

## MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 26 giugno 2018

1. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2 \theta}{2 + \cos \theta}$$

2. La matrice  $A$  agisce sui vettori della base canonica  $\mathbf{e}_i$  di  $\mathbb{C}^3$  secondo la legge

$$\begin{cases} A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \\ A\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \\ A\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

- Trovare autovalori e corrispondenti autovettori di  $A$ .
- Scrivere la decomposizione spettrale di  $A$ .
- Calcolare  $\ln(-A)$  avendo scelto per la funzione  $f(z) = \ln(-z)$  la determinazione in cui  $f(z)$  è reale per  $z$  reali negativi e il taglio sul piano complesso è lungo l'asse immaginario positivo.

3. Si consideri l'operatore

$$T = i \frac{d}{dx} + x$$

il cui dominio è

$$\mathcal{D}(T) = \{f, f' \in L^2[-1, 1], f(-1) = f(1)\}$$

- Determinare autovalori e autofunzioni di  $T$ .
- Determinare se l'operatore è o non è autoaggiunto.