MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni dell'esame del 15 novembre 2018

1. Abbiamo $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$. Quindi dobbiamo calcolare

$$I = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z}\,\mathrm{d}z$$

dove γ è la retta parallela all'asse y e passante per $x = 1$ e percorsa dal basso verso l'alto. Risolviamo entrambi gli integrali usando il lemma di Jordan e il teorema dei residui. Il primo integrale può essere chiuso a sinistra, ovvero per grandi x negativi, mentre il secondo a destra, ovvero per grandi x positivi. Solo nel primo caso la curva chiusa che si ottiene contiene il polo $z = 0$, quindi solo il primo integrale fornisce un risultato diverso da zero. Il risultato è

$$I = \frac{1}{2}2\pi i\ \mathrm{Res}_{z=0}\frac{e^z}{z} = \pi i$$

2. Per calcolare l'integrale prendiamo il taglio della funzione $\ln\, z$ lungo l'asse reale positivo e scegliamo la determinazione tale che la funzione è $\ln x$ sopra il taglio e $\ln x + 2\pi i$ sotto il taglio. Sfruttiamo la discontinuità della funzione $(\ln\, z)^2$ lungo l'asse reale positivo:

$$(\ln\, z)^2|_+ - (\ln\, z)^2|_- = (\ln\, x)^2 - (\ln\, x + 2\pi i)^2 = -4\pi i\ \ln\, x + 4\pi^2$$

Consideriamo quindi l'integrale

$$I' = \int_\gamma \frac{(\ln\, z)^2}{(z+1)^2}\,\mathrm{d}z$$

lungo la curva chiusa γ che circonda l'asse reale positivo e si chiude all'infinito. Questo integrale si calcola usando il teorema dei residui. La funzione integranda ha un polo doppio in $z = -1$ all'interno della curva. Quindi

$$I' = 2\pi i\ \mathrm{Res}_{z=-1}\,\frac{(\ln\, z)^2}{(z+1)^2} = 2\pi i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln\, z)^2|_{z=-1} = 4\pi i\frac{\ln\, z}{z}|_{z=-1}$$

La determinazione del logaritmo è tale che $\ln(-1) = \pi i$, quindi

$$I' = 4\pi^2$$

Dalla discontinuità della funzione $(\ln z)^2$ abbiamo poi

$$I' = -4\pi i \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+1)^2}\, \mathrm{d}x + 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$$

Il primo termine a destra è l'integrale I che vogliamo calcolare per un fattore $-4\pi i$, mentre il secondo termine a destra si sa calcolare, e il risultato è

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$$

Mettendo tutto insieme otteniamo

$$-4\pi i\; I = I' - 4\pi^2 = 0$$

Quindi $I = 0$.

3. La serie di Fourier è

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

dove

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\; x(x-2\pi)\cos(nx) \qquad n \geq 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\; x(x-2\pi)\sin(nx) \qquad n > 0$$

La funzione di cui vogliamo calcolare lo sviluppo è pari, per cui $b_n = 0$. Eseguendo gli integrali otteniamo

$$a_0 = -\frac{4}{3}\pi^2 \qquad a_n = \frac{4}{n^2} \quad n > 0$$

da cui

$$f(x) = -\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

La serie converge alla funzione in $x = 0$ perché la funzione è continua in $x = 0$. Ponendo $x = 0$ nella serie si ottiene

$$0 = -\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4. Vogliamo risolvere l'equazione differenziale

$$Af(x) = \lambda f(x)$$

Otteniamo

$$f(x) = a \exp\left(-i\int_0^x \mathrm{d}y\ (\cos y - \lambda)\right) = a \exp\left(-i \sin x + i\lambda x\right)$$

dove a è una costante. Abbiamo

$$f(0) = a \qquad f(\pi) = a\ e^{i\pi\lambda}$$

Vogliamo $f(\pi) = -f(0)$, per cui $e^{i\pi\lambda} = -1$, la cui soluzione è

$$\lambda = \lambda_k = 1 + 2k \qquad k \in \mathbb{Z}$$