Modelli e metodi matematici della fisica
Esame scritto del 04/07/2023 – Canale Pf - Z

Angelo Esposito e Fabio Riccioni

1. **[8 pt.]** La funzione polidroma

$$f(z) = \frac{z+2}{(z-2)(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ha punti di diramazione in $z = \pm 1$. Considerando il taglio che congiunge sull'asse reale i punti di diramazione, e la determinazione tale che $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ è reale positiva per $z = x$ con $-1 < x < 1$ sopra al taglio, determinare il residuo in $z = 2$ e il residuo all'infinito. Usare questi risultati per calcolare l'integrale

$$I = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \frac{x+2}{(x-2)\sqrt{1-x^2}} \, .$$

2. **[7 pt.]** Si calcoli l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\left(e^{2i\theta} - \frac{1}{4}\right)} \, .$$

3. **[8 pt.]** Si calcoli la trasformata di Fourier della seguente funzione, per ogni $k \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x-2i)} \, .$$

Si immagini poi di avere un'altra funzione, $g(x)$, della quale si sa solamente che ha due poli (e solo due) nel piano complesso, uno in $z = 1 - 2i$ e uno in $z = -3 + i/2$. Si discuta quale trasformata di Fourier tra $\hat{f}(k)$ e $\hat{g}(k)$ si annulla più rapidamente sia per $k \to \infty$ che per $k \to -\infty$.

4. **[7 pt.]** Si usi il metodo della funzione di Green per risolvere la seguente ODE non-omogenea,

$$x^2 f''(x) = \delta'(x-1) \, ,$$

per funzioni definite sull'intervallo $x \in [0, 2]$, con condizioni al bordo $f(0) = f(2) = 0$.

SOLUZIONI

1. Scriviamo

$$(1-z^2)^{\frac{1}{2}} = -i(z^2-1)^{\frac{1}{2}} = -i(z-1)^{\frac{1}{2}}(z+1)^{\frac{1}{2}} = -i\sqrt{r_1 r_2}\, e^{\frac{i}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)} \, ,$$

dove

$$z-1 = r_1 e^{i\theta_1} \, , \qquad z+1 = r_2 e^{i\theta_2} \, .$$

Per avere $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ reale positiva sopra il taglio prendiamo $\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0$. Quindi per andare a $z = x > 1$ dobbiamo ruotare θ_1 di π in senso orario, e quindi $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ diventa immaginaria negativa. In particolare per $z = 2$ abbiamo

$$(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\big|_{z=2} = -i\sqrt{3} \, ,$$

e quindi il residuo in $z = 2$ di $f(z)$ è

$$\mathrm{Res}_{z=2} f(z) = \frac{4i}{\sqrt{3}} \, .$$

Per calcolare il residuo all'infinito scriviamo $z = \frac{1}{w}$, e quindi

$$(1-z^2)^{\frac{1}{2}} = -i(z^2-1)^{\frac{1}{2}} = -i\frac{1}{w}(1-w^2)^{\frac{1}{2}}$$

è immaginaria negativa per $w \to 0^+$. Questo implica che dobbiamo prendere $(1-w^2)^{\frac{1}{2}}$ positiva per w intorno a zero. Il residuo all'infinito è

$$\mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = -\mathrm{Res}_{w=0} \frac{1}{w^2} f\left(\tfrac{1}{w}\right) = -i\mathrm{Res}_{w=0} \frac{1+2w}{w(1-2w)(1-w^2)^{\frac{1}{2}}} = -i \, .$$

Per calcolare l'integrale, prendiamo una curva Γ che circonda il taglio in senso orario. L'integrale lungo questa curva è due volte l'integrale che dobbiamo calcolare, ed è uguale a $2\pi i$ per la somma dei residui esterni alla curva. Quindi

$$I = \pi i \left(\mathrm{Res}_{z=2} f(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) \right) \, ,$$

ovvero

$$I = \pi \left(1 - \tfrac{4}{\sqrt{3}} \right) \, .$$

2. Scriviamo $z = e^{i\theta}$. L'integrale diventa

$$I = -i \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z \sin\left(z^2 - \frac{1}{4}\right)} \, ,$$

dove Γ è la circonferenza unitaria centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario. Calcoliamo l'integrale usando il teorema dei residui. Dobbiamo trovare tutti i poli dentro la circonferenza. $z = 0$ è ovviamente un polo semplice. Gli altri poli sono gli zeri di $\sin\left(z^2 - \frac{1}{4}\right)$, ovvero

$$z^2 = \tfrac{1}{4} + k\pi \, ,$$

con k intero. Per $k \geq 0$, i poli sono reali,

$$z_k^\pm = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4} + k\pi} \, , \quad k \geq 0 \, ,$$

mentre per $k < 0$ sono immaginari,

$$z_k^{\pm} = \pm i\sqrt{|k|\pi - \tfrac{1}{4}}\,, \quad k < 0\,.$$

Tutti i poli sono poli semplici, e solamente quelli con $k = 0$, ovvero $z_0^{\pm} = \pm\frac{1}{2}$, sono dentro la circonferenza. Il residuo in $z = 0$ è

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(-\frac{i}{z\sin\left(z^2 - \frac{1}{4}\right)}\right) = \frac{i}{\sin\frac{1}{4}}\,.$$

Il residuo in $\pm\frac{1}{2}$ è

$$\mathrm{Res}_{z=\pm\frac{1}{2}}\left(-\frac{i}{z\sin\left(z^2 - \frac{1}{4}\right)}\right) = -\frac{i}{2z^2\cos(z^2 - \frac{1}{4})}\Bigg|_{z=\pm\frac{1}{2}} = -2i\,.$$

Quindi

$$I = 2\pi i\left(\frac{i}{\sin\frac{1}{4}} - 2i - 2i\right) = 2\pi\left(4 - \frac{1}{\sin\frac{1}{4}}\right)\,.$$

3. La transformata di Fourier di $f(x)$ è data da,

$$\hat{f}(k) = \int dx \frac{e^{-ikx}}{(x^2+1)(x-2i)}\,.$$

Questo integrale può essere calcolato chiudendo il contorno di integrazione e usando il teorema dei residui. I poli sono in $z = \pm i$ e $z = 2i$. Bisogna distinguere tra due regimi. Per $k > 0$, affinché l'integrale nel piano complesso sia convergente, bisogna chiudere il percorso all'infinito nel semipiano inferiore. In questo caso, il percorso all'infinito non contribuisce in quanto soppresso dall'esponenziale, $e^{-i\,\mathrm{Re}k\,x + \mathrm{Im}k\,x} \xrightarrow{\mathrm{Im}k\to-\infty} 0$. In questo caso, l'integrale riceve contributo solo dal polo in $z = -i$. Nel qual caso,

$$\hat{f}(k>0) = -2\pi i \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^{-ikz}}{(z^2+1)(z-2i)} = \frac{i\pi}{3}e^{-k}\,.$$

Per $k < 0$, invece, bisogna chiudere il percorso nel piano superiore, nel qual caso si prende contributo dai due poli, in $z = i$ e $z = 2i$. La trasformata di Fourier è, quindi,

$$\hat{f}(k<0) = 2\pi i \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{-ikz}}{(z^2+1)(z-2i)} + 2\pi i \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{e^{-ikz}}{(z^2+1)(z-2i)} = i\pi\left(e^k - \frac{2}{3}e^{2k}\right)\,.$$

La trasformata di Fourier può quindi essere scritta in modo compatto come,

$$\hat{f}(k) = \frac{i\pi}{3}e^{-k}\theta(k) + i\pi\left(e^k - \frac{2}{3}e^{2k}\right)\theta(-k)\,.$$

Infine, per quanto riguarda la funzione $g(x)$, quando $k \to \infty$, il comportamento della trasformata di Fourier sarà dettato dalla posizione della parte immaginaria dei poli sul piano inferiore, in questo cas $\hat{g}(k) \sim e^{-2k}$, che decade più rapidamente di $\hat{f}(k)$. Per $k \to -\infty$, invece, il comportamento è dattato dalla parte immaginaria del polo sul piano superiore, ossia $\hat{g}(k) \sim e^{k/2}$, che invece decade più lentamente di $\hat{f}(k)$.

4. Partiamo dall'equazione omogenea, che è un'equazione di Eulero. Cercando soluzioni del tipo x^α, troviamo 1 e x. Le due soluzioni indipendenti che soddisfano $f_1(0) = 0$ e $f_2(2) = 0$ sono

$$f_1(x) = x\,, \qquad f_2(x) = 1 - \frac{x}{2}\,.$$

Il loro Wronskiano è $W(x) = f_1(x)f_2'(x) - f_1'(x)f_2(x) = -1$. Segue che la funzione di Green è,

$$
\begin{aligned}
G(x,y) &= \frac{1}{a_2(y)W(y)} \left[f_1(x)f_2(y)\theta(y-x) + f_1(y)f_2(x)\theta(x-y)\right] \\
&= -\frac{1}{y^2}\left[x\left(1-\frac{y}{2}\right)\theta(y-x) + y\left(1-\frac{x}{2}\right)\theta(x-y)\right] .
\end{aligned}
$$

Poiché la nostra sorgente è $j(x) = \delta'(x-1)$, abbiamo che la soluzione all'equazione è,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\int_x^2 dy\,\left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{y^2}\right)\delta'(y-1) + \left(\frac{x}{2}-1\right)\int_0^x dy\,\frac{1}{y}\,\delta'(y-1) \\
&= x\left[\left(\frac{1}{2y}-\frac{1}{y^2}\right)\delta(y-1)\right]_x^2 - x\int_x^2 dy\,\left(-\frac{1}{2y^2}+\frac{2}{y^3}\right)\delta(y-1) \\
&\quad + \left(\frac{x}{2}-1\right)\left[\frac{1}{y}\delta(y-1)\right]_0^x - \left(\frac{x}{2}-1\right)\int_0^x \left(-\frac{1}{y^2}\right)\delta(y-1) \\
&= -x\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{x^2}\right)\delta(x-1) - x\left(-\frac{1}{2}+2\right)\theta(1-x) + \left(\frac{x}{2}-1\right)\frac{1}{x}\delta(x-1) + \left(\frac{x}{2}-1\right)\theta(x-1) \\
&= -\frac{3x}{2}\theta(1-x) + \left(\frac{x}{2}-1\right)\theta(x-1) .
\end{aligned}
$$

In particolare, le funzioni θ compaiono come conseguenza del fatto che $\int_a^b dx\,\delta(x-c) = 1$ solo se $c \in [a,b]$, altrimenti fa zero.

Un altro possibile metodo è il seguente. In modo analogo a quanto sopra, sappiamo che la soluzione alla nostra equazione deve essere della forma,

$$
f(x) = \begin{cases} a\,x & 0 < x < 1 \\ b\left(1-\frac{x}{2}\right) & 1 < x < 2 \end{cases} .
$$

Dobbiamo determinare le due costanti a e b. Poiché il membro di destra dell'equazione è proporzionale a una δ', questo ci dice che $f(x)$ avrà una discontinuità, in modo che $f'(x)$ conterrà una δ, e $f''(x)$ una δ'. Per trovare le due condizioni, prima integriamo l'equazione su $x \in [1-\epsilon, 1+\epsilon]$, per $\epsilon \to 0$, ottenendo,

$$
\begin{aligned}
\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} dx\,x^2 f''(x) = \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} dx\,\delta'(x-1) \qquad &\Rightarrow \qquad x^2 f'(x)\Big|_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} - 2\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} dx\,x f'(x) = 0 \\
&\Rightarrow \qquad f'(1^+) - f'(1^-) - 2x f(x)\Big|_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} + 2\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} dx\,f(x) = 0 \\
&\Rightarrow \qquad f'(1^+) - f'(1^-) - 2f(1^+) + 2f(1^-) = 0 .
\end{aligned}
$$

Per ottenere la seconda equazione indipendente dobbiamo "accendere" la δ' al membro di destra. Per fare questo possiamo moltiplicare l'equazione per x e nuovamente integrare come sopra, ottenendo,

$$
\begin{aligned}
\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} dx\,x^3 f''(x) = \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} dx\,x\,\delta'(x-1) \qquad &\Rightarrow \qquad x^3 f'(x)\Big|_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} - 3\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} dx\,x^2 f'(x) = -1 \\
&\Rightarrow \qquad f'(1^+) - f'(1^-) - 3x^2 f(x)\Big|_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} + 6\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} dx\,x\,f(x) = -1 \\
&\Rightarrow \qquad f'(1^+) - f'(1^-) - 3f(1^+) + 3f(1^-) = -1 .
\end{aligned}
$$

Le due condizioni precedenti, riscritte in termini di a e b sono,

$$
\begin{cases} a - \frac{3b}{2} = 0 \\ 2a - 2b = -1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = -1 \end{cases} ,
$$

Che riproduce la soluzione trovata prima.