MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni dell'esame del 26 giugno 2018

1. Dobbiamo calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \, \frac{\sin^2\theta}{2 + \cos\theta}$$

Effettuiamo il cambio di variabile

$$z = e^{i\theta} \qquad \mathrm{d}\theta = -i\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

da cui si ottiene

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Sostituendo otteniamo

$$I = \frac{i}{4}\int_{\Gamma_{0,1}} \frac{\mathrm{d}z}{z} \frac{\left(z - \frac{1}{z}\right)^2}{2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{i}{2}\int_{\Gamma_{0,1}} \mathrm{d}z \frac{\left(z^2 - 1\right)^2}{z^2\left(z^2 + 4z + 1\right)}$$

dove $\Gamma_{0,1}$ è il cerchio centrato in $z = 0$ di raggio unitario percorso in senso antiorario. Per calcolare l'integrale dobbiamo trovare i poli dell'integrando. Innanzitutto osserviamo che l'integrando ha un polo doppio in $z = 0$. Abbiamo poi che gli zeri di $z^2 + 4z + 1$ sono

$$z_1 = -2 + \sqrt{3} \qquad z_2 = -2 - \sqrt{3}$$

Di questi due punti, solo z_1 si trova dentro $\Gamma_{0,1}$. Utilizzando il teorema dei residui, abbiamo quindi che

$$I = -\pi \left[\mathrm{Res}_{z=0} \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+4z+1\right)} + \mathrm{Res}_{z=z_1} \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+4z+1\right)} \right]$$

Abbiamo che il primo residuo è (formula per polo doppio)

$$\mathrm{Res}_{z=0} \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+4z+1\right)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\left(z^2-1\right)^2}{\left(z^2+4z+1\right)} \bigg|_{z=0} = -4$$

Il secondo residuo è

$$\mathrm{Res}_{z=z_1} \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+4z+1\right)} = \frac{\left(z_1^2-1\right)^2}{z_1^2\left(z_1-z_2\right)}$$

Abbiamo $z_1 z_2 = 1$, per cui

$$\mathrm{Res}_{z=z_1} \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+4z+1\right)} = \frac{\left(z_1^2-1\right)^2}{z_1^2\left(z_1-z_2\right)} = \frac{1}{z_1} \frac{\left(z_1^2-1\right)^2}{z_1^2-1} = z_1 - \frac{1}{z_1}$$

Ma $\frac{1}{z_1} = z_2$, quindi

$$\mathrm{Res}_{z=z_1} \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+4z+1\right)} = z_1 - z_2 = 2\sqrt{3}$$

Unendo i risultati si trova

$$I = -\pi \left[-4 + 2\sqrt{3}\right] = 2\pi \left[2 - \sqrt{3}\right]$$

2. La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3$$

dove il primo autovalore ha molteplicità algebrica 2 e il secondo molteplicità algebrica 1. Determiniamo gli autovettori. Per λ_1 abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ovvero otteniamo il sistema

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ 2b + c = 0 \\ c = c \end{cases}$$

Le prime due equazioni danno $b = c = 0$, mentre a non è determinato. Quindi l'unico autovettore è

$$|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per λ_2 abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ovvero otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -2a + b + c = 0 \\ c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo l'autovettore

$$|\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il fatto che l'autospazio di λ_1 ha dimensione 1 implica che la matrice non è diagonalizzabile.

Calcoliamo l'operatore risolvente $R_z(A) = (z\mathbb{I} - A)^{-1}$. Si trova

$$R_z(A) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} \begin{pmatrix} (z-1)(z-3) & z-1 & z-2 \\ 0 & (z-1)^2 & z-1 \\ 0 & 0 & (z-1)(z-3) \end{pmatrix}$$

Dalle formule per i proiettori troviamo quindi

$$P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si può verificare che

$$\mathbb{I} = P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2} \qquad A = \lambda_1 P_{\lambda_1} + \lambda_2 P_{\lambda_2} + J_{\lambda_1}$$

Dobbiamo calcolare $f(A) = \ln(-A)$. Usiamo la formula

$$f(A) = f(\lambda_1)P_{\lambda_1} + f(\lambda_2)P_{\lambda_2} + f'(\lambda_1)J_{\lambda_1}$$

La funzione $\ln(-z)$ è

$$f(z) = \ln(-z) = \ln(z) + i\pi$$

Siccome $f(z)$ è reale per z reali negativi, questo significa che siamo sul foglio di Riemann in cui la determinazione per z reali negativi è $z = \rho e^{-i\pi}$. Siccome il taglio è lungo il semiasse immaginario positivo, per andare sull'asse reale positivo dobbiamo ruotare di π in senso orario, e quindi la determinazione per z reali positivi è $z = \rho$. Ovvero

$$f(z) = \ln\rho + i\pi$$

per z reale positivo. Quindi

$$f(\lambda_1) = i\pi \quad f(\lambda_2) = \ln 3 + i\pi \quad f'(\lambda_1) = 1$$

Di conseguenza

$$\ln(-A) = i\pi P_{\lambda_1} + (\ln 3 + i\pi)P_{\lambda_2} + J_{\lambda_1}$$

3. Dobbiamo risolvere l'equazione differenziale

$$if'(x) + (x - \lambda)f(x) = 0$$

La soluzione è

$$f(x) = f(-1)\exp\left(i\int_{-1}^{x} \mathrm{d}t(t-\lambda)\right) = f(-1)\exp\left[i\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} - \lambda(x+1)\right)\right]$$

Abbiamo

$$f(1) = f(-1)e^{-2\lambda i}$$

e quindi $f(1) = f(-1)$ implica

$$\lambda = \lambda_k = k\pi$$

dove k è un qualsiasi intero. Gli autovalori sono quindi λ_k e le autofunzioni sono le soluzioni dell'equazione differenziale con $\lambda = \lambda_k$.

L'operatore T è autoaggiunto se

$$(f, Tg) = (Tf, g)$$

e se il dominio dell'operatore aggiunto non può essere esteso. Abbiamo

$$(f, Tg) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \bar{f}(x) \left(ig'(x) + xg(x)\right)$$

Il secondo termine è chiaramente autoaggiunto. Integriamo per parti il primo termine:

$$i\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \bar{f}(x) g'(x) = i[\bar{f}(x)g(x)]_{-1}^{1} - i\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \bar{f}'(x) g(x)$$

Affinché il primo termine sia nullo è necessario che sia f che g siano nel dominio di T. Se questo succede otteniamo

$$i \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \bar{f}(x) g'(x) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \ \overline{i f'}(x) g(x)$$

e quindi l'operatore è autoaggiunto.