Modelli e metodi matematici della fisica
Esame scritto del 20/06/2023 – Canale Pf - Z

Angelo Esposito e Fabio Riccioni

1. **[7 pt.]**

   Si consideri la funzione

   $$f(z) = \frac{1}{\cos\left(e^z - 1\right) - 1} \ .$$

   - Si determini la parte principale dello sviluppo di Laurent di $f(z)$ intorno a $z = 0$.
   - Si usi il risultato precedente per calcolare l'integrale

     $$I = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

     dove Γ è una circonferenza centrata nell'origine percorsa in senso antiorario che non circonda nessun'altra singolarità di $f(z)$.

2. **[8 pt.]**

   - La funzione polidroma

     $$f(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

     ha punti di diramazione in ± 1. Si prenda il taglio che va da $-\infty$ a -1 e da 1 a $+\infty$ sull'asse reale, e si consideri la determinazione tale che la funzione è reale positiva sopra al taglio di destra ($x > 1$). Determinare il valore della funzione sotto il taglio di destra, sopra e sotto il taglio di sinistra e in $z = 0$.
   - Usare il risultato per calcolare l'integrale

     $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2 - 1}}$$

     usando il teorema dei residui.

3. **[8 pt.]**

   Si trovino autofunzioni ed autovalori dell'operatore $\mathcal{A} = \frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 1$ nel dominio delle funzioni continue su $x \in [0, 1]$ e tali che $f(0) = f(1) = 0$.

4. **[7 pt.]**

   Si utilizzi il metodo delle funzioni di Green per risolvere la seguente ODE,

   $$x^2 f''(x) + x f'(x) - f(x) = x^2 \,,$$

   sul dominio $x \in [1, 2]$ e con condizioni al bordo $f(1) = f(2) = 0$.

   Si discuta poi il caso in cui le condizioni al bordo sono $f(1) + 3f'(1) = f(2) - 6f'(2) = 0$.

SOLUZIONI

1. Espandendo in serie di Taylor la funzione $\cos(e^z-1)-1$ otteniamo

$$\cos(e^z-1)-1=\cos\left(z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+...\right)-1=-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+...\right)^2+...=-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}z^3+...$$

dove stiamo trascurando termini di ordine z^4. Quindi scopriamo che $z=0$ è un polo doppio. Dobbiamo determinare i coefficienti d_{-2} e d_{-1} della serie di Laurent. Abbiamo

$$f(z)=\frac{1}{-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}z^3+...}=-\frac{2}{z^2}\frac{1}{1+z+...}=\frac{2}{z^2}(1-z+...)=-\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z}+...$$

da cui leggiamo

$$d_{-2}=-2 \qquad d_{-1}=2\ .$$

Usando il teorema dei residui otteniamo che l'integrale lungo una curva antioraria che circonda $z=0$ e nessun'altra singolarità è

$$I=2\pi i d_{-1}=4\pi i\ .$$

2. Scriviamo

$$f(z)=(z-1)^{\frac{1}{2}}(z+1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{r_1r_2}e^{\frac{i}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)}$$

dove

$$z-1=r_1e^{i\vartheta_1} \qquad z+1=r_2e^{i\vartheta_2}\ .$$

Prendiamo $\vartheta_1=\vartheta_2=0$ per $z=x>1$ sopra il taglio. Per andare sotto il taglio di destra dobbiamo ruotare intorno a 1 di 2π in senso antiorario. Quindi per $z=x>1$ sotto il taglio abbiamo $\vartheta_1=2\pi,\vartheta_2=0$, e la funzione è negativa. Per andare sopra al taglio di sinistra dobbiamo ruotare di π in senso antiorario sia intorno a 1 che a -1, e quindi la funzione è di nuovo negativa. Per andare sotto il taglio di sinistra dobbiamo invece ruotare di π in senso antiorario intorno a 1 e in senso orario intorno a -1, da cui $\vartheta_1=\pi,\vartheta_2=-\pi$ e la funzione è reale positiva. Infine per andare al punto $z=0$ dobbiamo ruotare il senso antiorario intorno a 1 di π, e quindi $\vartheta_1=\pi,\vartheta_2=0$ e la funzione è immaginaria positiva, ovvero

$$f(0)=i\ .$$

Consideriamo la funzione $\frac{1}{z^3f(z)}$ e integriamola lungo il percorso γ in figura. Osserviamo che nel limite in cui il raggio della circonfenza grande va a infinito e quello delle circonferenze che circondano i punti di diramazione va a zero, l'integrale è uguale a quattro volte l'integrale I che dobbiamo calcolare. La curva circonda il polo triplo $z=0$, e possiamo calcolare l'integrale usando il teorema dei residui. Otteniamo

$$4I=2\pi i\mathrm{Res}_{z=0}\frac{1}{z^3f(z)}=\pi i\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{f(z)}\Big|_{z=0}\ .$$

Abbiamo

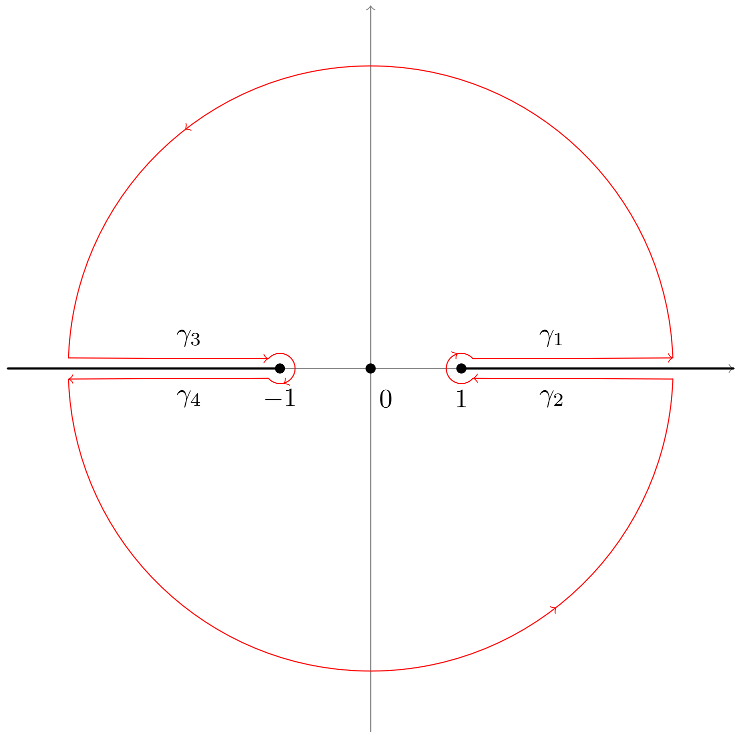
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3z^2}{(z^2-1)^{\frac{5}{2}}}\ ,$$

e in $z=0$ sopravvive solo il primo termine. Per le considerazioni precedenti riguardo alla determinazione di $f(z)$ in $z=0$, abbiamo

$$-\frac{1}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}=-e^{-\frac{3i}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)}=-i\ ,$$

dove abbiamo imposto $\vartheta_1=\pi,\vartheta_2=0$. Quindi, in conclusione

$$I=\frac{\pi}{4}\ .$$



3. L'equazione agli autovalori associata all'operatore $\mathcal{A}$ è la seguente,

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = \lambda f(x)\,, \tag{1}$$

ossia un'ODE del secondo ordine a coefficienti costanti. Cercando soluzioni del tipo $e^{\alpha x}$, l'equazione caratteristica è data da $\alpha^2 - 2\alpha + 1 - \lambda = 0$, le cui soluzioni sono,

$$\alpha_\pm = 1 \pm \sqrt{\lambda}\,. \tag{2}$$

Ci sono, quindi, due casi qualitativamente diversi. Il primo è $\lambda \neq 0$. In questo caso, la soluzione più generale possibile al problema agli autovalori è data da,

$$f(x) = a\, e^{\left(1+\sqrt{\lambda}\right)x} + b\, e^{\left(1-\sqrt{\lambda}\right)x}\,, \tag{3}$$

con a e b costanti da determinare. Dalla condizione $f(0) = 0$ segue immediatamente $b = -a$. La condizione $f(1) = 0$, invece, corrisponde a,

$$e^{1+\sqrt{\lambda}} - e^{1-\sqrt{\lambda}} = 2e \sinh\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda_n} = in\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = -n^2\pi^2\,, \tag{4}$$

con $n \in \mathbb{Z}/\{0\}$. Il secondo caso, qualitativamente diverso, è quello nel quale $\lambda = 0$. In questo caso, $\alpha_+ = \alpha_- = 1$, e la soluzione più generale possibile dell'Eq. (1) è data da,

$$f(x) = a\, e^x + b\, xe^x\,. \tag{5}$$

In questo caso, la condizione $f(0) = 0$ implica $a = 0$, mentre la condizione $f(1) = 0$ implica $b = 0$, ossia, il problema agli autovalori non ha soluzione per $\lambda = 0$.

In conclusione, gli autovalori dell'operatore $\mathcal{A}$ sono $\lambda_n = -n^2\pi^2$ con $n \in \mathbb{Z}/\{0\}$, mentre le autofunzioni sono,

$$f_n(x) = a\, e^x \sin(n\pi x)\,. \tag{6}$$

4. L'equazione omogenea associata al problema sotto esame è un'equazione di Eulero, con soluzioni fondamentali date da $1/x$ ed x. Le due soluzioni dell'omogenea che rispettano le condizioni al contorno separatamente in $x = 1$ e $x = 2$ sono date da,

$$f_1(x) = \frac{1}{x} - x\,, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{4}\,, \tag{7}$$

tali che $f_1(1) = 0$, $f_1(2) \neq 0$, $f_2(1) \neq 0$ e $f_2(2) = 0$. Il Wronskiano corrispondente è dato da $W(x) = f_1(x)f_2'(x) - f_1'(x)f_2(x) = \frac{3}{2x}$. L'espressione per la funzione di Green in questi casi è,

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{1}{a_2(y)W(y)}\left[f_1(x)f_2(y)\theta(y-x) + f_1(y)f_2(x)\theta(x-y)\right] \\ &= \frac{2}{3y}\left[\left(\frac{1}{x} - x\right)\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{4}\right)\theta(y-x) + \left(\frac{1}{y} - y\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right)\theta(x-y)\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{x} - x\right)\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{4}\right)\theta(y-x) + \left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right)\theta(x-y)\right]\,, \end{aligned} \tag{8}$$

La soluzione dell'equazione differenziale non-omogenea è, quindi,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^2 dy\, G(x,y)y^2 = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{x} - x\right)\int_x^2 dy\left(1 - \frac{y^2}{4}\right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right)\int_1^x dy\left(1 - y^2\right)\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{x} - x\right)\left(\frac{4}{3} - x + \frac{x^3}{12}\right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right)\left(x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\right)\right] = \frac{4}{9x} - \frac{7x}{9} + \frac{x^2}{3}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Discutiamo ora il secondo set di condizioni al bordo. La soluzione più generale possibile dell'equazione omogenea è $h(x) = \frac{a}{x} + bx$. Imponendo $f_1(1) + 3f_1'(1) = 0$, troviamo, $f_1(x) = a_1\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right)$. Imponendo, invece, $f_2(2) - 6f_2'(2) = 0$, troviamo $f_2(x) = a_2\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right)$. Ma allora $f_2(x) \propto f_1(x)$, il Wronskiano è nullo, e la funzione di Green non esiste. Quindi, date queste condizioni al contorno, non è possibile risolvere l'equazione usando il metodo della funzione di Green.