MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni dell'esame del 18 giugno 2019 - Canale N-Z

1. Scrivendo $z = e^{i\theta}$, dobbiamo calcolare

$$I = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{iz} \frac{z^2 + z^{-2}}{2} \frac{1}{\frac{z-z^{-1}}{2i} + 2}$$

dove γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1 sul piano complesso percorsa in senso antiorario. Manipolando l'integrale troviamo

$$I = \int_\gamma \frac{z^4 + 1}{z^2} \frac{1}{z^2 + 4iz - 1} \mathrm{d}z$$

Calcoliamo l'integrale usando il teorema dei residui. L'integrando ha un polo doppio in $z = 0$, e due poli semplici in

$$z_\pm = i(-2 \pm \sqrt{3})$$

Solamente $z = z_+$ è dentro la circonferenza. Otteniamo

$$\mathrm{Res}_{z=0} \left(\frac{z^4 + 1}{z^2} \frac{1}{z^2 + 4iz - 1} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z^4 + 1}{z^2 + 4iz - 1} |_{z=0} = -4i$$

$$\mathrm{Res}_{z=z_+} \left(\frac{z^4 + 1}{z^2} \frac{1}{z^2 + 4iz - 1} \right) = \frac{z_+^4 + 1}{z_+^2 (z_+ - z_-)} = \frac{7i}{\sqrt{3}}$$

Per il teorema dei residui troviamo quindi

$$I = 2\pi \left(4 - \frac{7}{\sqrt{3}} \right)$$

2. La funzione $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z^2+8)}$ ha poli semplici in $z = 0$ e $z = \pm 2\sqrt{2}i$. Solamente $z = 0$ è dentro la curva. Abbiamo quindi

$$I = 2\pi i \ \mathrm{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2(z^2 + 8)} = 2\pi i \ \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z(z^2 + 8)} = \frac{i\pi}{4}$$

3. La matrice ha autovalori $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 4$ con molteplicità algebrica 1. Entrambi gli autovalori hanno molteplicità geometrica 1. L'operatore risolvente è

$$R_z(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z+1} & \frac{1}{(z+1)^2} & \frac{1}{(z+1)^2(z-4)} \\ 0 & \frac{1}{z+1} & \frac{1}{(z+1)(z-4)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z-4} \end{pmatrix}$$

Otteniamo gli operatori spettrali

$$P_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{25} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{25} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$f(A) = f(-1)P_{-1} + f'(-1)J_{-1} + f(4)P_4$$

Quindi

$$A^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}}P_{-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(-1)^{\frac{1}{2}}}J_{-1} + 4^{\frac{1}{2}}P_4$$

Con la determinazione assegnata per la funzione $z^{\frac{1}{2}}$, abbiamo

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = -i$$

Quindi

$$A^{\frac{1}{2}} = -iP_{-1} + \frac{i}{2}J_{-1} + 2P_4$$

4. Abbiamo

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

con
$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x e^{-inx} f(x)$$
Troviamo
$$c_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sinh \pi \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$
I coefficienti della serie in forma trigonometrica sono
$$a_0 = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \qquad a_n = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \qquad b_n = 0$$
Scriviamo
$$f(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos(nx)$$
Dal momento che la funzione è continua e ha derivata continua per $x \neq (2k+1)\pi$, abbiamo convergenza puntuale per ogni x. In particulare in $x = 0$ abbiamo
$$1 = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$
da cui troviamo
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1 \right)$$

5. Usando
$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$
l'equazione si riscrive
$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = \delta(x-2)$$
Cerchiamo soluzioni dell'equazione omogenea nella forma $y(x) = x^\alpha$. Troviamo
$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 2$$
Scriviamo quindi
$$y(x) = \begin{cases} A_- x + B_- x^2 & 1 \leq x < 2 \\ A_+ x + B_+ x^2 & x > 2 \end{cases}$$

La continuità della funzione in $x = 2$ fornisce

$$A_+ + 2B_+ = A_- + 2B_-$$

mentre la discontinuità della derivata è

$$A_+ + 4B_+ - A_- - 4B_- = \frac{1}{4}$$

Infine le condizioni iniziali forniscono

$$A_- + B_- = 1 \qquad A_- + 2B_- = 1$$

ovvero

$$A_- = 1 \qquad B_- = 0$$

da cui si ricava

$$A_+ = \frac{3}{4} \qquad B_+ = \frac{1}{8}$$

La soluzione è quindi

$$y(x) = x + \theta(x-2)\left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2\right)$$