Modelli e metodi matematici della fisica
Esame scritto del 15/01/2024 – Canale Pf - Z

Angelo Esposito e Fabio Riccioni

1. **[9 pt.]** Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{\cos(z^2) - 1} \ .$$

- Si determini la parte principale dello sviluppo di Laurent di $f(z)$ intorno a $z = 0$.
- Si usi il risultato precedente per calcolare l'integrale

$$I = \int_\Gamma f(z) \mathrm{d}z \ ,$$

  dove Γ è una circonferenza centrata nell'origine percorsa in senso antiorario che non circonda nessun'altra singolarità di $f(z)$.

2. **[6 pt.]** Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{3 - 2\cos\theta} \ .$$

3. **[6 pt.]** Si consideri la seguente matrice,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Si usi il teorema spettrale per determinare la funzione di matrice, $f(A) = \cos(A\pi)$.

4. **[9 pt.]** Si calcolino i coefficienti della serie di Fourier in forma esponenziale della seguente funzione, definita sul dominio $x \in [-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+\pi)^2}{\pi} & -\pi < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \end{cases} \ .$$

Si utilizzi questo risultato per determinate il valore della serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$. Si spieghi esplicitamente come questo è legato alla serie di Fourier.

SOLUZIONI

1. Espandendo in serie di Taylor separatamente numeratore e denominatore si ottiene

$$f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ...}{1 - \frac{z^4}{2} + \frac{z^8}{4!} + ... - 1} = -\frac{2}{z^3} \frac{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ...}{1 - \frac{1}{12}z^4 + ...} \ .$$

Espandendo in serie geometrica il denominatore abbiamo

$$f(z) = -\frac{2}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ...\right)\left(1 + \frac{1}{12}z^4 + ...\right)$$

ovvero

$$f(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{1}{3z} - \frac{11z}{60} + ... \ .$$

La parte principale dell'espansione è costituita dai primi due termini. Si vede in particolare che $z = 0$ è un polo triplo.

Dall'espansione si legge che il residuo è

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{3}$$

da cui segue che integrando $f(z)$ lungo Γ si ottiene

$$I = \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{3} \ .$$

2. Osserviamo che l'integrando è una funzione pari, per cui possiamo scrivere

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{3 - 2\cos\theta} \ .$$

In termini della variabile complessa di modulo 1 $z = e^{i\theta}$ l'integrale diventa

$$I = -\frac{i}{2}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(3 - z - z^{-1})} = \frac{i}{2}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 3z + 1}$$

dove Γ è la circonferenza unitaria centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario. Utilizziamo il teorema dei residui per calcolare l'integrale. L'integrando ha poli semplici per

$$z_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e solamente z_- si trova dentro la circonferenza. Quindi

$$I = -\pi \mathrm{Res}_{z=z_-} \frac{1}{z^2 - 3z + 1} = -\pi \frac{1}{z_- - z_+}$$

ovvero

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{5}} \ .$$

3. Per prima cosa determiniamo autovalori e autovettori. Il polinomio caratteristico è dato da, $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (\lambda^2 - 1)(2 - \lambda) = 0$. Gli autovalori sono, quindi, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, e $\lambda_3 = 2$. Per determinare gli autovettori, invece, risolviamo i tre sistemi dati da $A \cdot \boldsymbol{v}^{(i)} = \lambda_i \boldsymbol{v}^{(i)}$. Essi sono,

$$\begin{cases} -v_3^{(1)} = -v_1^{(1)} \\ 2v_2^{(1)} = -v_2^{(1)} \\ -v_1^{(1)} = -v_3^{(1)} \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{cases} -v_3^{(2)} = v_1^{(2)} \\ 2v_2^{(2)} = v_2^{(2)} \\ -v_1^{(2)} = v_3^{(2)} \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{cases} -v_3^{(3)} = 2v_1^{(3)} \\ 2v_2^{(3)} = 2v_2^{(3)} \\ -v_1^{(3)} = 2v_3^{(3)} \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Gli autovettori di cui sopra sono ortonormali, da cui segue che i proiettori a loro associati sono facilmente determinabili come, $\mathbb{P}_i = |v^{(i)}\rangle\langle v^{(i)}|$, ossia $(\mathbb{P}_i)_{jk} = v_j^{(i)} v_k^{(i)}$. Questo restituisce,

$$\mathbb{P}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbb{P}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbb{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dati autovalori e proiettori, possiamo facilmente usare la rappresentazione spettrale per scrivere la funzione di matrice che ci interessa. Ossia,

$$\begin{aligned} f(A) = \ & \cos(A\pi) = \cos(\lambda_1 \pi)\mathbb{P}_1 + \cos(\lambda_2 \pi)\mathbb{P}_2 + \cos(\lambda_3 \pi)\mathbb{P}_3 \\ = & -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

4. La serie di Fourier in forma esponenziale è data da,

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx} ,$$

dove si è usato il fatto che, in questo caso, il dominio ha lunghezza $L = 2\pi$. I coefficienti sono dati da,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\, e^{-inx} .$$

Partiamo dal caso $n = 0$,

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{0} dx\, \frac{(x+\pi)^2}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi^2}{3} .$$

Per $n \neq 0$, invece, abbiamo,

$$
\begin{aligned}
f_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} dx \, \left(x^2 + 2\pi x + \pi^2\right) \, e^{-inx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} + 2\pi \frac{d}{d\alpha} + \pi^2 \right) \int_{-\pi}^{0} dx \, e^{\alpha x} \right]_{\alpha=-in} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} + 2\pi \frac{d}{d\alpha} + \pi^2 \right) \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha\pi}\right) \right]_{\alpha=-in} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\left(1 - e^{-\alpha\pi}\right)}{\alpha^3} - \frac{2\pi e^{-\alpha\pi}}{\alpha^2} - \frac{\pi^2 e^{-\alpha\pi}}{\alpha} - \frac{2\pi\left(1 - e^{-\alpha\pi}\right)}{\alpha^2} + \frac{2\pi^2 e^{-\alpha\pi}}{\alpha} + \frac{\pi^2\left(1 - e^{-\alpha\pi}\right)}{\alpha} \right]_{\alpha=-in} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2i}{n^3} \left(1 - (-1)^n\right) + \frac{2\pi}{n^2} + \frac{i\pi^2}{n} \right] ,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato il fatto che $e^{in\pi} = (-1)^n$. In conclusione,

$$
f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\pi} \begin{cases} \frac{2\pi}{n^2} + \frac{i\pi^2}{n} & n \text{ pari} \\ -\frac{4i}{n^3} + \frac{2\pi}{n^2} + \frac{i\pi^2}{n} & n \text{ dispari} \end{cases} .
$$

Notiamo ora che, sia che n sia pari, sia che sia dispari, vale,

$$
f_n + f_{-n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{n^2} .
$$

Ne segue che la serie di Fourier calcolata in $x = 0$ è data da,

$$
S(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n + f_{-n}\right) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right] .
$$

Allo stesso tempo, poichè $f(x)$ è discontinua in $x = 0$, sappiamo che varrà,

$$
S(0) = \frac{1}{2} \left(f(0^+) + f(0^-) \right) = \frac{\pi}{2} .
$$

Quindi,

$$
\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right] = \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .
$$