MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni dell'esame dell'11 luglio 2018

1. Per calcolare entrambi gli integrali dobbiamo studiare le proprietà della funzione polidroma
$$f(z) = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$$
La funzione ha punti di diramazione in $+1$ e -1, e scegliamo il taglio che congiunge questi punti. La funzione è reale per z reale tra questi due punti, e la scegliamo positiva sopra il taglio e negativa sotto il taglio. Il primo integrando ha poli semplici al finito in $\pm 2i$. Vediamo quindi quanto vale $f(z)$ in questi due punti. Sopra il taglio abbiamo
$$f(0^+) = 1$$
per cui per z immaginario positivo, ovvero $z = ia$ con a reale positivo, abbiamo
$$f(ia) = \sqrt{\frac{1+ia}{1-ia}} = \frac{1+ia}{\sqrt{1+a^2}}$$
In particolare questo fornisce
$$f(2i) = \frac{1+2i}{\sqrt{5}}$$
Per $z = 0$ sotto al taglio abbiamo
$$f(0^-) = -1$$
Quindi per z immaginario negativo, ovvero $z = -ia$, con a di nuovo reale positivo, abbiamo
$$f(-ia) = -\sqrt{\frac{1-ia}{1+ia}} = -\frac{1-ia}{\sqrt{1+a^2}}$$
da cui
$$f(-2i) = -\frac{1-2i}{\sqrt{5}}$$

L'integrando del primo integrale non ha residuo all'infinito. Infatti è facile mostrare che

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{z^2}{1+4z^2}$$

non ha poli in $z = 0$. Per calcolare il primo integrale consideriamo l'integrale intorno al taglio percorso in senso orario. Usando il teorema dei residui otteniamo

$$2I_1 = 2\pi i \left[\mathrm{Res}_{z=2i} f(z) \frac{1}{z^2+4} + \mathrm{Res}_{z=-2i} f(z) \frac{1}{z^2+4} \right]$$

ovvero

$$I_1 = \pi i \left[\frac{1+2i}{\sqrt{5}} \frac{1}{4i} + \frac{1-2i}{\sqrt{5}} \frac{1}{4i} \right] = \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$$

Il secondo integrando ha un polo al finito per $z = -2$. Dobbiamo quindi stabilire la determinazione di $f(z)$ per z reali e in modulo maggiori di 1. Intorno a -1 prendendo $z = -1 + \epsilon e^{i\theta}$ otteniamo

$$f(z) \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}}$$

Siccome $f(z)$ è reale positiva sopra al taglio a destra di -1, prendiamo sopra il taglio $\theta = 0$, e ruotando in senso antiorario di π troviamo che $f(z)$ è immaginaria positiva a sinistra del taglio. Analogamente, prendendo $z = 1 + \epsilon e^{i\theta}$ intorno a 1 abbiamo

$$f(z) = \sqrt{\frac{2}{-\epsilon e^{i\theta}}}$$

Scegliamo per convenzione per il segno $-$ dentro la radice la determinazione $-1 = e^{i\pi}$, da cui

$$f(z) = \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} e^{-i\frac{\theta+\pi}{2}}$$

Quindi per avere $f(z)$ positiva a sinistra di 1 sopra il taglio scegliamo $\theta = -\pi$, da cui ruotando di π in senso orario andiamo a $\theta = -2\pi$, e quindi di nuovo la funzione è immaginaria positiva anche a destra di 1.

Questo significa che

$$f(-2) = \frac{i}{\sqrt{3}}$$

e

$$f\left(\frac{1}{z}\right) \to i$$

per $z \to 0$. Nel caso del secondo integrando abbiamo il residuo all'infinito, infatti

$$\mathrm{Res}_{z=0}\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{z}{1+2z} = i$$

e quindi

$$2I_2 = 2\pi i\left[\mathrm{Res}_{z=-2}f(z)\frac{1}{z+2} + \mathrm{Res}_{z=\infty}f(z)\frac{1}{z+2}\right]$$

ovvero

$$I_2 = \pi i\left[\frac{i}{\sqrt{3}} - i\right] = \pi\left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

2. Possiamo scrivere l'operatore in forma di matrice. Abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & \alpha^2 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \alpha^3 & 1 & ... \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^4 & ... \\ . & . & . & . & ... \end{pmatrix}$$

Per dimostrare che l'operatore è limitato osserviamo che per ogni $\mathbf{x}$ in l^2 abbiamo

$$\|A\mathbf{x}\|^2 = |\alpha x_1 + x_2|^2 + |\alpha^2 x_2 + x_3|^2 + |\alpha^3 x_3 + x_4|^2 + ...$$

da cui

$$\|A\mathbf{x}\|^2 \leq 2\left(|\alpha||x_1|^2 + |x_2|^2 + |\alpha|^2|x_2|^2 + |x_3|^2 + ...\right) \leq 2(1+|\alpha|)\|\mathbf{x}\|$$

Per determinare se $\lambda_k = \alpha^k$, $k = 1, 2, ...$ sono autovalori, dobbiamo risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 = \alpha^k x_1 \\ \alpha^2 x_2 + x_3 = \alpha^k x_2 \\ ... \end{cases}$$

Dobbiamo prendere $x_1 \neq 0$ altrimenti non abbiamo soluzione. Scegliamo quindi $x_1 = 1$, da cui si trova

$$x_m = \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha^k - \alpha^m) \qquad 2 \leq m \leq k \qquad\qquad x_m = 0 \quad m > k$$

Quindi λ_k è un autovalore.

Per $\lambda = 0$ troviamo

$$x_1 = 1 \qquad x_n = (-)^{n+1}\alpha^{n-1}\alpha^{n-2}...\alpha$$

e siccome $|\alpha| < 1$ è facile convincersi che la norma di questo vettore è finita e quindi il vettore appartiene a l^2, da cui segue che $\lambda = 0$ è autovalore.

L'operatore aggiunto è

$$A = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & \bar{\alpha}^2 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & \bar{\alpha}^3 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & \bar{\alpha}^4 & ... \\ . & . & . & . & ... \end{pmatrix}$$

Per $\lambda = 0$ otteniamo l'equazione

$$\begin{cases} \bar{\alpha} x_1 = 0 \\ x_1 + \bar{\alpha}^2 x_2 = 0 \\ ... \end{cases}$$

la cui unica soluzione è il vettore nullo, quindi $\lambda = 0$ non è autovalore di $A^\dagger$.

3. Il modo più semplice per risolvere l'equazione è osservare che definendo $f' = g$ l'equazione è del primo ordine per g (ogni altro modo corretto di risolverla è altrettanto valido). L'equazione per $g(x)$ è

$$x^3 g'(x) + 3x^2 g(x) = x$$

Cerchiamo la soluzione dell'omogenea della forma x^α. Troviamo $\alpha = -3$. Analogamente cerchiamo la soluzione particolare della forma βx^γ. Troviamo $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = -1$. Quindi la soluzione è

$$g(x) = a x^{-3} + \frac{1}{2} x^{-1}$$

Per trovare $f(x)$ integriamo:

$$f(x) = f(1) + \int_1^x \mathrm{d}y \, \left(ay^{-3} + \frac{1}{2} y^{-1} \right) = f(1) - \frac{a}{2}(x^{-2} - 1) + \frac{1}{2} \ln x$$

La soluzione del problema con condizioni al contorno è

$$f(x) = \frac{2}{3} \ln 2 \; (x^{-2} - 1) + \frac{1}{2} \ln x$$

mentre la soluzione al problema con condizioni iniziali è

$$f(x) = 1 + \frac{1}{4} \ln 2 \; (x^{-2} - 1) + \frac{1}{2} \ln x$$