MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni dell'esame del 13 settembre 2018

1. Essendo l'integrando una funzione pari, possiamo scrivere

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Estendendo l'integrale sui complessi, il primo termine si può chiudere sul semipiano superiore, mentre il secondo sul semipiano inferiore. L'integrando ha due poli doppi, per $z=\pm i$, e per il primo termine dobbiamo considerare solo il polo $z=i$ e per il secondo solo il polo $z=-i$. Quindi abbiamo

$$I = \frac{\pi i}{2}\mathrm{Res}_{z=i}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} - \frac{\pi i}{2}\mathrm{Res}_{z=-i}\frac{e^{-iz}}{(z^2+1)^2}$$

dove il segno $-$ nel secondo termine è dovuto al fatto che la seconda curva è percorsa in senso orario. Otteniamo

$$I = \frac{\pi i}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}|_{z=i} - \frac{\pi i}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{e^{-iz}}{(z-i)^2}|_{z=-i}$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left[\frac{ie^{iz}}{(z+i)^2} - \frac{2e^{iz}}{(z+i)^3}\right]_{z=i} - \frac{\pi i}{2}\left[\frac{-ie^{iz}}{(z-i)^2} - \frac{2e^{-iz}}{(z-i)^3}\right]_{z=-i}$$

Sostituendo si ottiene

$$I = \frac{\pi}{2e}$$

2. Abbiamo

$$z^2 - 2z - 3 = (z+1)(z-3)$$

da cui si ottiene

$$f(z) = -\frac{z}{4}\left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-3}\right]$$

Espandiamo il primo termine in $\frac{1}{z}$ e il secondo in z.

$$f(z) = -\frac{z}{4}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}\right]$$

$$= -\frac{z}{4}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n\right]$$

ovvero

$$f(z) = -\frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{0}(-)^n z^n - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$$

3. Definiamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} e & i \\ 0 & -e \end{pmatrix}$$

La matrice ha autovalori $\lambda_1 = e$ e $\lambda_2 = -e$. Il risolvente è

$$R_z(B) = \frac{1}{z^2 - e^2}\begin{pmatrix} z+e & i \\ 0 & z-e \end{pmatrix}$$

da cui si ottengono i proiettori

$$P_e = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{2e} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{-e} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2e} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$A = \ln\, B = \ln\, e\ P_e + \ln(-e)\ P_{-e}$$

Una possibile determinazione è

$$A = P_e + (1+\pi i)P_{-e} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\pi}{2e} \\ 0 & 1+\pi i \end{pmatrix}$$

4. Per $x \neq 1$ l'equazione ha soluzione

$$y(x) = ae^{-\frac{x^2}{2}}$$

Scriviamo quindi

$$y(x) = a_+ e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x > 1$$
$$y(x) = a_- e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x < 1$$

Determiniamo le costanti a_+ e a_- imponendo

$$\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} y'(x)\ \mathrm{d}x = 1$$

ovvero

$$(a_+ - a_-)e^{-\frac{1}{2}} = 1$$

da cui

$$a_+ = a_- + e^{\frac{1}{2}}$$

Imponendo $y(0) = 1$ otteniamo

$$a_- = 1$$

Quindi la soluzione è

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[1 + e^{\frac{1}{2}} \theta(x-1)\right]$$