MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni dell'esame del 21 gennaio 2019

1. Scriviamo
$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-2}\right)$$
Abbiamo poli semplici in $z = -1$ e $z = 2$, per cui gli anelli di convergenza delle serie di Laurent sono $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ e $|z| > 2$. Il primo sviluppo, per $|z| < 1$, è lo sviluppo di Taylor
$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-)^n - \frac{1}{2^n}\right) z^n$$
Nell'anello $1 < |z| < 2$ scriviamo
$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}(-)^n z^n$$
e quindi
$$f(z) = -\frac{1}{3}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}(-)^n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}z^n\right)$$
Infine per $|z| > 2$ scriviamo anche
$$\frac{2}{z-2} = \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2^n}z^n$$
e quindi
$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left((-)^n - \frac{1}{2^n}\right) z^n$$

2. Dobbiamo calcolare
$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\cos\, x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

Dato che l'integrando è pari, possiamo scrivere

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4} \, \mathrm{d}x$$

Scriviamo quindi

$$I = \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4} \, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+4} \, \mathrm{d}x \right)$$

Considerando gli integrali nel piano complesso, possiamo chiudere il primo sul piano complesso superiore e il secondo sul piano complesso inferiore. L'integrando ha due poli semplici in $z_1 = 2i$ e $z_2 = -2i$, e quindi il primo integrale contiene solo il polo z_1 e il secondo solo il polo z_2. Considerando che la prima curva è percorsa in senso antiorario e la seconda in senso orario, per il teorema dei residui si ottiene

$$I = \frac{2\pi i}{4} \left(\mathrm{Res}_{z=2i} \frac{e^{iz}}{z^2+4} - \mathrm{Res}_{z=-2i} \frac{e^{-iz}}{z^2+4} \right) = \frac{\pi e^{-2}}{4}$$

3. Il risolvente di A è la matrice

$$R_z(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} & \frac{z}{(z-1)^3} \\ 0 & \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z-1} \end{pmatrix}$$

La formula di Dunford ci dice che

$$e^A = \frac{1}{2\pi i} \int \mathrm{d}z \; e^z \; R_z(A)$$

dove la curva di integrazione circonda l'unico autovalore $z = 1$. Dobbiamo quindi calcolare i residui

$$\mathrm{Res}_{z=1} \frac{e^z}{z-1} = e$$

$$\mathrm{Res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z|_{z=1} = e$$

$$\mathrm{Res}_{z=1} \frac{ze^z}{(z-1)^3} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} (ze^z)|_{z=1} = \frac{3}{2} e$$

Abbianmo quindi

$$e^A = \begin{pmatrix} e & e & \frac{3}{2}e \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Lo stesso risultato si ottiene calcolando gli operatori spettrali

$$P_1^k = \frac{1}{2\pi i} \int \mathrm{d}z \ R_z(A)(z-1)^k$$

dove di nuovo la curva di integrazione circonda l'unico autovalore $z = 1$. Si ottiene

$$P_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ovviamente dal momento che l'autovalore è unico)

$$P_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(che giustamente soddisfa $(P_1^1)^2 = P_1^2$). Abbiamo quindi

$$e^A = eP_1^0 + eP_1^1 + \frac{1}{2}eP_1^2$$

da cui si ritrova il risultato precedente (solo uno a scelta dei due metodi era richiesto).

4. Abbiamo

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-ipx} \ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-ipx} \ \mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-x} e^{-ipx} \ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-ip} e^{x-ipx}|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-1-ip} e^{-x-ipx}|_{0}^{+\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1 - ip} + \frac{1}{1 + ip} \right)$$

Il risultato è

$$\hat{f}(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + p^2}$$

5. Cerchiamo la soluzione dell'equazione omogemea nella forma $y(x) = x^\alpha$. Troviamo $\alpha^2 - 1 = 0$, da cui $\alpha = \pm 1$. Quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$y_1(x) = x \qquad y_2(x) = \frac{1}{x}$$

Cerchiamo poi la soluzione particolare $y_p(x) = cx^\beta$. Sostituendo troviamo $\beta = 2$ e $c = \frac{1}{3}$. La soluzione più generale è quindi

$$y(x) = ax + \frac{b}{x} + \frac{1}{3}x^2$$

Le condizioni $y(1) = y'(1) = 0$ hanno come soluzione $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{6}$, da cui si trova

$$y(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6x} + \frac{1}{3}x^2$$