MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni dell'esame del 12 settembre 2019 - Canale N-Z

1. Consideriamo sui complessi la funzione polidroma

$$f(z) = \frac{\ln z}{z^{\frac{1}{2}}(z^2+1)} \quad .$$

Consideriamo il taglio lungo l'asse reale positivo. Scegliamo la determinazione sopra il taglio

$$f(x^+) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2+1)} \quad .$$

Di conseguenza, la determinazione sotto il taglio è

$$f(x^-) = -\frac{\ln x + 2\pi i}{\sqrt{x}(x^2+1)} \quad ,$$

dove il cambio di segno è dovuto alla radice. Integriamo la funzione $f(z)$ lungo la curva Γ che circonda il taglio e si chiude all'infinito, percorsa in senso antiorario. Per il lemma di Jordan, questo integrale è

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2I + 2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x^2+1)} \quad ,$$

dove I è l'integrale che dobbiamo calcolare. Di conseguenza, l'integrale che dobbiamo calcolare è la metà della parte reale dell'integrale di $f(z)$ lungo Γ, che calcoliamo usando il teorema dei residui. La funzione $f(z)$ ha poli semplici in $z_1 = i$ e $z_2 = -i$. Data la determinazione che abbiamo scelto per la funzione, dobbiamo prendere per z_1 e z_2 le determinazioni

$$z_1 = e^{\frac{i\pi}{2}} \qquad z_2 = e^{\frac{3i\pi}{2}} \quad .$$

Di conseguenza troviamo

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \left[\frac{\ln z_1}{z_1^{\frac{1}{2}} 2i} - \frac{\ln z_2}{z_2^{\frac{1}{2}} 2i}\right] = \frac{\pi^2 i}{2}\left[e^{-\frac{i\pi}{4}} - 3e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right] \quad .$$

Usando

$$e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \qquad e^{-\frac{3i\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

si ottiene

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \frac{2\pi^2 i}{\sqrt{2}} - \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}$$

da cui, prendendo metà della parte reale,

$$I = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \quad .$$

Il risultato è consistente col fatto che la parte immaginaria fornisce

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x^2+1)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

come si può indipendentemente calcolare.

2. Per $\beta = 1$ abbiamo che i punti di diramazione sono ia e $-ia$. Siccome la funzione è negativa per z reale a destra del taglio, abbiamo $f(0^+) = -\frac{1}{8a}$. Se ci spostiamo a destra del taglio lungo l'asse immaginario positivo, la funzione rimane negativa e decresce fino ad azzerarsi nel punto di diramazione ia. Possiamo prendere $z = ia + \epsilon e^{i\theta}$ con ϵ infinitesimo, e scrivere, al primo ordine in ϵ,

$$f(ia + \epsilon e^{i\theta}) = \frac{\sqrt{2\epsilon a}}{7a^2} e^{\frac{i\pi}{4}} e^{\frac{i\theta}{2}}$$

e siccome vogliamo $f(z)$ negativa sotto ia a destra del taglio dobbiamo scegliere per questo punto $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Ruotando quindi in senso antiorario di π per aggirare il punto di diramazione arriviamo a $\theta = \frac{5\pi}{2}$, corrispondente a un valore immaginario negativo per la funzione. Di conseguenza, proseguendo al punto $2ia$ troviamo

$$f(2ia) = -\frac{\sqrt{3}i}{4a} \quad .$$

Se $\beta = -1$, i punti di diramazione sono a e $-a$. Siccome la funzione è immaginaria negativa in $2ia$, questo significa che rimane immaginaria negativa se ci avviciniamo al taglio lungo l'asse immaginario positivo, ovvero $f(i0^+) = -\frac{i}{8a}$. Se ci muoviamo sopra il taglio fino ad essere infinitesimamente vicini al punto a, abbiamo

$$f(a + \epsilon e^{i\theta}) = \frac{\sqrt{2a\epsilon}}{9a^2} e^{\frac{i\theta}{2}}$$

e quindi per avere un valore immaginario negativo scegliamo $\theta = -\pi$. Se ora ruotiamo di π in senso orario per aggirare il punto di diramazione troviamo un valore reale negativo. Quindi la funzione resta reale negativa lungo tutto l'asse reale positivo per x maggiore di a, e quindi anche per x che va all'infinito. Per calcolare il residuo all'infinito dobbiamo calcolare il residuo in $w = 0$ della funzione

$$g(w) = -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) \quad .$$

Per quello che abbiamo detto, la funzione intorno a $w = 0$ è

$$g(w) = -\frac{1}{w^2}\left(-w\frac{\sqrt{1-a^2w^2}}{1+8a^2w^2}\right)$$

da cui si vede facilmente che il residuo in $w = 0$ è $+1$.

3. Dobbiamo calcolare

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ipx}}{\cosh x} \mathrm{d}x \quad .$$

Considerando la funzione

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ipz}}{\cosh z}$$

sui complessi, notiamo che questa ha poli semplici sull'asse immaginario per

$$z_k = \frac{i\pi}{2}(2k+1) \quad .$$

Possiamo considerare quindi l'integrale di questa funzione lungo un rettangolo Γ che unisce $-R$ a R, sull'asse reale, poi va da R a $R + i\pi$, poi da $R + i\pi$ a $-R + i\pi$ e infine da $-R + i\pi$ a $-R$. Nel limite $R \to \infty$ gli integrali sui segmenti verticali vanno a zero, e quindi

$$\int_\Gamma g(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ipx}}{\cosh x}\mathrm{d}x - \frac{e^{p\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ipx}}{\cosh(x + i\pi)}\mathrm{d}x \quad .$$

Osservando poi che $\cosh(x+i\pi) = -\cosh x$, otteniamo

$$\int_\Gamma g(z)\mathrm{d}z = (1+e^{p\pi})\hat{f}(p) \quad .$$

Calcoliamo l'integrale usando il teorema dei residui, osservando che la curva circonda solo il polo semplice $z_0 = \frac{i\pi}{2}$. Otteniamo

$$\int_\Gamma g(z)\mathrm{d}z = i\sqrt{2\pi}\frac{e^{-ipz_0}}{\sinh z_0} = \sqrt{2\pi}e^{\frac{p\pi}{2}} \quad ,$$

da cui

$$\hat{f}(p) = \sqrt{2\pi}\frac{e^{\frac{p\pi}{2}}}{1+e^{p\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cosh\left(\frac{p\pi}{2}\right)} \quad .$$

Osserviamo che lo stesso calcolo si può effettuare aggirando un numero arbitrario di poli. In particolare su può effettuare aggirando un numero infinito di poli. Prendendo $p < 0$, possiamo per il lemma di Jordan chiudere l'integrale sul semipiamo superiore, aggirando quindi tutti i poli con $k \geq 0$. Troviamo

$$\hat{f}(p) = i\sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{Res}_{z=z_k}\frac{e^{-ipz}}{\cosh z} = i\sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{\frac{p\pi}{2}(2k+1)}}{\sinh\left(\frac{i\pi}{2}(2k+1)\right)} \quad .$$

Abbiamo

$$\sinh\left(\frac{i\pi}{2}(2k+1)\right) = i(-1)^k$$

e quindi

$$\hat{f}(p) = \sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{\frac{p\pi}{2}(2k+1)} \quad .$$

Per $p < 0$ la serie converge e si trova

$$\hat{f}(p) = \sqrt{2\pi}e^{\frac{p\pi}{2}}\frac{1}{1+e^{p\pi}}$$

ovvero

$$\hat{f}(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cosh\left(\frac{p\pi}{2}\right)} \quad .$$

Analogamente lo stesso risultato si trova per $p > 0$, nel qual caso bisogna chiudere sul semipiano inferiore e sommare sui poli con $k < 0$.

4. Si può risolvere il sistema risolvendo un'equazione alla volta e inserendo la soluzione nell'equazione successiva. Ad esempio dalla prima equazione si trova
$$y_1(x) = e^{4x} \quad ,$$
sostituendo nella terza si trova
$$y_3(x) = (5x-1)e^{4x}$$
e infine sostituendo nella seconda si trova
$$y_2(x) = 3e^{x} + (5x-2)e^{4x} \quad .$$
Alternativamente, si può considerare l'equazione
$$\underline{y}'(x) = A\underline{y}(x)$$
dove A è la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad ,$$
la cui soluzione è
$$\underline{y}(x) = e^{Ax}\underline{y}_0$$
dove
$$\underline{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad .$$
La matrice Ax ha autovalori x e $4x$, e si possono facilmente trovare gli operatori spettrali
$$P_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{4x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J_{4x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5x & 0 & 0 \\ 5x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
da cui si trova
$$e^{Ax} = e^{x}P_x + e^{4x}(P_{4x} + J_{4x})$$
e sostituendo si trova la soluzione.