# Modelli e metodi matematici della fisica
# Esame scritto del 08/09/2023 – Canale Pf - Z

Angelo Esposito e Fabio Riccioni

1. **[9 pt.]** Si calcoli l'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \mathrm{d}x}{1+x^6}$$

utilizzando il teorema dei residui.

2. **[6 pt.]** Si consideri la funzione polidroma

$$f(z) = \frac{z^i}{1+z^3} \ .$$

Considerando il taglio lungo l'asse reale positivo, e la determinazione tale che $f(1) = \frac{1}{2}$ sopra al taglio, determinare:

- il valore della funzione in $z = -2$;
- il valore della funzione in $z = -i$;
- il residuo in $z = -1$.

3. **[6 pt.]** Si consideri la seguente matrice,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+i \\ 0 & -\frac{1}{2}+i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ , \tag{1}$$

la quale viene diagonalizzata dalla seguente matrice di cambio di base,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \ . \tag{2}$$

Si utilizzi la rappresentazione spettrale per scrivere le funzioni di matrice $f_1(A) = e^{(A^2)}$ e $f_2(A) = \log A$, dove nella seconda si sceglie il taglio lungo l'asse reale negativo e il logaritmo reale sull'asse reale positivo. *[Nota: potrebbe essere utile sapere che $\sqrt{-3-4i} = \pm(1-2i)$.]*

4. **[9 pt.]** Si consideri l'operatore $\mathcal{A} = -\frac{d^2}{dx^2} - \delta(x)$, ed il problema agli autovalori associato, $\mathcal{A}f(x) = \lambda f(x)$. Si trovino autovalori e autofunzioni (a meno di una costante di normalizzazione), nei seguenti due casi:

- Per $\lambda < 0$ si cerchino autofunzioni $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$.
- Per $\lambda > 0$ si cerchino autofunzioni generalizzate, $f(x) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Le si esprima in forma esponenziale e si imponga la condizione al bordo tale che, per $x \to +\infty$, siano onde piane con fase positiva.

**SOLUZIONI**

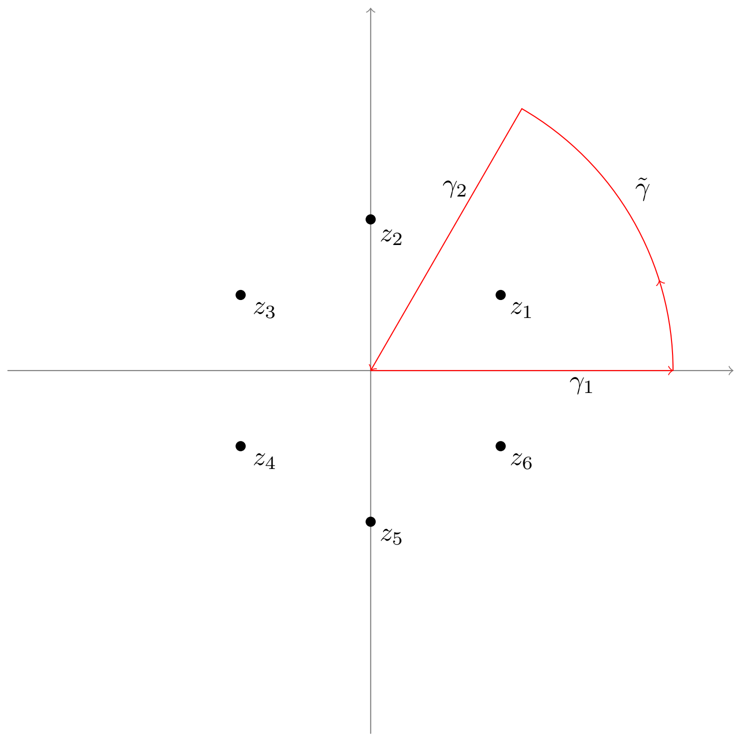
1. Consideriamo nel piano complesso la funzione

$$f(z) = \frac{z^3}{1+z^6} \ .$$

Osserviamo che prendendo $z = xe^{\frac{i\pi}{3}}$ abbiamo

$$f(xe^{\frac{i\pi}{3}}) = -\frac{x^3}{1+x^6} = -f(x) \ .$$

Consideriamo il percorso chiuso in figura, dove $\tilde{\gamma}$ è un arco di angolo $\frac{\pi}{3}$ e raggio $R$.




Per quanto detto sopra, integrando $f(z)$ lungo questo percorso, e considerando il limite $R \to \infty$, abbiamo

$$\int f(z)\mathrm{d}z = (1 + e^{\frac{\pi i}{3}})I \ ,$$

dove I è l'integrale che dobbiamo calcolare e abbiamo usato il fatto che $\mathrm{d}z = \mathrm{d}xe^{\frac{\pi i}{3}}$ lungo $\gamma_2$, e il segno relativo è dovuto al fatto che $x$ che va $+\infty$ a 0 lungo $\gamma_2$.
Calcoliamo l'integrale usando il teorema dei residui. La funzione $f(z)$ ha poli semplici per $z^6 = -1$, ovvero

$$z_k = e^{\frac{\pi i}{6} + \frac{k\pi i}{3}} \ .$$

I poli sono disegnati in figura, ed è evidente che solo $z_1$ è interno al percorso. Quindi

$$(1 + e^{\frac{\pi i}{3}})I = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=z_1} f(z) = 2\pi i \frac{z^3}{6z^5}\Big|_{z=z_1} = \frac{\pi i}{3z_1^2} = \frac{\pi i}{3} e^{-\frac{\pi i}{3}} = \frac{\pi}{3} e^{\frac{\pi i}{6}}$$

da cui troviamo

$$I = \frac{\pi}{6 \cos \frac{\pi}{6}}$$

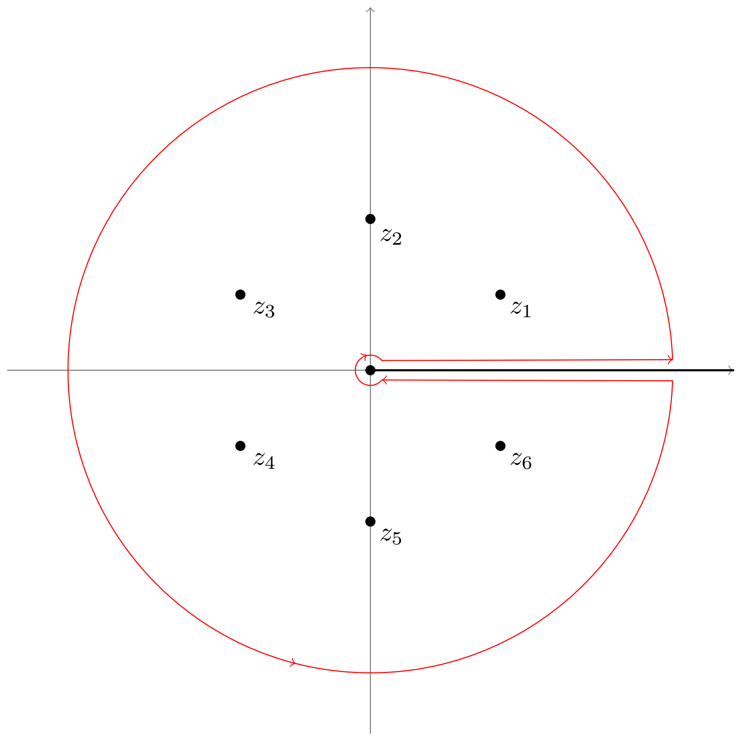
ovvero

$$I = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \ .$$

L'integrale può essere calcolato anche considerando la funzione

$$g(z) = f(z) \log z \ ,$$

dove prendiamo il taglio lungo l'asse reale positivo e il logaritmo reale sopra il taglio. Integrando $g(z)$ lungo il percorso in figura




abbiamo

$$\int g(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{6} \mathrm{Res}_{z=z_k} g(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{6} \frac{\log z_k}{6z_k^2} = \frac{\pi i}{3}\left[\frac{4\pi i}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}} - 2\pi i + \frac{8\pi i}{3}e^{\frac{i\pi}{3}}\right] = -\frac{2\pi^2 i}{3\sqrt{3}} \ .$$

Osservando che

$$\int g(z)\mathrm{d}z = -2\pi i I \ ,$$

otteniamo

$$I = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \ .$$

2. Sul foglio dato, abbiamo

$$-2 = 2e^{\pi i} \qquad -i = e^{\frac{3\pi i}{2}} \qquad -1 = e^{\pi i} \ .$$

Quindi

$$f(-2) = \frac{e^{i\log(-2)}}{1-8} = -\frac{e^{-\pi}e^{i\log 2}}{7} \ ;$$

$$f(-i) = \frac{e^{-\frac{3\pi}{2}}}{1+i} \ ;$$

$$\mathrm{Res}_{z=-1} f(z) = \frac{z^i}{3z^2}\Big|_{z=-1} = \frac{e^{-\pi}}{3} \ .$$

3. Per prima cosa notiamo che le colonne della matrice $S$ formano un set di vettori ortonormali. Ne segue che possiamo immediatamente dedurre gli autovettori dell'operatore $A$, ossia, $\boldsymbol{v}_1^T = (1 \ 0 \ 0)$, $\boldsymbol{v}_2^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \ 1 \ 1)$ e $\boldsymbol{v}_3^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \ 1 \ -1)$. Applicando la matrice $A$ a questi vettori, si trovano gli autovalori corrispondenti, ossia $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = 1-i$. (Alternativamente, si può risolvere l'equazione caratteristica, che richiede un po' più di lavoro.)

   Poiché gli autovettori sono ortonormali e reali, anche i proiettori vengono trovati in modo semplice:

$$\mathbb{P}_1 = \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \mathbb{P}_2 = \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \mathbb{P}_3 = \boldsymbol{v}_3 \otimes \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

   A questo punto si hanno tutti gli ingredienti per applicare la rappresentazione spettrale alle funzioni di matrice richieste. In particolare,

$$\begin{aligned} f_1(A) = e^{\lambda_1^2}\mathbb{P}_1 + e^{\lambda_2^2}\mathbb{P}_2 + e^{\lambda_3^2}\mathbb{P}_3 &= \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2i} & -e^{-2i} \\ 0 & -e^{-2i} & e^{-2i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{-1}+e^{-2i}}{2} & \frac{e^{-1}-e^{-2i}}{2} \\ 0 & \frac{e^{-1}-e^{-2i}}{2} & \frac{e^{-1}+e^{-2i}}{2} \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{4}$$

   Per trovare $f_2(A)$ scriviamo prima gli autovalori in forma polare. Avendo scelto il taglio sull'asse reale negativo, abbiamo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = e^{i\pi/2}$ e $\lambda_3 = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$. Poichè, inoltre, abbiamo preso la determinazione del logaritmo tale che sia reale sull'asse reale positivo, ne segue che,

$$\begin{aligned} f_2(A) = \log\lambda_1 \mathbb{P}_1 + \log\lambda_2 \mathbb{P}_2 + \log\lambda_3 \mathbb{P}_3 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\frac{\pi}{2} & i\frac{\pi}{2} \\ 0 & i\frac{\pi}{2} & i\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\log 2 - i\frac{\pi}{4} & -\frac{1}{2}\log 2 + i\frac{\pi}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2}\log 2 + i\frac{\pi}{4} & \frac{1}{2}\log 2 - i\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\log 2 + i\frac{\pi}{8} & -\frac{1}{4}\log 2 + i\frac{3\pi}{8} \\ 0 & -\frac{1}{4}\log 2 + i\frac{3\pi}{8} & \frac{1}{4}\log 2 + i\frac{\pi}{8} \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{5}$$

4. L'equazione differenziale associata al problema agli autovalori è data da,

$$-f''(x) - \delta(x) f(x) = \lambda f(x) \, . \tag{6}$$

   Partiamo dal caso $\lambda < 0$. Per $x \neq 0$, la $\delta$ di Dirac è nulla e l'equazione diventa semplicemente $-f''(x) = -|\lambda| f(x)$. La soluzione a questa equazione è, in linea di principio, diversa per $x > 0$ e $x < 0$. Ossia,

$$f(x) = \begin{cases} a\, e^{-\sqrt{|\lambda|}x} + b\, e^{\sqrt{|\lambda|}x} & \text{per } x > 0 \\ c\, e^{-\sqrt{|\lambda|}x} + d\, e^{\sqrt{|\lambda|}x} & \text{per } x < 0 \end{cases} , \tag{7}$$

   con $a, b, c$ e $d$ costanti. Poiché $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, si deve annullare all'infinito, da cui segue che deve essere $b = c = 0$. Dalla presenza della $\delta(x)$ nell'Eq. (6) deduciamo che la funzione $f(x)$ è continua in $x = 0$, mentre la sua derivata ha una discontinuità. La relazione di continuità, $f(0^+) = f(0^-)$, implica $a = d$. Per trovare l'equazione per la discontinuità integriamo l'equazione sull'intervallo $[-\epsilon, \epsilon]$, prendendo il limite $\epsilon \to 0$. Questo ci da,

$$-\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\, f''(x) - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\, \delta(x) f(x) = \lambda \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\, f(x) \qquad \Rightarrow \qquad -f'(0^+) + f'(0^-) - f(0) = 0 \, , \tag{8}$$

dove abbiamo usato il fatto che, poiché $f(x)$ è continua in $x=0$, il suo integrale su un intervallo infinitesimo tende a zero. L'equazione precedente implica,

$$2\sqrt{|\lambda|} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -1/4\,, \tag{9}$$

ossia, per $\lambda < 0$ lo spettro discreto è composto da un solo autovalore. La corrispondente autofunzione è,

$$f(x) = a\, e^{-|x|/2}\,. \tag{10}$$

Consideriamo ora il caso $\lambda > 0$. In modo del tutto analogo al caso precedente, per $x \neq 0$ le autofunzioni sono date da,

$$f(x) = \begin{cases} a\, e^{-i\sqrt{\lambda}\, x} + b\, e^{i\sqrt{\lambda}\, x} & \text{per } x > 0 \\ c\, e^{-i\sqrt{\lambda}\, x} + d\, e^{i\sqrt{\lambda}\, x} & \text{per } x < 0 \end{cases}\,. \tag{11}$$

Affinchè, come richiesto, per $x \to +\infty$ la soluzione abbia comportamento di onda piana con fase positiva, deve essere $a = 0$. A questo punto, le condizioni di continuità di $f(x)$ e discontinuità di $f'(x)$ in $x = 0$ rimangono le stesse del caso precedente. In questo caso, restituiscono il seguente sistema, che possiamo risolvere, ad esempio, per $b$ e $c$,

$$\begin{cases} b = c + d \\ -i\sqrt{\lambda}(b + c - d) = b \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} b = \frac{2i\sqrt{\lambda}}{1+2i\sqrt{\lambda}}\, d \\ c = -\frac{1}{1+2i\sqrt{\lambda}}\, d \end{cases}\,. \tag{12}$$

In questo caso, non abbiamo dovuto imporre nessuna condizione sull'autovalore e, quindi, ogni $\lambda > 0$ è un buon autovalore, corrispondente all'autofunzione,

$$f(x) = d \begin{cases} \frac{2i\sqrt{\lambda}}{1+2i\sqrt{\lambda}} e^{i\sqrt{\lambda}x} & \text{per } x > 0 \\ e^{i\sqrt{\lambda}x} - \frac{1}{1+2i\sqrt{\lambda}} e^{-i\sqrt{\lambda}x} & \text{per } x < 0 \end{cases}\,. \tag{13}$$