Modelli e metodi matematici della fisica
Esame scritto del 16/11/2023 – Canale Pf - Z

Angelo Esposito e Fabio Riccioni

1. **[7 pt.]** Calcolare gli integrali

$$\int_{\gamma_i} \frac{z^{n-1}}{\sin z} dz \qquad n > 0$$

lungo le circonferenze γ_1 con $z_0 = 0$ e $R_1 = \frac{\pi}{2}$ e γ_2 con $z_0 = 0$ e $R_2 = \frac{3\pi}{2}$.
Usare il risultato per determinare la parte principale delle serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

che convergono negli anelli centrati in zero con $0 < R < \pi$ e $\pi < R < 2\pi$ rispettivamente.

2. **[8 pt.]** Calcolare il residuo all'infinito della funzione

$$f(z) = i(z-1)^{\frac{1}{2}}(z+2)^{\frac{1}{2}}$$

dove il taglio è il segmento che congiunge -2 e 1 e la determinazione è reale positiva sopra il taglio. Usare il risultato per calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^{1} \sqrt{2 - x - x^2} dx \ .$$

3. **[7 pt.]** Si calcoli la trasformata di Fourier della seguente funzione,

$$f(x) = xe^{-x}\theta(x) + e^{x}\theta(-x) \, .$$

Una volta ottenuta la trasformata di Fourier, $\hat{f}(k)$, si calcoli l'anti-trasformata, $\hat{\hat{f}}(x)$. Si mostri come per $x \neq 0$, $\hat{\hat{f}}(x) = f(x)$. Per $x = 0$ l'integrale è più complicato da calcolare. Senza svolgere il conto, in analogia con quanto succede per la serie di Fourier, quanto ci aspettiamo valga $\hat{\hat{f}}(0)$?

4. **[8 pt.]** Si utilizzi il metodo della funzione di Green per trovare la soluzione della seguente ODE,

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = \delta'(x-1) \, ,$$

sul dominio $x \in [0, 2]$ e con condizioni al bordo $f(0) = f(2) = 0$.

SOLUZIONI

1. La funzione $\frac{1}{\sin z}$ ha poli semplici per $z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. La curva γ_1 contiene solo il polo $z_0 = 0$, mentre la curva γ_2 contiene anche π e $-\pi$. Considerando il numeratore dell'integrando, l'integrale lungo γ_1 è diverso da zero solo per $n = 1$, mentre per l'integrale lungo γ_2 i poli in $\pm\pi$ contribuiscono per ogni n:

$$\int_{\gamma_1} \frac{z^{n-1}}{\sin z} dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{z^{n-1}}{\sin z} dz = \begin{cases} -2\pi i & n = 1 \\ 0 & n > 1 \quad n \text{ even} \\ -4i\pi^n & n > 1 \quad n \text{ odd} \end{cases}$$

I coefficienti della parte principale della serie di Laurent sono dati dalla formula

$$d_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z^{n-1}}{\sin z} dz \ .$$

Quindi per il primo sviluppo l'unico termine diverso da zero è d_{-1} ed è uguale a uno, mentre per il secondo sviluppo abbiamo che la parte principale è

$$-\frac{1}{z} - \sum_{n>1 \text{ odd}} \frac{2\pi^{n-1}}{z^n} \ .$$

2. Scriviamo

$$f(z) = i(z-1)^{\frac{1}{2}}(z+2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r_1 r_2} e^{\frac{i}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \ ,$$

dove

$$z - 1 = r_1 e^{i\vartheta_1} \ , \qquad z + 2 = r_2 e^{i\vartheta_2} \ .$$

Per avere che la funzione sia reale positiva sopra il taglio, possiamo scegliere $\theta_1 = -\pi$ e $\theta_2 = 0$. Di conseguenza, sul foglio dato dobbiamo scegliere $\theta_1 = -2\pi$ sull'asse reale positivo con $x > 1$. Questo implica che la funzione per $z = x > 1$ è immaginaria negativa. Il residuo all'infinito è uguale al residuo in zero della funzione $-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)$. Ricordando che $f\left(\frac{1}{w}\right)$ è immaginaria negativa per $w \to 0^+$, abbiamo

$$\text{Res}_{w=0}\left(-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)\right) = \text{Res}_{w=0} \frac{i}{w^2} \sqrt{\left(\frac{1}{w} - 1\right)\left(\frac{1}{w} + 2\right)} = \text{Res}_{w=0} \frac{i}{w^3} \sqrt{(1-w)(1+2w)}$$

$$= \frac{i}{2} \frac{d^2}{dw^2} \sqrt{1 + w - 2w^2}\Big|_{w=0} = -\frac{9i}{8} \ .$$

Consideriamo ora l'integrale I da calcolare. Prendiamo una curva γ che circonda il taglio in senso orario. Dal momento che la determinazione è negativa sotto il taglio, abbiamo che

$$\int_\gamma f(z) dz = 2I \ .$$

L'integrale però è anche uguale a $2\pi i$ per il residuo all'infinito. Quindi

$$2I = -2\pi i \frac{9i}{8}$$

ovvero

$$I = \frac{9\pi}{8} \ .$$

3. La trasformata di Fourier della funzione è data da,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} = \int_{-\infty}^{0} dx\, e^{(1-ik)x} + \int_{0}^{\infty} dx\, x\, e^{-(1+ik)x} \\
&= \frac{1}{1-ik} e^{(1-ik)x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x}\Big|_{\alpha=1+ik} = \frac{1}{1-ik} - \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\Big|_{\alpha=1+ik} \\
&= \frac{1}{1-ik} + \frac{1}{(1+ik)^2}\,.
\end{aligned}$$

Per calcolare l'anti-trasformata dobbiamo fare,

$$\hat{\hat{f}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\left(\frac{1}{1-ik} + \frac{1}{(1+ik)^2}\right) e^{ikx}\,.$$

Al solito, questo integrale viene risolto chiudendo il contorno di integrale nel piano complesso. Per $x > 0$, affinchè l'integrale converga, dobbiamo chiudere nella regione $\operatorname{Im} k > 0$, ossia nel semi-piano superiore. In questo caso, l'integrale riceve contributo solo dal polo in $k = i$, ossia dal secondo termine, mentre il primo restituisce zero. Essendo un polo doppio, abbiamo,

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{f}}(x>0) &= 2\pi i \lim_{k\to i}\frac{d}{dk}\left[(k-i)^2 \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1+ik)^2} e^{ikx}\right] \\
&= -\, i \lim_{k\to i}\frac{d}{dk} e^{ikx} = x e^{-x}\,.
\end{aligned}$$

Per $x < 0$, invece, dobbiamo chiudere il contorno nella regione $\operatorname{Im} k < 0$, ossia nel semi-piano inferiore. In questo caso, il secondo termine in non contribuisce, e l'unico contributo viene dal polo semplice in $k = -i$ associato al primo termine. Abbiamo, quindi,

$$\hat{\hat{f}}(x<0) = -2\pi i \lim_{k\to -i}(k+i)\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-ik} e^{ikx} = e^{x}\,.$$

Per $x \neq 0$, quindi, effettivamente l'anti-trasformata restituisce la funzione originale. Per $x = 0$, l'integrale che definisce $\hat{\hat{f}}(x)$ è divergente. Andrebbe quindi introdotto un regolare, calcolato l'integrale e poi rimosso il regolatore. Tuttavia, in completa analogia con il caso della serie di Fourier, possiamo dire che,

$$\hat{\hat{f}}(0) = \frac{1}{2}\left[f(0^+) + f(0^-)\right] = \frac{1}{2}\,.$$

4. Per calcolare la funzione di Green, per prima cosa troviamo le due soluzioni dell'equazione omogenea che soddisfano le due condizioni al bordo separatamente. L'equazione omogenea è a coefficienti costanti, con la soluzione più generale possibile data da $f_{\rm omog}(x) = a\, e^{x} + b\, e^{2x}$. Le due soluzioni con le condizioni al bordo desiderate allora sono,

$$f_1(x) = e^{x} - e^{2x}\,, \qquad f_2(x) = e^{x} - e^{2(x-1)}\,,$$

tali che $f_1(0) = 0$ e $f_2(2) = 0$. Il Wronskiano costruito a partire da queste due soluzioni è, $W(x) = f_1(x) f_2'(x) - f_1'(x) f_2(x) = (e^2 - 1) e^{3x-2}$.

Al solito, una volta note le soluzioni particolari dell'equazione omogenea, la funzione di Green è data da,

$$G(x,y) = \frac{1}{a_2(y) W(y)}\begin{cases} f_1(x) f_2(y) & y > x \\ f_1(y) f_2(x) & y < x \end{cases} = \frac{1}{e^2-1}\begin{cases} \left(e^{2x} - e^{x}\right)\left(e^{-y} - e^{2(1-y)}\right) & y > x \\ \left(e^{x} - e^{2(x-1)}\right)\left(e^{2(1-y)} - e^{2-y}\right) & y < x \end{cases}.$$

La soluzione cercata, allora, è data da,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^2 dy\, G(x,y)\delta'(y-1) \\
&= \frac{e^{2x}-e^x}{e^2-1}\int_x^2 dy \left(e^{-y}-e^{2(1-y)}\right)\delta'(y-1) + \frac{e^x-e^{2x-2}}{e^2-1}\int_0^x dy\left(e^{2-2y}-e^{2-y}\right)\delta'(y-1) \\
&= \frac{e^{2x}-e^x}{e^2-1}\left[-\left(e^{-1}-1\right)\delta(x-1) - \int_x^2 dy\left(-e^{-y}+2e^{2-2y}\right)\delta(y-1)\right] \\
&\quad + \frac{e^x-e^{2x-2}}{e^2-1}\left[(1-e)\,\delta(x-1) - \int_0^x dy\left(-2e^{2-2y}+e^{2-y}\right)\delta(y-1)\right] \\
&= \frac{1-2e}{e^3-e}\left(e^{2x}-e^x\right)\theta(1-x) + \frac{2-e}{e^2-1}\left(e^x-e^{2x-2}\right)\theta(x-1)\,.
\end{aligned}
$$

Ricordando che $\theta'(x) = \delta(x)$ si può verificare che effettivamente questa funzione soddisfa l'equazione come richiesto.