MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Soluzioni dell'esame del 2 luglio 2019 - Canale N-Z

1. L'area dell'ellisse è data dalla formula

$$A = 2b \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \, \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Consideriamo sui complessi la funzione polidroma

$$f(z) = \frac{b}{a} \left(a^2 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

che ha punti di diramazione in $z = \pm a$, e scegliamo il taglio che unisce i punti $-a$ e a sull'asse reale. Scegliamo la determinazione della radice positiva per z reali tra $-a$ e a sopra il taglio (e negativa sotto il taglio). Abbiamo

$$A = \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z$$

dove γ circonda il taglio in senso orario. Calcoliamo l'integrale usando il teorema dei residui. L'integrale è dato da $2\pi i$ per la somma di tutti i residui fuori dalla curva. La funzione non ha singolarità al finito, per cui l'unico contributo viene dal residuo all'infinito. Per calcolare il residuo all'infinito, dobbiamo capire la determinazione della radice per $z \to \infty$. Possiamo ad esempio studiare la funzione per z reali positivi maggiori di a. Per fare questo prendiamo $z = a + \epsilon e^{i\theta}$ con ϵ infinitesimo e ruotiamo intorno al punto di diramazione $z = a$ sul semipiano superiore. Troviamo che la funzione è immaginaria negativa per z reali a destra del taglio. Quindi, considerando

$$f(1/w) = \frac{b}{a} \frac{1}{w} (a^2 w^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

per w intorno a zero dobbiamo prendere

$$f(1/w) = -i \frac{b}{a} \frac{1}{w} \sqrt{1 - a^2 w^2}$$

dove la radice è positiva. Abbiamo

$$A = 2\pi i \mathrm{Res}_{w=0}\left(-\frac{1}{w^2}f(1/w)\right)$$

Per determinare il residuo, conviene sviluppare la radice intorno a $w = 0$,

$$\sqrt{1-a^2w^2} = 1 - \frac{1}{2}a^2w^2 + ...$$

da cui si trova che il residuo è $-\frac{i}{2}ab$, ovvero

$$A = \pi ab \quad .$$

2. Scriviamo

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{\sin(2x)}{x^2+x+1}$$

ovvero

$$I = \frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{e^{2ix}}{x^2+x+1} - \frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{e^{-2ix}}{x^2+x+1}$$

Consideriamo gli integrali sul piano complesso. Per il lemma di Jordan, possiamo chiudere il primo integrale sopra (verso antiorario) e il secondo sotto (verso orario). L'integrando ha poli semplici sul piano complesso per

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il primo integrale circonda solo il polo z_1, mentre il secondo circonda solo il polo z_2. Otteniamo

$$I = 2\pi i\frac{1}{4i}\mathrm{Res}_{z=z_1}\frac{e^{2iz}}{z^2+z+1} + 2\pi i\frac{1}{4i}\mathrm{Res}_{z=z_2}\frac{e^{-2iz}}{z^2+z+1}$$

Si trova

$$I = \frac{\pi}{2}\frac{e^{2iz_1}}{z_1-z_2} + \frac{\pi}{2}\frac{e^{-2iz_2}}{z_2-z_1} = \frac{\pi}{2i\sqrt{3}}\left(e^{-i-\sqrt{3}} - e^{i-\sqrt{3}}\right)$$

Ovvero

$$I = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}\sin 1 \quad .$$

3. La matrice A^2 è diagonalizzabile con autovalori

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = -1$$

L'operatore risolvente $R_z(A) = (z\mathbb{I} - A)^{-1}$ è

$$R_z(A) = \frac{1}{(z-2)(z+1)} \begin{pmatrix} z+2 & 2 \\ -2 & z-3 \end{pmatrix}$$

da cui si trovano i proiettori sugli autospazi dei corrispondenti autovalori

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad P_{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo

$$A^2 = 2P_2 - 1P_{-1}$$

Per trovare A il cui quadrato è questa matrice possiamo prendere la radice quadrata di entrambi gli autovalori con qualsiasi determinazione, ovvero otteniamo in tutto quattro matrici possibili:

$$A_1 = \sqrt{2}P_2 + iP_{-1}$$
$$A_2 = \sqrt{2}P_2 - iP_{-1}$$
$$A_3 = -\sqrt{2}P_2 + iP_{-1}$$
$$A_4 = -\sqrt{2}P_2 - iP_{-1}$$

4. Calcoliamo i coefficienti di Fourier c_n. Abbiamo per $n = 0$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi^2}{2}$$

mentre per $n \neq 0$

$$c_n = \frac{i\pi}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{n^2}[(-1)^n - 1]$$

da cui si ottiene

$$a_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$b_n = -\frac{(-1)^n}{n}$$

La serie è quindi

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2n+1)x\right)}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\left(nx\right)}{n}$$

La funzione è continua per $x \neq (2k+1)\pi$, per cui in questi punti la serie converge al valore della funzione. Per $x = \pi$ abbiamo una discontinuità

$$f(\pi^-) = \pi \qquad f(\pi^+) = 0$$

Qunidi la serie converge al valore medio, che è $\frac{\pi}{2}$, da cui si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad .$$

5. Vogliamo risolvere l'equazione differenziale

$$Tf = \lambda f$$

con le condizioni al bordo date. Troviamo

$$f(x) = f(0)e^{-i(e^x - 1 - \lambda x)}$$

e richiedendo $f(1) = f(0)$ si ottiene

$$e^{-i(e-1-\lambda)} = 1$$

Ovvero gli autovalori dell'operatore sono

$$\lambda_k = e - 1 + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \quad .$$