni (vedi prossimo paragrafo) :

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (4.30)$$

$$k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (4.31)$$

con

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l dx h(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (4.32)$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l dx k(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (4.33)$$

Segue allora che affinché le (4.28), (4.29) siano soddisfatte occorre e basta (per l'unicità dello sviluppo in serie di Fourier) scegliere le  $a_n$  e le  $b_n$  al modo seguente

$$a_n = A_n, \quad b_n = \frac{l}{n\pi v} B_n \quad (4.34)$$

Sostituiti questi valori nella (4.27) si conclude che la soluzione corrispondente ai dati iniziali (4.25) è data dalla serie

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + \frac{l}{n\pi v} B_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (4.35)$$

con i coefficienti  $A_n$  e  $B_n$  forniti dalle (4.32) e (4.33).

La deduzione per ora è formale, finché non si dimostra che la serie della (4.35) converge e quindi definisce effettivamente una funzione. Ciò è vero e lascio ai trattati più approfonditi sull'argomento la dimostrazione che tale serie converge assieme alla serie delle derivate prime e seconde in  $x$  e  $t$ , proprietà che assicurano trattarsi della soluzione cercata.

#### Conservazione della Energia e mantenimento della piccolezza del moto

Ci possiamo domandare se l'equazione della corda vibrante mantiene durante l'evoluzione la piccolezza dei dati iniziali, come assunto all'inizio



dell'argomento. La risposta è affermativa. Ne discutiamo brevemente senza entrare nei dettagli. Vediamo prima l'esistenza di un integrale primo del moto, di grande interesse per se stesso.

Poiché la Lagrangiana della corda vibrante non dipende esplicitamente dal tempo, l'energia totale si conserva, cioè

$$T[y] + U[y] = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \tau \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] dx = E = \text{costante} \quad (4.36)$$

Naturalmente questa costanza nel tempo si può anche verificare direttamente, usando esplicitamente le equazioni della corda vibrante.

Vediamo ora la dimostrazione che la piccolezza dei dati si mantiene nel tempo. (Non necessario per l'esame). Poiché l'energia è la somma di due quadrati, la piccolezza di  $E$  implica la piccolezza di  $U$ , quindi la piccolezza della media in  $x$  di  $\frac{\partial y}{\partial x}$ , che a sua volta implica la piccolezza di  $y$  poiché la corda ha lunghezza finita e è fissa ad una estremità. Un ragionamento analogo si può svolgere per mostrare la piccolezza in ogni punto di  $\frac{\partial y}{\partial x}$ , usando il fatto che l'equazione della corda vibrante è lineare e quindi la derivata  $\frac{\partial y}{\partial x}$  soddisfa alla stessa equazione. Si può arrivare a stime sulla piccolezza in media della derivata seconda. D'altra parte un punto della corda in cui la derivata prima sia piccola deve esistere, perché in media è piccola. Si conclude che in ogni punto essa è piccola. (Fine non necessario per l'esame).

#### Catene di oscillatori armonici ed altri modelli

(Non necessario per l'esame). Nella storia della fisica abbiamo visto che ogni modello, anche quelli di maggior successo, ha dei limiti di applicazione. (Naturalmente così è avvenuto nel passato, niente sappiamo sul futuro, anche se appare logico supporre che tale limitazione verrebbe anche in futuro). Diventa spontaneo cercare le relazioni tra diversi modelli deputati a descrivere un fenomeno fisico. Accenniamo brevissimamente a un esempio di questi interessanti problemi. Immaginiamo di dividere l'intervallo della retta dal punto di ascissa 0 a quello di ascissa  $l$  in  $N$  intervalli uguali ed ad ogni estremità di questi intervallini porre un punto materiale di massa  $m$  che si muova lungo un asse parallelo a quello delle  $y$  e che interagisca con i primi vicini tramite una forza elastica proporzionale a  $(y_i - y_{i-1})$ . L'Hamiltoniana di questo sistema si scrive

$$H = \frac{m}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \dot{y}_j^2 + \frac{k}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (y_j - y_{j+1})^2 \quad (4.37)$$

$$y_0 = y_N = 0$$

Si può mostrare che, mandando  $m \rightarrow 0$  e  $k \rightarrow \infty$  quando  $N \rightarrow \infty$  in modo opportuno, tale modello "tende" alla corda vibrante. Maggiori precisazioni e dettagli possono essere visti sul libro di Gallavotti, citato in Bibliografia.

Possiamo pensare di costruire modelli ragionevoli che valgano senza le limitazioni di moti piccoli e/o trasversi, ma si incontrano subito grandi difficoltà. Rinunciando alla trasversalità del moto si possono creare riccioli che distruggono l'esistenza ed unicità del moto in tempi finiti. Anche tenendo la trasversalità del moto, le perturbazioni finite impongono una più generale definizione di energia potenziale, che deve essere suggerita dalla teoria fisica della elasticità. Assumiamo infine che essa cresca linearmente con la lunghezza della corda come supposto finora in questo capitolo, allora il principio variazionale di Hamilton permette semplicemente ad una equazione non lineare della corda vibrante, di studio complesso. In generale voglio dire che superate le approssimazioni fatte all'inizio del capitolo si arriva alle equazioni delle onde non lineari (equazioni iperboliche non lineari) interessanti ma complicate. (Fine non necessario per l'esame).

## 5. Cenni sulla serie di Fourier

Consideriamo le due seguenti successioni di funzioni trigonometriche

$$\sin \frac{k\pi}{l} x, \quad \cos \frac{k\pi}{l} x \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.1)$$

Esse hanno in comune la proprietà di essere funzioni  $C^\infty$  in  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$  ed ivi periodiche di periodo  $2l$ , ( $f(x+2l) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ ).

Esse godono anche della importantissima proprietà che il prodotto di due qualunque distinte di esse integrato su un intervallo pari ad un periodo  $2l$ , per esempio l'intervallo  $(-l, l)$ , dà come risultato zero:

$$\int_{-l}^l dx \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{k'\pi}{l} x = 0 \quad (k \neq k'), \quad (5.2)$$

$$\int_{-l}^l dx \cos \frac{k\pi}{l}x \cos \frac{k'\pi}{l}x = 0 \quad (k \neq k'), \quad (5.3)$$

$$\int_{-l}^l dx \sin \frac{k\pi}{l}x \cos \frac{k'\pi}{l}x = 0, \quad (5.4)$$

l'ultima relazione valendo anche per  $k = k'$ .

Ciascuna delle precedenti equazioni si prova facilmente mediante due integrazioni per parti successive, tenendo conto della periodicità delle funzioni. Si vuol dire che le proprietà (5.2)-(5.4) esprimono il fatto che le funzioni (5.1) formano un sistema di funzioni *ortogonali* in  $(-l, l)$ . (Ricordo che date due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  definite in un intervallo  $(a, b)$  si suole chiamare, con linguaggio vettoriale, *prodotto scalare* delle due funzioni nell'intervallo  $(a, b)$  l'integrale  $\int_a^b f(x) g(x) dx$ . Se questo integrale risulta nullo le due funzioni si dicono essere fra loro *ortogonali*. Come è chiaro l'ortogonalità di due funzioni non è un fatto locale, ma dipende da tutti i valori che esse assumono nell'intervallo.)

Se invece si considera il quadrato di una qualunque delle funzioni (5.1) e se ne fa l'integrale sull'intervallo  $(-l, l)$  esso riesce sempre positivo e precisamente

$$\int_{-l}^l dx \sin^2 \frac{k\pi}{l}x = l, \quad (5.5)$$

$$\int_{-l}^l dx \cos^2 \frac{k\pi}{l}x = l \quad \text{se } k \neq 0, \quad (5.6)$$

$$\int_{-l}^l dx \cos^2 \frac{k\pi}{l}x = 2l \quad \text{se } k = 0. \quad (5.7)$$

È evidente che ogni combinazione lineare, a coefficienti costanti, di un numero finito di funzioni (5.1) è ancora una funzione regolare in  $\mathbb{R}$  ed ivi periodica di periodo  $2l$ . Si può anche prevedere che lo sia una combinazione lineare a coefficienti costanti di un numero infinito di funzioni (5.1) (eventualmente di tutte)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right] \quad (5.8)$$

purche' la serie di funzioni cui questa combinazione da' luogo abbia le necessarie proprieta' di convergenza.

Cio' che a priori non e' invece facilmente prevedibile e che costituisce un risultato molto importante della matematica e' il fatto che ogni funzione  $f(x)$  sufficientemente regolare in  $\mathbb{R}$  (discuteremo tra un attimo quanto regolare) ed ivi periodica di periodo  $2l$  si puo' esprimere mediante una serie trigonometrica

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right] \quad (5.9)$$

con coefficienti costanti  $a_n, b_n$  univocamente determinati.

Il secondo membro della (5.9) si suole chiamare *sviluppo della funzione  $f(x)$  in serie di funzioni trigonometriche* o anche, dal nome del suo scopritore, *in serie di Fourier*.

Discutiamo ora brevemente di quanto debba essere regolare la funzione  $f(x)$ . L'ipotesi che sia di classe  $C^1$  basta e quindi l'applicazione fatta alla corda vibrante e' coerente. In realta' si puo' indebolire questa assunzione, ma non troppo. Infatti se ipotizzassimo la sola continuita' (cioe'  $f(x)$  appartenente alla classe  $C$ ) lo sviluppo in serie di Fourier potrebbe non esistere in alcun punto! L'assunzione minima viene detta condizione del Dini, che non scriviamo, rinviando per questa ai testi specializzati (per esempio il A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, *Elementi di Teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale*, MIR Edizioni, Mosca 1980). Una ipotesi un po' piu' forte ma sostanzialmente simile e' che la funzione sia continua e che esistano in ogni punto le derivate sinistre e destre finite (eventualmente non coincidenti).

D'ora innanzi assumeremo che la funzione da sviluppare sia di classe  $C^1$  e daremo le modalita' operative di tale sviluppo, tralasciando le dimostrazioni complete.

#### Sviluppo di una funzione periodica in serie di Fourier

Sia  $f(x)$  una funzione  $C^1$  in  $\mathbb{R}$  ed ivi periodica di periodo  $2l$ . Supponiamo che per la  $f(x)$  esista uno sviluppo in serie della forma (5.9) e che la serie medesima sia uniformemente convergente in  $(-l, l)$ . Ci proponiamo di determinare i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$ . A tale scopo moltiplichiamo i due membri della (5.9) per  $\cos \frac{m\pi}{l} x$  con  $m$  intero arbitrario, e poi integriamo tra

$-l \neq l$ . Poiché al secondo membro la serie può essere integrata termine a termine dato che la moltiplicazione per  $\cos \frac{m\pi}{l}x$  non altera la sua uniforme convergenza, risulta

$$\int_{-l}^l dx f(x) \cos \frac{m\pi}{l}x = \int_{-l}^l dx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l}x \cos \frac{m\pi}{l}x + \int_{-l}^l dx \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \cos \frac{m\pi}{l}x. \quad (5.10)$$

Tenendo conto delle relazioni di ortogonalità si riconosce che tutti gli integrali al secondo membro sono nulli salvo uno, quello corrispondente all' $m$ -esimo coefficiente della sommatoria.

Tenendo conto delle (5.6), (5.7) si ricava per  $m \neq 0$

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l dx f(x) \cos \frac{m\pi}{l}x \quad (5.11)$$

e per  $m = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dx f(x). \quad (5.12)$$

Procedendo in modo perfettamente analogo, dopo aver moltiplicato i due membri della (5.9) per  $\sin \frac{m\pi}{l}x$ , si ricava il valore di  $b_m$ .

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l dx f(x) \sin \frac{m\pi}{l}x \quad (5.13)$$

Si potrebbe dimostrare che la serie (5.9), scritta con questi coefficienti converge assolutamente ed uniformemente. Riassumendo vale il seguente

#### Teorema di Fourier

Sia  $f(x)$  una funzione  $C^1$  in  $\mathbb{R}$  ed ivi periodica di periodo  $2l$ . Vale per essa lo sviluppo in serie di funzioni trigonometriche (serie di Fourier)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right] \quad (5.14)$$

con i coefficienti  $a_n, b_n$  così determinati

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dx f(x), \quad (5.15)$$

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l dx f(x) \cos \frac{m\pi}{l} x, \quad b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l dx f(x) \sin \frac{m\pi}{l} x \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (5.16)$$

La serie è assolutamente ed uniformemente convergente in ogni intervallo finito.

Come già detto la condizione che la funzione sia di classe  $C^1$  può essere indebolita.

#### Caso di una funzione dispari: sviluppo in serie di soli seni

Fermo restando per  $f(x)$  le ipotesi precedentemente assunte, supponiamo che essa sia una funzione dispari ( $f(-x) = -f(x)$ ). Si riconosce allora che tutti i coefficienti  $a_n$  sono nulli. Sussiste pertanto uno sviluppo in serie di soli seni:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (5.17)$$

con coefficienti dati dalle (5.13) o in modo equivalente da

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l dx f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (5.18)$$

#### Caso di una funzione pari: sviluppo in serie di soli coseni

In modo analogo si riconosce che se  $f(x)$  è una funzione pari ( $f(-x) = f(x)$ ) risulta che tutti i  $b_n$  sono nulli e sussiste lo sviluppo in termini di soli coseni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (5.19)$$

con coefficienti dati dalle (5.11) e (5.12) oppure da

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l dx f(x), \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l dx f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.20)$$

**Prolungamento periodico dispari di una funzione qualunque definita in un intervallo  $(0, l)$  e nulla agli estremi**

Consideriamo una funzione  $f(x)$  definita in un intervallo  $(0, l)$ , ivi di classe  $C^1$  e nulla agli estremi. Benché non si tratti di una funzione periodica noi possiamo costruire per essa uno sviluppo in serie di soli seni, di *validità limitata* a  $(0, l)$  procedendo nel modo seguente:

i) Prolunghiamo la funzione all'intervallo  $(-l, 0)$  con legge dispari, cioè ponendo per costruzione

$$f(x) = -f(-x)$$

Otteniamo in tal modo una funzione (dispari), definita nell'intervallo  $(-l, l)$ , ivi di classe  $C^1$  e nulla agli estremi.

ii) Prolunghiamo ulteriormente la funzione a tutto l'asse reale  $\mathbb{R}$  riproducendo periodicamente, con periodo  $2l$ , la funzione ora definita.

Si è costruita in tal modo una funzione  $C^1$  in  $\mathbb{R}$ , dispari e periodica di periodo  $2l$ . Vale pertanto per essa uno sviluppo di soli seni. Esso sarà valido in particolare in  $(0, l)$  dove rappresenterà l'originaria funzione  $f(x)$ . È questa ultima proprietà che abbiamo applicato nella discussione della corda vibrante.

#### Generalizzazioni

Queste ultime considerazioni vogliono inserire il metodo usato della serie di Fourier in un contesto più ampio, che vedrete in dettaglio in seguito. Ovviamente sono interessanti, vanno lette, ma rimangono vage anticipazioni. Discutendo la corda vibrante abbiamo fatto una applicazione circoscritta della serie di Fourier. L'uso è molto più generale e denso di significato fisici, come vedrete in corsi successivi. È profondo il fatto che il suono emesso da uno strumento tipo chitarra possa essere scomposto in armoniche fondamentali. Tali armoniche possono essere cambiate cambiando la lunghezza della corda (cioè comprimendo con le dita della mano sinistra diversi punti della corda lungo la tastiera), aggiustando la tensione della corda al momento di accordare la chitarra o usando corde di diverse densità. Una volta stabilita questa, la corda eccitata emette un suono costituito da una sovrapposizione della armonica fondamentale e dai multipli di questa. Come sia fatta questa sovrapposizione dipende dallo strumento e ~~risulta~~ dalla maniera di suonarlo.

Osserviamo che l'uso che abbiamo fatto della serie di Fourier è dipeso in modo essenziale dalla linearità dell'equazione della corda vibrante e dalle

sue condizioni al contorno. (Non necessario per l'esame). Si può andare a più dimensioni nell'equazione delle onde e/o studiare altre equazioni (per esempio l'equazione del calore che vedrete più in là).

Una altra importante generalizzazione, che vedrete diffusamente in corsi successivi, consiste nel rinunciare ad approssimare una funzione data puntualmente, limitandoci ad approssimarla in media. I risultati ottenuti si applicano ad una classe molto vasta di funzioni.

Si può anche rinunciare alla assunzione della periodicità sostituendo la serie con un integrale ed ottenendo la cosiddetta *trasformata di Fourier* (vedrete anche questo in seguito).

Finiamo con due osservazioni: la prima è che anche per i fenomeni elettromagnetici si può usare il metodo di Fourier e lì le armoniche fondamentali diventano i colori. La seconda osservazione che in alcuni campi della fisica i coefficienti di Fourier (e/o le loro generalizzazioni continue) acquistano un profondo significato fisico, che supera il mero strumento matematico. (Fine non necessario per l'esame).