

MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 11 febbraio 2019 - Canale N-Z

1. Per quali valori di α la funzione

$$v(x, y) = x^2 + \alpha y^2$$

è la parte immaginaria di una funzione analitica $f(z)$? Per questi valori calcolare $f(z)$ tale che

$$f(1 + i) = 0.$$

2. Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x+1)}{x^2+1} dx$$

3. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

usando la decomposizione spettrale calcolare $\ln A$ prendendo la determinazione del logaritmo tale che $\ln z$ è reale sull'asse reale positivo e il taglio è lungo l'asse immaginario positivo.

4. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}$$

dove

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

5. Si consideri l'operatore

$$T = i \frac{d}{dx} + x^2$$

il cui dominio è

$$\mathcal{D}(T) = \{f, f' \in L_2[0, 1], f(0) = f(1)\}.$$

Determinare lo spettro puntuale di T .