MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni esame scritto del 27 novembre 2019 - Canale N-Z

1. Consideriamo la funzione polidroma $f(z) = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2-1}$. Scegliamo il taglio lungo l'asse immaginario positivo, e scegliamo la determinazione della radice cubica tale che $z^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{i\pi}{6}}\sqrt[3]{\rho}$ (che è la determinazione della funzione che dobbiamo integrare) a sinistra del taglio. Integriamo la funzione lungo un cammino che va da 0 a $i\infty$ a sinistra del taglio, gira all'infinito in senso antiorario e va da $i\infty$ a 0 a destra del taglio. L'integrale di $f(z)$ lungo questa curva è uguale a
$$(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}})I \quad .$$
Per il teorema dei residui questo integrale è anche uguale a
$$2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=-1} f(z) + \mathrm{Res}_{z=1} f(z)\right) \quad ,$$
dove $z_1 = -1$ e $z_2 = 1$ sono i poli (semplici) di $f(z)$. Per calcolare i residui dobbiamo prendere la determinazione giusta nel foglio di Riemann in cui siamo, ovvero
$$z_1 = e^{i\pi} \qquad z_2 = e^{2i\pi} \quad .$$
Infatti abbiamo $z = e^{\frac{i\pi}{2}}\rho$ a sinistra del taglio (la determinazione che abbiamo scelto) e per rimanere sullo stesso foglio di Riemann dobbiamo girare in senso antiorario. Si ottiene quindi
$$2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=-1} f(z) + \mathrm{Res}_{z=1} f(z)\right) = 2\pi i \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{-2} + \frac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{2}\right)$$
Quindi
$$I = \pi i \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{\frac{\pi i}{3}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}} = -\pi i e^{\frac{\pi i}{6}} \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{3}} \quad ,$$
ovvero
$$I = -\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \quad .$$

2. Abbiamo $I_n = I_{-n}$. Possiamo quindi prendere $n \geq 0$. Scriviamo poi
$$I_n = \mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{5 + 3\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta\right)$$

Calcoliamo quindi per $n \geq 0$ l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{5+3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = -2i \int_{C_1} \frac{z^n\,\mathrm{d}z}{3z^2+10z+3}$$

di cui prenderemo la parte reale. In questo modo non abbiamo poli in $z=0$. Il denominatore ha zeri in $z_1 = -\frac{1}{3}$ e $z_2 = -3$. L'unico polo dentro il cerchio è $z = z_1$. Quindi si ottiene

$$\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

che è reale. Quindi, per ogni n intero,

$$I_n = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{|n|} \quad .$$

Se non ci fossimo accorti di questo trucco per non avere il polo in $z=0$, avremmo anche potuto calcolare direttamente, per $n \geq 0$,

$$-i\int_{C_1} \frac{(z^n+z^{-n})\,\mathrm{d}z}{3z^2+10z+3} \quad .$$

In questo caso il primo termine è metà dell'integrale di prima, quindi è uguale a

$$\frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad .$$

Il secondo termine invece ha poli sia in z_1 che in zero. Il residuo il z_1 fornisce

$$\frac{\pi}{4}(-3)^n$$

mentre il residuo in zero fornisce

$$\frac{2\pi}{3}\mathrm{Res}_{z=0}\frac{1}{z^n(z-z_1)(z-z_2)} \quad .$$

Abbiamo

$$\mathrm{Res}_{z=0}\frac{1}{z^n(z-z_1)(z-z_2)} = \mathrm{Res}_{z=0}\frac{1}{z^n}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{z}{3}\right)^m\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\,(3z)^p$$

Il coefficiente del termine z^{-1} (ovvero il residuo) è

$$(-1)^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2m-n+1} = (-3)^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^{m} = (-3)^{n-1}\frac{9}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n}\right)$$

Quindi tornando all'integrale il contributo del residuo in zero è

$$-\frac{\pi}{4}(-3)^n\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right) \quad .$$

Sommando al termine che viene dal residuo in z_1 si ottiene

$$\frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

che sommato al primo integrale dà

$$\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

che è lo stesso risultato di prima.

3. La matrice A^3 ha autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 5$. Il risolvente è

$$(z\mathbb{I} - A^3)^{-1} = \frac{1}{(z+1)(z-5)}\begin{pmatrix} z-3 & 2 \\ 4 & z-1 \end{pmatrix}$$

da cui si ricavano i proiettori

$$P_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ & \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad P_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad .$$

Quindi

$$A^3 = (-1)P_{-1} + 5P_5 \quad .$$

Quindi

$$A = (-1)^{\frac{1}{3}}P_{-1} + (5)^{\frac{1}{3}}P_5$$

e tutte le possibili determinazioni della radice cubica sono soluzioni. Abbiamo quindi in tutto nove matrici:

$$A_1 = e^{\frac{\pi i}{3}}P_{-1} + \sqrt[3]{5}P_5 \quad A_2 = -P_{-1} + \sqrt[3]{5}P_5 \quad A_3 = e^{\frac{5\pi i}{3}}P_{-1} + \sqrt[3]{5}P_5$$

$$A_4 = e^{\frac{\pi i}{3}}P_{-1} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\sqrt[3]{5}P_5 \quad A_5 = -P_{-1} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\sqrt[3]{5}P_5 \quad A_6 = e^{\frac{5\pi i}{3}}P_{-1} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\sqrt[3]{5}P_5$$

$$A_7 = e^{\frac{\pi i}{3}}P_{-1} + e^{\frac{4\pi i}{3}}\sqrt[3]{5}P_5 \quad A_8 = -P_{-1} + e^{\frac{4\pi i}{3}}\sqrt[3]{5}P_5 \quad A_9 = e^{\frac{5\pi i}{3}}P_{-1} + e^{\frac{4\pi i}{3}}\sqrt[3]{5}P_5$$

4. L'equazione omogenea è un'equazione di Eulero, le cui soluzioni sono

$$y_1(x) = x^{-1} \qquad y_2(x) = x^5 \quad .$$

Per $x \leq 2$ il problema è omogeneo, mentre per $x > 2$ cerchiamo la soluzione particolare nella forma $y_p(x) = \alpha x^\beta$. Si trova

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}x^4 \quad .$$

Abbiamo quindi

$$y(x) = \begin{cases} ax^{-1} + bx^5 & 1 \leq x \leq 2 \\ cx^{-1} + dx^5 - \frac{1}{5}x^4 & x > 2 \end{cases} \quad .$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$a = -\frac{1}{6} \qquad b = \frac{1}{6} \; .$$

Per trovare c e d imponiamo in $x = 2$ la continuità della funzione e della derivata. Infatti in $x = 2$ abbiamo una discontinuità sulla derivata seconda, che vuol dire che la derivata prima è continua e ha una cuspide. Si ottiene

$$c = \frac{9}{10} \qquad d = \frac{1}{4}$$

e quindi la soluzione è

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}x^{-1} + \frac{1}{6}x^5 & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{9}{10}x^{-1} + \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{5}x^4 & x > 2 \end{cases} \quad .$$