MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni dell'esame dell'11 febbraio 2019

1. La funzione $v(x, y)$ deve essere una funzione armonica, ovvero dobbiamo imporre
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\,.$$
Questo avviene per $\alpha = -1$. Dalle condizioni di Cauchy-Riemann troviamo quindi che la parte reale deve soddisfare
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2x$$
da cui
$$u(x, y) = -2xy + a$$
dove a è una costante. Quindi
$$f(z) = -2xy + i(x^2 - y^2) + a = iz^2 + a\,.$$
La condizione $f(1 + i) = 0$ si ottiene per
$$a = 2$$
Quindi
$$f(z) = iz^2 + 2 \quad .$$

2. Dobbiamo calcolare
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\,(x + 1)}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$$
Scriviamo
$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x+1)}}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(x+1)}}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$$
Calcoliamo entrambi gli integrali usando il teorema dei residui e il lemma di Jordan. Il primo intregrale viene chiuso sul piano complesso superiore (verso antiorario) mentre il secondo sul piano complesso

inferiore (verso orario). L'integrando ha due poli semplici in $z = i$ e $z = -i$. Quindi per il primo integrale dobbiamo considerare solo il residuo in $z = i$ mentre per il secondo integrale solo il residuo in $z = -i$. Quindi

$$I = (2\pi i)\left(\frac{e^i}{2}\text{Res}_{z=i}\frac{e^{iz}}{z^2+1} - \frac{e^{-i}}{2}\text{Res}_{z=-i}\frac{e^{-iz}}{z^2+1}\right)$$

ovvero

$$I = (2\pi i)\left(\frac{e^i}{2}\frac{e^{-1}}{2i} + \frac{e^{-i}}{2}\frac{e^{-1}}{2i}\right)$$

da cui si ottiene

$$I = \pi e^{-1}\cos(1)$$

3. La matrice ha autovalore $\lambda = -1$ con molteplicità geometrica 1. L'operatore risolvente è

$$R_z(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z+1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{(z+1)^2} & \frac{1}{z+1} & 0 \\ -\frac{z}{(z+1)^3} & \frac{1}{(z+1)^2} & \frac{1}{z+1} \end{pmatrix}$$

Il risolvente ha un polo di ordine 3, come ci aspettiamo dal fatto che l'autovalore ha molteplicità geometrica 1. Troviamo gli operatori spettrali

$$P^0_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^1_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^2_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Per calcolare $\ln A$ usiamo la formula generale

$$f(A) = f(-1)P^0_{-1} + f'(-1)P^1_{-1} + \frac{1}{2}f''(-1)P^2_{-1}$$

dove la funzione $f(z)$ è il logaritmo. Dobbiamo determinare il logaritmo di -1 con la determinazione richiesta. Dal momento che il logaritmo è reale sull'asse reale positivo e il taglio è lungo l'asse immaginario positivo, per andare sull'asse reale negativo dobbiamo ruotare di $-\pi$. Quindi

$$\ln(-1) = -\pi i$$

da cui

$$\ln A = (-\pi i)P^0_{-1} - P^1_{-1} - \frac{1}{2}P^2_{-1} = \begin{pmatrix} -\pi i & 0 & 0 \\ -1 & -\pi i & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\pi i \end{pmatrix}$$

4. Abbiamo

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-ipx} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-ipx} \, \mathrm{d}x$$

Calcolando gli integrali si trova

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x-ipx}}{-1-ip}\bigg|_0^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{x-ipx}}{1-ip}\bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+ip} - \frac{1}{1-ip} \right)$$

da cui

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-2ip}{1+p^2}$$

5. Dobbiamo trovare le funzioni $f(x)$ tali che

$$Tf(x) = \lambda f(x)$$

Troviamo

$$f(x) = f(0) \exp\left(i \int_0^x (t^2 - \lambda) \, \mathrm{d}t \right)$$

ovvero

$$f(x) = f(0) \exp\left(\frac{ix^3}{3} - i\lambda x \right)$$

Imponendo la condizione

$$f(0) = f(1)$$

di appartenenza al dominio troviamo

$$\exp\left(\frac{i}{3} - i\lambda\right) = 1$$

da cui

$$\lambda = \lambda_k = \frac{1}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$