MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esercizi - A.A. 2017-18

settimana 1

Esercizi:

1. Dimostrare che

   $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

   $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

   $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$

2. Dimostrare, facendo il calcolo esplicito, che

   $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$

3. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

   $z^3 = -8$

4. Calcolare i limiti

   $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$

   lungo le due diagonali del piano complesso

Soluzioni:

1. Abbiamo:

   $|z_1 \cdot z_2| = |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| = |x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)|$
   $= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$
   $= |z_1| \cdot |z_2|$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\right| = \frac{|(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)|}{x_2^2+y_2^2} = \frac{|x_1x_2+y_1y_2+i(x_1y_2-y_1x_2)|}{x_2^2+y_2^2}$

$= \frac{\sqrt{(x_1x_2+y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2}}{x_2^2+y_2^2} = \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$|z_1 \pm z_2|^2 = (x_1 \pm x_2)^2 + (y_1 \pm y_2)^2$

$= x_1^2 + x_2^2 \pm 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 \pm 2y_1y_2$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2(x_1x_2 + y_1y_2)$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$

2. $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   $= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

   e analogamente per $\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

3. Le soluzioni sono

   $z_1 = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$

   $z_2 = 2e^{i\pi} = -2$

   $z_3 = 2e^{i5\pi/3} = 1 - i\sqrt{3}$

4. Lungo la diagonale $x = y$ il limite è

   $\frac{1-i}{1+i} = -i$

   mentre lungo la diagonale $x = -y$ il limite è

   $\frac{1+i}{1-i} = i$

settimana 2

Esercizi:

1. Data la funzione $g(z)$ che soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann intorno a z_0 e la funzione $f(z)$ che le soddisfa intorno a $g(z_0)$, dimostrare calcolando il limite del rapporto incrementale che la derivata rispetto a z calcolata in z_0 della funzione composta $(f \circ g)(z) = f(g(z))$ esiste.

2. Dimostrare che

   $\cosh(z) = \cos(iz)$

   $\cos(z) = \cosh(iz)$

   $\sinh(z) = -i\sin(iz)$

   $\sin(z) = -i\sinh(iz)$

3. Dimostrare che, data la funzione $f(z) = \tilde{u}(r,\theta) + i\tilde{v}(r,\theta)$, le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari sono

   $\partial_r \tilde{u} = \frac{1}{r}\partial_\theta \tilde{v} \qquad \partial_r \tilde{v} = -\frac{1}{r}\partial_\theta \tilde{u}$

4. Usando le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari, mostrare che qualsiasi determinazione della funzione logaritmo $f(z) = \ln(z)$ è analitica. Usare $0 \leq \theta < 2\pi$, tagliando il piano complesso lungo l'asse reale positivo.

5. Discutere le diverse determinazioni della funzione

   $f(z) = z^\alpha \quad , \qquad \alpha \in \mathbb{C}$

6. Trovare i punti di diramazione della funzione

   $f(z) = \sqrt{(z^2+1)(z^2+4)}$

   e in particolare mostrare se il punto all'infinito è o non è un punto di diramazione. Fare una scelta di tagli sul piano complesso.

Soluzioni:

1. Chiamiamo $h(z) = f(g(z))$. Vogliamo calcolare il limite per $\Delta z \to 0$ di

   $\frac{1}{\Delta z}\left[h(z + \Delta z) - h(z)\right] = \frac{1}{\Delta z}\left[f(g(z) + \Delta g) - f(g(z))\right]$

   La parti reale e immaginaria di f e g sono

   $g = u + iv \qquad f = \tilde{u} + i\tilde{v}$

   Le condizioni di Cauchy-Riemann per f e g sono

   $\partial_u \tilde{u} = \partial_v \tilde{v} \qquad \partial_v \tilde{u} = -\partial_u \tilde{v}$

   $\partial_x u = \partial_y v \qquad \partial_y u = -\partial_x v$

   Abbiamo:

   $f(g(z) + \Delta g) - f(g(z)) = \partial_u \tilde{u}\ \Delta u + \partial_v \tilde{u}\ \Delta v + i\partial_u \tilde{v}\ \Delta u + i\partial_v \tilde{v}\ \Delta v$

   con

   $\Delta u = \partial_x u\ \Delta x + \partial_y u\ \Delta y \qquad \Delta v = \partial_x v\ \Delta x + \partial_y v\ \Delta y$

   Sostituendo queste ultime relazioni e utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann otteniamo che il limite del rapporto incrementale è

   $\partial_u \tilde{u}\ \partial_x u + \partial_v \tilde{u}\ \partial_x v + i\ \partial_u \tilde{v}\ \partial_x u + i\ \partial_v \tilde{v}\ \partial_x v = \partial_u f\ \partial_x u + \partial_v f\ \partial_x v$

   Usando

   $\partial_v f = i\ \partial_v f$

   otteniamo che il limite è uguale a

   $\partial_u f\ (\partial_x u + i\ \partial_x v\ ) = \partial_u f\ \partial_x g$

2. Come esempio possiamo calcolare

   $\cos(iz) = \frac{1}{2}(e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}) = \frac{1}{2}(e^{-z} + e^{z}) = \cosh(z)$

   Analogamente si calcolano gli altri casi

3. Scriviamo

   $$f(z) = \tilde{u}(r,\theta) + i\tilde{v}(r,\theta) = u(x(r,\theta), y(r,\theta)) + iv(x(r,\theta), y(r,\theta))$$

   dove

   $$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

   Abbiamo

   $$\partial_r \tilde{u} = \cos\theta\ \partial_x u + \sin\theta\ \partial_y u$$

   $\frac{1}{r}\partial_\theta \tilde{v} = -\sin\theta\ \partial_x v + \cos\theta\ \partial_y v$ Facendo la differenza di queste due equazioni e imponendo le condizioni di Cauchy-Riemann per u e v si trova

   $$\partial_r \tilde{u} - \frac{1}{r}\partial_\theta \tilde{v} = 0$$

   Analogamente abbiamo

   $$\partial_r \tilde{v} = \cos\theta\ \partial_x v + \sin\theta\ \partial_y v$$

   $$\frac{1}{r}\partial_\theta \tilde{u} = -\sin\theta\ \partial_x u + \cos\theta\ \partial_y u$$

   e in questo caso facendo la somma e imponendo Cauchy-Riemann per u e v si trova

   $$\partial_r \tilde{v} + \frac{1}{r}\partial_\theta \tilde{u} = 0$$

4. Abbiamo

   $$f(z) = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$$

   Quindi

   $$\tilde{u} = \ln r \qquad \tilde{v} = \theta + 2k\pi$$

   In qualsiasi foglio abbiamo

   $$\partial_r \tilde{u} = \frac{1}{r} \qquad \partial_\theta \tilde{v} = 1 \qquad \partial_r \tilde{v} = \partial_\theta \tilde{u} = 0$$

   e quindi le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte

5. Scriviamo $f(z) = z^\alpha$, con $\alpha = a + ib$, come il prodotto di due funzioni

   $f(z) = z^a z^{ib}$

   La prima funzione è

   $z^a = e^{a\ln z} = e^{a\ln r} e^{ia(\theta+2k\pi)}$

   e quindi è a un solo valore per a intero, a q valori per $a = \frac{p}{q}$ e ha infinite determinazioni per a irrazionale.
   La seconda funzione è

   $z^{ib} = e^{ib\ln z} = e^{ib\ln r} e^{-b(\theta+2k'\pi)}$

   che ha infinite determinazioni per ogni b

6. Sostituendo $w = \frac{1}{z}$ otteniamo

   $f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^2}\sqrt{(1+w^2)(1+4w^2)}$

   che ha un polo doppio in zero. Quindi $f(z)$ non ha punti di diramazione all'infinito. I punti di diramazione sono $\pm i$ e $\pm 2i$ e possiamo ad esempio scegliere di tagliare il piano compesso da $-2i$ a $-i$ e da i a $2i$. Ci sono due determinazioni e quindi due fogli di Riemann.

settimana 3

Esercizi:

1. Data la funzione

   $f(z) = \sqrt{(z^2+1)(z^2+4)}$

   con punti di diramazione in $\pm i$ e $\pm 2i$, fare la scelta di tagli che uniscono $-2i$ a $-i$ e i a $2i$ sull'asse immaginario. Sul foglio in cui $f(0) = 2$, calcolare $f(3i)$.

2. Considerare la funzione

   $v(x, y) = \cos(2x) \cosh(2y)$

   Verificare se è armonica, e in caso affermativo determinare $u(x, y)$ tale che $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono parte reale e immaginaria di una funzione analitica. Scrivere $f(z)$.

3. Usando il teorema di Green, calcolare lungo una curva chiusa antioraria che circonda una superficie di area S gli integrali

   $\int_C x \; \mathrm{d}z$

   $\int_C y \; \mathrm{d}z$

   Usare questo risultato per calcolare

   $\int_C \bar{z} \; \mathrm{d}z$

   $\int_C z \; \mathrm{d}z$

4. Usando la rappresentazione integrale di Cauchy, calcolare l'integrale

   $\int \frac{\ln(z+1)}{z^2} \; \mathrm{d}z$

   lungo un cerchio centrato nell'origine e di raggio $\frac{1}{2}$.

5. Calcolare la serie di Taylor centrata in $z_0 = 0$, e il raggio di convergenza, delle funzioni

$f_1(z) = \ln(z^2 + 1)$

$f_2(z) = \ln(z^2 - 1)$

Soluzioni:

1. f è reale positiva per ogni z immaginario positivo minore di i. Intorno a i possiamo scrivere z come

   $z = i + \epsilon e^{i\theta}$

   dove possiamo scegliere l'angolo iniziale $\theta_i = \frac{3\pi}{2}$ oppure $\theta_i = -\frac{\pi}{2}$

   La funzione $\sqrt{z^2 + 4}$ non cambia segno spostandosi dai punti sotto i ai punti sopra i infinitesimamente vicini a i, e possiamo assumere che è positiva e quindi vale $\sqrt{3}$. Quindi anche $\sqrt{z^2 + 1}$ è positiva sotto al taglio. Vicino a i otteniamo

   $\sqrt{z^2 + 1} \simeq \sqrt{2i\epsilon e^{i\theta}}$

   Fissiamo per $\sqrt{i}$ la determinazione

   $\sqrt{i} = e^{\frac{i\pi}{4}}$

   Quindi otteniamo, vicino a i,

   $f(z) \simeq \sqrt{6\epsilon} e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$

   Siccome vogliamo $f(z)$ positivo sotto al taglio, dobbiamo scegliere $\theta_i = -\frac{\pi}{2}$. Questo significa che se ci spostiamo sopra al taglio a destra del taglio, ruotando in senso antiorario, abbiamo $\theta_f = \frac{\pi}{2}$ da cui segne che la funzione è immaginaria positiva lungo il taglio a destra del taglio. Per ottenere la funzione a sinistra del taglio dobbiamo invece ruotare di π in senso orario, ottenendo $\theta_f = -\frac{3\pi}{2}$, da cui segue che la funzione è immaginaria negativa.

   Spostiamoci ora lungo l'asse immaginario da i a $2i$ a sinistra del taglio. Scriviamo

   $z = 2i + \epsilon e^{i\theta}$

La funzione $\sqrt{z^2+1}$ non cambia segno spostandosi dai punti sotto $2i$ ai punti sopra $2i$ infinitesimamente vicini a $2i$, e abbiamo visto che è immaginaria negativa a sinistra del taglio, per cui vale $-i\sqrt{3}$. $\sqrt{z^2+4}$ è positiva sotto al taglio. Vicino a $2i$ otteniamo

$$\sqrt{z^2+4} \simeq \sqrt{4i\epsilon e^{i\theta}}$$

Fissiamo di nuovo per $\sqrt{i}$ la determinazione

$$\sqrt{i} = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

Quindi otteniamo, vicino a $2i$,

$$f(z) \simeq -i\sqrt{12\epsilon}e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

Per ottenere $f(z)$ immaginario negativo sotto al taglio devo quindi scegliere $\theta_i = -\frac{\pi}{2}$, e ruotando in senso orario ottengo $\theta_f = -\frac{3\pi}{2}$, da cui ottengo $f(2i+i\epsilon) = -\sqrt{12\epsilon}$, ovvero la funzione è reale negativa per z immaginario positivo maggiore di $2i$. Quindi

$$f(3i) = -\sqrt{40} = -2\sqrt{10}$$

2. La funzione è armonica. Abbiamo

$$\partial_x v(x,y) = -2\,\sin(2x)\,\cosh(2y) \qquad \partial_y v(x,y) = 2\,\cos(2x)\,\sinh(2y)$$

Quindi dalle condizioni di Cauchy-Riemann troviamo

$$du = 2\,\cos(2x)\,\sinh(2y)\;dx\;+\;2\,\sin(2x)\,\cosh(2y)\;dy$$

Integrando troviamo a meno di una costante

$$u(x,y) = \sin(2x)\,\sinh(2y)$$

Possiamo quindi scrivere $f(z)$ come

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{1}{4i}(e^{2ix} - e^{-2ix})(e^{2y} - e^{-2y})$$
$$+\frac{i}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix})(e^{2y} + e^{-2y})$$
$$= \frac{i}{2}e^{2i(x+iy)} + \frac{i}{2}e^{-2i(x+iy)} = i\,\cos(2z)$$

3. Il primo integrale è

   $\int_C x\ (\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$

   Per il teorema di Green, l'integrale in dx è nullo mentre

   $\int_C x\ \mathrm{d}y = \int_S \partial_x x\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y = S$

   Quindi

   $\int_C x\ \mathrm{d}z = iS$

   Analogamente si dimostra che

   $\int_C y\ \mathrm{d}z = -S$

   Di conseguenza

   $\int_C \bar{z}\ \mathrm{d}z = 2iS$

   mentre

   $\int_C z\ \mathrm{d}z = 0$

   in accordo col teorema di Cauchy

4. Abbiamo

   $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln(z+1)|_{z=0} = \frac{1}{z+1}|_{z=0} = 1 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\ln(z+1)}{z^2}\ \mathrm{d}z$

   Quindi

   $\int \frac{\ln(z+1)}{z^2}\ \mathrm{d}z = 2\pi i$

5. Per la prima funzione scegliamo il foglio tale che $f_1(0) = 0$. La funzione è

   $f_1(z) = \ln(z-i) + \ln(z+i)$

   La funzione ha punti di diramazione in i, $-i$ e all'infinito, e scegliamo i tagli da $-i\infty$ a $-i$ e da i a $i\infty$, in modo che possiamo sviluppare la serie con centro $z = 0$ e raggio di convergenza 1. Scriviamo

$\ln(z-i) = \ln[-i(1+iz)] = \ln(-i)+\ln(1+iz) = -i\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-)^{n-1}\frac{(iz)^n}{n}$

$\ln(z+i) = \ln[i(1-iz)] = \ln(i)+\ln(1-iz) = i\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n}$

Quindi

$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-)^{n-1}\frac{z^{2n}}{n}$

Per la seconda funzione scegliamo il foglio

$f_2(0) = i\pi$

Scriviamo

$f_2(z) = \ln(z-1)+\ln(z+1)$

Abbiamo

$\ln(z-1) = i\pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

$\ln(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-)^{n-1}\frac{z^n}{n}$

Otteniamo

$f_2(z) = i\pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n}$

Entrambi gli sviluppi si possono più semplicemente calcolare usando

$\ln(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-)^{n-1}\frac{z^n}{n}$

$\ln(z-1) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

e il fatto che se $f(z) = \sum a_n z^n$ allora

$f(z^2) = \sum a_n z^{2n}$

settimana 4

Esercizi:

1. Sviluppare in serie di potenze intorno a $z_0 = 0$ la funzione

   $f(z) = \frac{z^3+z-1}{z^2-5z+6}$

   e calcolare il raggio di convergenza

2. Trovare la somma della serie

   $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k$

3. Usando la formula per l'espansione in serie della funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ a partire dall'espansione in serie di $f(z)$, calcolare i primi cinque coefficienti B_0, B_1 ... B_4 della serie

   $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$

   I numeri B_n si chiamano 'numberi di Bernoulli'

4. Determinare tutti i possibili sviluppi di Laurent della funzione

   $f(z) = \frac{2}{z(z^2-1)}$

   intorno a $z_0 = 1$

5. Calcolare il residuo della funzione

   $f(z) = \mathrm{tg} z$

   in ogni punto di singolarità

6. Usando il teorema dei residui, calcolare i seguenti integrali:

   $\int \mathrm{d}z \, \frac{1}{z^4+1} \qquad |z-1| = 1$

   $\int \mathrm{d}z \, \frac{e^z}{\sin z - z} \qquad |z| = 1$

   $\int \mathrm{d}z \, \sin\frac{1}{z} \qquad |z| = 1$

$\int \mathrm{d}z\ \sin^2 \frac{1}{z}$ $\qquad |z| = 1$

$\int \mathrm{d}z\ \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}$ $\qquad |z| = 1$

$\int \mathrm{d}z\ \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ $\qquad |z-2| = \frac{1}{2}$

$\int \mathrm{d}z\ \frac{z}{\sin z(1-\cos z)}$ $\qquad |z| = 5$

Soluzioni:

1. Dividendo z^3+z-1 per z^2-5z+6 otteniamo $z+5$ con resto $20z-31$, ovvero

   $\frac{z^3+z-1}{z^2-5z+6} = z+5+\frac{20z-31}{z^2-5z+6}$

   Abbiamo anche

   $\frac{20z-31}{z^2-5z+6} = \frac{29}{z-3} - \frac{9}{z-2}$

   Quindi la funzione è

   $5+z+\frac{29}{z-3} - \frac{9}{z-2} = 5+z-\frac{29}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} + \frac{9}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$

   La prima frazione si può risommare come serie geometrica con raggio di convergenza 3, mentre la seconda ha raggio di convergenza 2. Quindi

   $f(z) = 5+z-\frac{29}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} + \frac{9}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$

   Il raggio di convergenza della serie è 2

2. Partendo dalla serie geometrica

   $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$

   e derivando si trova

   $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k$

   $\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)z^k$

   Quindi

$\sum_{k=0}^{\infty} k z^k = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}$

da cui si trova

$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k = \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{3z}{(1-z)^2} - \frac{2}{1-z} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$

La serie converge per $|z| < 1$

3. Abbiamo

   $f(z) = \frac{e^z-1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n$

   Scriviamo l'espansione della funzione $g(z) = \frac{z}{e^z-1}$ come

   $g(z) = \frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

   La condizione $f(z)g(z) = 1$ implica

   $a_0 b_0 = 1$

   $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 \qquad n > 1$

   Ponendo $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$ e $B_n = b_n n!$ si trova

   $B_0 = 1$

   $B_1 = -\frac{1}{2}$

   $B_2 = \frac{1}{6}$

   $B_3 = 0$

   $B_4 = -\frac{1}{30}$

4. Poniamo $z - 1 = u$ e sviluppiamo intorno a $u = 0$. La funzione diventa

   $f(u) = \frac{2}{u(u+1)(u+2)}$

   Abbiamo singolarità in $u = 0, -1, -2$, quindi abbiamo uno sviluppo per $0 < |u| < 1$, uno sviluppo per $1 < |u| < 2$ e infine uno sviluppo per $|u| > 2$.

   Scriviamo la funzione come

$f(u) = \frac{2}{u}\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2}\right)$

Per $0 < |u| < 1$, lo sviluppo di Laurent è

$f(u) = \frac{2}{u}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n u^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n \frac{u^n}{2^n}\right)$

$= \sum_{n=-1}^{\infty}\left(2(-)^{n+1} + \frac{(-)^n}{2^{n+1}}\right) u^n$

Per $1 < |u| < 2$ scriviamo la prima serie come

$\frac{1}{u+1} = \frac{1}{u}\frac{1}{1+\frac{1}{u}} = \frac{1}{u}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n \frac{1}{u^n}$

che converge per $|u| > 1$. Otteniamo

$f(z) = 2\sum_{n=-2}^{-\infty}(-)^n u^n + \sum_{n=-1}^{\infty}(-)^n \frac{u^n}{2^{n+1}}$

Infine, per $|u| > 2$ scriviamo la seconda serie come

$-\frac{1}{u+2} = -\frac{1}{u}\frac{1}{1+\frac{2}{u}} = -\frac{1}{u}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n \frac{2^n}{u^n}$

da cui otteniamo

$f(z) = \sum_{n=-2}^{-\infty}\left(2(-)^n - (-)^n 2^{-n-1}\right) u^n$

5. La funzione ha poli semplici in

   $z = z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$

   Dobbiamo quindi calcolare

   $\mathrm{Res}_{z=z_k}\mathrm{tg}z = (z - z_k)\mathrm{tg}z|_{z=z_k}$

   Abbiamo, sviluppando il coseno in z_k,

   $\lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{\cos z} = -\frac{1}{\sin z_k}$

   Quindi

   $\mathrm{Res}_{z=z_k}\mathrm{tg}z = -\frac{\sin z_k}{\sin z_k} = -1$

6. La funzione $\frac{1}{z^4+1}$ ha poli semplici per

$$z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}} \quad z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}} \quad z_3 = e^{\frac{5i\pi}{4}} \quad z_4 = e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

Solamente z_1 e z_4 sono dentro il cerchio $|z-1| = 1$ di centro 1 e raggio 1. Il primo integrale è quindi uguale a

$$2\pi i \left[\mathrm{Res}_{z=z_1}\frac{1}{z^4+1} + \mathrm{Res}_{z=z_4}\frac{1}{z^4+1}\right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{2e^{\frac{i\pi}{4}}(e^{\frac{i\pi}{4}}+e^{\frac{-i\pi}{4}})(e^{\frac{i\pi}{4}}-e^{\frac{-i\pi}{4}})} + \frac{1}{2e^{-\frac{i\pi}{4}}(e^{\frac{-i\pi}{4}}+e^{\frac{i\pi}{4}})(e^{\frac{-i\pi}{4}}-e^{\frac{i\pi}{4}})}\right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{2e^{\frac{i\pi}{4}}(e^{\frac{i\pi}{2}}-e^{\frac{-i\pi}{2}})} + \frac{1}{2e^{\frac{-i\pi}{4}}(e^{\frac{-i\pi}{2}}-e^{\frac{i\pi}{2}})}\right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{4ie^{\frac{i\pi}{4}}} - \frac{1}{4ie^{\frac{-i\pi}{4}}}\right] = -\frac{\pi}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right) = -\pi i \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= -\pi i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Consideriamo ora il secondo integrale. La funzione ha un polo di ordine 3 in $z = 0$. Per calcolare il residuo, consideriamo l'espansione di Laurent della funzione. Abbiamo

$$\frac{e^z}{\sin z - z} = \frac{1+z+\frac{z^2}{2}+...}{-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{5!}-...} = \frac{1+z+\frac{z^2}{2}+...}{-\frac{z^3}{6}(1-\frac{6z^2}{5!}+...)}$$

$$= -\frac{6}{z^3}\left(1+z+\frac{z^2}{2}+...\right)\left(1+\frac{6}{5!}z^2+...\right)$$

Da qui troviamo che il coefficiente di z^{-1}, ovvero il residuo, è

$$-3 - \frac{3}{10} = -\frac{33}{10}$$

Quindi l'integrale è

$$\int \mathrm{d}z\ \frac{e^z}{\sin z - z} = -\frac{33\pi i}{5}$$

Per il terzo integrale abbiamo una singolarità essenziale in $z = 0$, quindi dobbiamo per forza considerare la serie di Laurent. Lo sviluppo è

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}$$

da cui si vede che il coefficiente del termine z^{-1} è uguale a 1, quindi

$\int \mathrm{d}z \ \sin\frac{1}{z} = 2\pi i$

Per il quarto integrale possiamo considerare il quadrato dell'espansione di Laurent precedente, da cui si vede che l'espansione di Laurent di $\sin^2\frac{1}{z}$ ha solo potenze pari (in generale una funzione pari ha solo potenze pari di z e una funzione dispari ha solo potenze dispari). Quindi

$\int \mathrm{d}z \ \sin^2\frac{1}{z} = 0$

Per il quinto integrale, la funzione ha un polo doppio in $z = 0$ e un polo semplice in $z = 3$ e $z = -3$, ma solo $z = 0$ è dentro il cerchio di centro 0 e raggio 1. Quindi calcoliamo il residuo in $z = 0$:

$\mathrm{Res}_{z=0}\frac{e^z}{z^2(z^2-9)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{e^z}{z^2-9}|_{z=0} = -\frac{1}{9}$

da cui

$\int \mathrm{d}z \ \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} = -\frac{2\pi i}{9}$

Per il sesto integrale, abbiamo un polo doppio in $z = 2$ e un polo semplice in $z = 1$, ma quest'ultimo è fuori dal cerchio di centro 2 e raggio $\frac{1}{2}$. Quindi dobbiamo calcolare solo il residuo in $z = 2$:

$\mathrm{Res}_{z=2}\frac{z}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{z-1}|_{z=2} = -1$

da cui

$\int \mathrm{d}z \ \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} = -2\pi i$

Infine, l'ultimo integrale ha un polo doppio in $z = 0$ e un polo semplice in $z = \pi$ e in $z = -\pi$ (tutti dentro al cerchio di centro 0 e raggio 5). Il residuo in $z = 0$ è zero perché la funzione è pari. Il residuo in $z = \pi$ è

$\mathrm{Res}_{z=\pi}\frac{z}{\sin z(1-\cos z)} = \frac{(z-\pi)z}{\sin z(1-\cos z)}|_{z=\pi} = -\frac{\pi}{2}$

mentre in residuo in $z = -\pi$ è

$\mathrm{Res}_{z=-\pi}\frac{z}{\sin z(1-\cos z)} = \frac{(z+\pi)z}{\sin z(1-\cos z)}|_{z=-\pi} = \frac{\pi}{2}$

Quindi la somma dei residui è zero, da cui

$\int \mathrm{d}z \; \frac{z}{\sin z(1-\cos z)} = 0$

settimana 5

Esercizi:

1. L'integrale

   $I = \int \mathrm{d}z \; \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$

   lungo $|z| = 2$ si calcola facilmente utilizzando

   $I = -2\pi i \mathrm{Res}_{z=3} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = -\frac{\pi i}{121}$

   Mostrare che lo stesso risultato si ottiene calcolando

   $I = 2\pi i \sum_{i=1}^{5} \mathrm{Res}_{z=z_i} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$

   dove

   $z_i = e^{\frac{2n\pi i}{5}} \qquad\qquad n = 0, 1, 2, 3, 4$

2. Calcolare

   $I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \; \frac{1}{(2+\cos^2\theta)^2}$

3. Calcolare

   $I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \; \frac{1}{1+x^n} \qquad\qquad n = 2, 3, 4, 5, ...$

   utilizzando il teorema dei residui

Soluzioni:

1. In generale, se una funzione analitica con un polo semplice in $z = z_0$ è della forma

   $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$

   dove $h(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$, allora il residuo in z_0 è dato da

   $\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$

Possiamo applicarlo alla funzione $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$, dove $h(z) = \frac{1}{z-3}$ e $g(z) = z^5 - 1$. Dentro il cerchio di raggio 2 la funzione ha poli semplici in

$$z_1 = 1 \qquad z_2 = e^{\frac{2\pi i}{5}} \qquad z_3 = e^{\frac{4\pi i}{5}} \qquad z_4 = e^{\frac{6\pi i}{5}} \qquad z_5 = e^{\frac{8\pi i}{5}}$$

L'integrale della funzione lungo il cerchio di raggio 2 è dato da $2\pi i$ per la somma dei residui. Indicando con $a = e^{\frac{\pi i}{5}}$, otteniamo

$$I = 2\pi i \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{5z_i^4(z_i-3)}$$

$$= \frac{2\pi i}{5}\left[\frac{1}{-2} + \frac{1}{a^8(a^2-3)} + \frac{1}{a^{16}(a^4-3)} + \frac{1}{a^{24}(a^6-3)} + \frac{1}{a^{32}(a^8-3)}\right]$$

Osservando che $a^5 = -1$, otteniamo

$$I = \frac{2\pi i}{5}\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{a^3(a^2-3)} - \frac{1}{a(a^4-3)} + \frac{1}{a^4(-a-3)} + \frac{1}{a^2(-a^3-3)}\right]$$

Osserviamo poi che $a^4 = -a^{-1}$ e $a^3 = -a^{-2}$. Quindi

$$I = \frac{2\pi i}{5}\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{a^{-2}(a^2-3)} + \frac{1}{a(a^{-1}+3)} + \frac{1}{a^{-1}(a+3)} + \frac{1}{a^2(a^{-2}-3)}\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{5}\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{1-3a^{-2}} + \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+3a^{-1}} + \frac{1}{1-3a^2}\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{5}\left[-\frac{1}{2} + \frac{1-3\cos\frac{2\pi}{5}}{5-3\cos\frac{2\pi}{5}} + \frac{1+3\cos\frac{\pi}{5}}{5+3\cos\frac{\pi}{5}}\right]$$

Usando

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) \qquad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$$

si trova

$$I = -\frac{\pi i}{121}$$

2. In termini di $z = e^{i\theta}$ dobbiamo calcolare lungo $|z| = 1$ l'integrale

$$I = -i\int \mathrm{d}z\ \frac{1}{z[2+\frac{1}{4}(z^2+z^{-2}+2)]^2}$$

$$= -i\int \mathrm{d}z\ \frac{16z^3}{[z^4+10z^2+1]^2}$$

Il polinomio $z^4 + 10z^2 + 1$ ha zeri per

$z_{1,2}^2 = -5 \pm \sqrt{24}$

Definendo i numeri reali positivi

$a^2 = 5 - \sqrt{24} \qquad b^2 = 5 + \sqrt{24}$

abbiamo quindi che gli zeri del polinomio sono

$z = \pm ia \qquad z = \pm ib$

che corrispondono a quattro poli doppi per la funzione integranda. Di questi quattro poli doppi, solo i primi due, $z = \pm ia$, sono dentro il cerchio di centro $z = 0$ e raggio 1. Otteniamo quindi

$I = 2\pi i \left[\mathrm{Res}_{z=ia} \frac{-16iz^3}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)^2} + \mathrm{Res}_{z=-ia} \frac{-16iz^3}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)^2} \right]$

$= 32\pi \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z^3}{(z+ia)^2(z+b^2)^2}|_{z=ia} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z^3}{(z-ia)^2(z+b^2)^2}|_{z=-ia} \right]$

$= 64\pi \left[\frac{3}{4(-a^2+b^2)^2} - \frac{2(-a^2+b^2)-8a^2}{8(-a^2+b^2)^3} \right]$

Usando

$a^2 = 5 - \sqrt{24} = 5 - 2\sqrt{6} \qquad -a^2 + b^2 = 4\sqrt{6}$

si trova

$I = \frac{5\pi}{6\sqrt{6}}$

3. Per ogni n, possiamo considerare l'integrale $I(R)$ della funzione $\frac{1}{1+x^n}$ lungo il seguente percorso: da $z = 0$ a $z = R$ lungo l'asse reale positivo, da $z = R$ a $z = Re^{\frac{2\pi i}{n}}$ (arco di angolo $\frac{2\pi i}{n}$ e raggio R) e da $z = Re^{\frac{2\pi i}{n}}$ a $z = 0$ lungo $z = re^{\frac{2\pi i}{n}}$. Dal momento che $(re^{\frac{2\pi i}{n}})^n = r^n$, che la curva contiene solo il polo in $z = a = e^{\frac{\pi i}{n}}$, e che nel limite $R \to +\infty$ l'integrale lungo l'arco di circonferenza va a zero, otteniamo

   $(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}})I_n = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=a} \frac{1}{1+z^n}$

   Il residuo è

   $\mathrm{Res}_{z=a} \frac{1}{1+z^n} = \frac{1}{na^{n-1}}$

da cui

$I_n = \frac{2\pi i}{1-a^2}\frac{1}{na^{n-1}} = \frac{2\pi i}{a(a^{-1}-a)}\frac{1}{na^{n-1}}$

Usando $a^n = -1$ otteniamo

$I_n = \frac{2\pi i}{n(a-a^{-1})}$

ovvero

$I_n = \frac{\pi}{n\ \sin\frac{\pi}{n}}$

settimana 6

Esercizi:

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \; \frac{\ln x}{1+x^3}$

2. $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \; \frac{x}{1+x^3}$

3. $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \; \frac{\sqrt{x}\; \ln x}{x^2+5x+6}$

4. $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \; \frac{\sqrt[3]{x}\; \ln x}{1+x^2}$

Soluzioni:

1. Possiamo usare la discontinuità di $(\ln z)^2$, tagliando la superficie di Riemann da 0 a $+\infty$. Scegliamo la determinazione in modo che per z reale positivo sopra il taglio $\ln z = \ln x$, da cui segue che sotto il taglio $\ln z = \ln x + 2\pi i$. Consideriamo il cammino chiuso Γ_R che circonda l'asse reale positivo da o a R e si chiude lungo la circonferenza di raggio R per θ che va da o a 2π, e consideriamo l'integrale lungo Γ_R della funzione

   $f(z) = \frac{(\ln z)^2}{1+z^3}$.

   Nel limite $R \to +\infty$ questo integrale è

   $\int_{\Gamma_R} \mathrm{d}z \; f(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \; \frac{(\ln x)^2}{1+x^3} - \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \; \frac{(\ln x)^2 - 4\pi^2 + 4\pi i \ln x}{1+x^3}$
   $= 4\pi^2 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \; \frac{1}{1+x^3} - 4\pi i \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \; \frac{\ln x}{1+x^3}$

   Il valore dell'integrale è dato dal teorema dei residui, ed è

   $2\pi i \left[\frac{(\ln z_1)^2}{3z_1^2} + \frac{(\ln z_2)^2}{3z_2^2} + \frac{(\ln z_3)^2}{3z_3^2} \right]$

   dove

   $z_1 = e^{\frac{\pi i}{3}} \qquad z_2 = e^{\pi i} \qquad z_3 = e^{\frac{5\pi i}{3}}$

   Quindi si trova

$\int_{\Gamma_R} \mathrm{d}z\ f(z) = \frac{2\pi i}{9}\left[\frac{4\pi^2}{3} - 4\sqrt{3}\pi^2 i\right]$

Del resto sappiamo anche che (esercizio della settimana precedente)

$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{1}{1+x^3} = \frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Sostituendo otteniamo

$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{\ln x}{1+x^3} = -\frac{2\pi^2}{27}$

Facciamo ora vedere che lo stesso integrale si può calcolare tagliando il piano complesso da $-\infty$ a 0, in modo che la regione di integrazione non coincide col taglio. Possiamo quindi considerare la funzione integranda come analitica nella regione del piano complesso comprese tra la semiretta reale positiva e la semiretta $z = re^{\frac{2\pi i}{3}}$. Se consideriamo quindi la linea chiusa $\tilde{\Gamma}_R$ che va da 0 a R sull'asse reale, da R a $Re^{\frac{2\pi i}{3}}$ lungo la porzione di circonferenza di raggio R, e infine da $Re^{\frac{2\pi i}{3}}$ a 0, abbiamo, per il teorema dei residui

$\int_{\tilde{\Gamma}_R} \mathrm{d}z\ \frac{\ln z}{1+z^3} = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=z_1} \frac{\ln z}{1+z^3} = 2\pi i \frac{\ln z_1}{3z_1^2} = -\frac{2\pi^2}{9} e^{-\frac{2\pi i}{3}}$

visto che la curva circonda solo il polo z_1. Nel limite $R \to +\infty$ otteniamo quindi

$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{\ln x}{1+x^3} - e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{\ln x + \frac{2\pi i}{3}}{1+x^3} = -\frac{2\pi^2}{9} e^{-\frac{2\pi i}{3}}$

da cui si può mostrare che di nuovo $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{\ln x}{1+x^3} = -\frac{2\pi^2}{27}$

2. Utilizziamo la discontinuità del logaritmo. Consideriamo l'integrale lungo il percorso Γ_R che circonda il taglio lungo l'asse reale positivo della funzione

   $f(z) = \frac{z\ \ln z}{1+z^3}$

   Otteniamo, nel limite $R \to \infty$,

   $\int_{\Gamma_R} \mathrm{d}z\ f(z) = -2\pi i \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{x}{1+x^3} = 2\pi i \sum_{i=1}^3 \mathrm{Res}_{z=z_i} f(z)$

   dove i poli z_1 sono gli stessi dell'esercizio precedente. Otteniamo

$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \ \frac{x}{1+x^3} = -\frac{1}{3}\left[\frac{\ln z_1}{z_1} + \frac{\ln z_2}{z_2} + \frac{\ln z_3}{z_3}\right]$

Si trova

$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \ \frac{x}{1+x^3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$

3. La funzione la cui discontinuità è la funzione integranda è

   $f(z) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{z}\ (\ln z-\pi i)}{z^2+5z+6} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{z}\ (\ln z-\pi i)}{(z+3)(z+2)}$

   con taglio lungo l'asse reale positivo. Otteniamo, nel limite $R \to \infty$

   $\int_{\Gamma_R} \mathrm{d}z\ f(z) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{\sqrt{x}\ (\ln x-\pi i)}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{-\sqrt{x}\ (\ln x+\pi i)}{(x+2)(x+3)}$
   $= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{\sqrt{x}\ \ln x}{(x+2)(x+3)}$
   $= 2\pi i\left[\mathrm{Res}_{z=-2}f(z) + \mathrm{Res}_{z=-3}f(z)\right]$
   $= 2\pi i\left[\frac{1}{2}i\sqrt{2}(\ln 2+\pi i) - \frac{\pi i}{2}i\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(\ln 3+\pi i) + \frac{\pi i}{2}i\sqrt{3}\right]$
   $= \pi\left[\sqrt{3}\ \ln 3 - \sqrt{2}\ \ln 2\right]$

4. La funzione la cui discontinuità è la funzione integranda è

   $\frac{\sqrt[3]{z}}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}\left[\ln z + \frac{2\pi i}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\right]\ \frac{1}{1+z^2}$

   La funzione ha poli in

   $z_1 = e^{\frac{\pi i}{2}} \qquad z_2 = e^{\frac{3\pi i}{2}}$

   Dal teorema dei residui si ottiene

   $I = \frac{\pi}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}\left[\frac{\pi i}{2}e^{\frac{\pi i}{6}} + 2\pi i\frac{e^{\frac{5\pi i}{6}}}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}} - \frac{3\pi i}{2}e^{\frac{\pi i}{2}} - 2\pi i\frac{e^{\frac{7\pi i}{6}}}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}\right]$

   Usando

   $e^{\frac{\pi i}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \qquad e^{\frac{5\pi i}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \qquad e^{\frac{7\pi i}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$
   $e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad e^{\frac{\pi i}{2}} = i$

   troviamo

   $I = \frac{\pi^2}{6}$

settimana 7

Esercizi:

1. Dimostrare che in $\mathbb{R}^3$ i vettori

   $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0) \qquad \mathbf{u}_2 = (1, -1, 0) \qquad \mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)$

   sono linearmente indipendenti, e quindi costituiscono una base. Usare l'algoritmo di Gram-Schmidt per trovare a partire da questi una base ortonormale.

2. Calcolare l'integrale

   $\int_0^1 \mathrm{d}x \ \frac{x-3}{\sqrt{x(1-x)}}$

3. Calcolare l'integrale

   $\int_{-i}^{i} \mathrm{d}z \ \frac{\sqrt{1+z^2}}{4+z^2}$

   lungo il segmento sull'asse immaginario, usando la determinazione tale che $\sqrt{1+z^2}$ è positiva lungo il segmento.

Soluzioni:

1. È immediato mostrare che la combinazione lineare

   $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3 = (a_1 + a_2 + a_3, a_1 - a_2 + a_3, a_3) = 0$

   ha come unica soluzione

   $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

   e quindi i vettori sono linearmente indipendenti. La norma di $\mathbf{u}_1$ è $\sqrt{2}$, e quindi

   $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$

   A partire da $\mathbf{u}_2$, proiettiamo sulla parte ortogonale a $\mathbf{e}_1$ scrivendo

   $\mathbf{u}_2' = \mathbf{u}_2 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{u}_2)\mathbf{e}_1$

Troviamo che $(\mathbf{e}_1, \mathbf{u}_2) = 0$, quindi $\mathbf{u}'_2 = \mathbf{u}_2$. Anche questo vettore ha norma $\sqrt{2}$, e quindi

$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$

Infine abbiamo

$\mathbf{u}'_3 = \mathbf{u}_3 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{u}_3)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2, \mathbf{u}_3)\mathbf{e}_2 = (0, 0, 1)$

che è già normalizzato a 1. Quindi

$\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}'_3 = (0, 0, 1)$

2. La funzione

   $f(z) = \frac{z-3}{\sqrt{z(1-z)}}$

   ha punti di diramazione in $z = 0$ e $z = 1$. Effettuiamo il taglio lungo il segmento sui reali che unisce 0 e 1, e scegliamo la determinazione tale che $\sqrt{z(1-z)}$ è positiva sopra al taglio.

   Se circondiamo il taglio con una linea chiusa Γ percorsa in senso antiorario, abbiamo che

   $\int_\Gamma \mathrm{d}z \, \frac{z-3}{\sqrt{z(1-z)}} = -2 \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{x-3}{\sqrt{x(1-x)}}$

   perché l'integrale sopra il taglio è percorso in senso opposto e la radice sotto al taglio ha determinazione opposta.

   La funzione non ha singolarità isolate al finito, per cui l'unico contributo viene dal residuo all'infinito.

   Studiando il comportamento di $\sqrt{z(1-z)}$ intorno ai punti di diramazione si può vedere che questa radice deve essere immaginaria negativa per z reale e maggiore di 1. Ci conviene quindi, per studiare il residuo all'infinito, scrivere

   $\sqrt{z(1-z)} = -i\sqrt{z(z-1)}$

   dove per $\sqrt{z(z-1)}$ dobbiamo consistentemente usare la determinazione tale che la radice è reale per z reali maggiori di 1. Questo significa che per z grandi la radice diventa $\sqrt{z^2} = z$.

Scriviamo quindi

$f(z) = i\frac{z-3}{\sqrt{z(z-1)}}$

da cui troviamo

$g(w) = -i\frac{1}{w^2}(1-3w^2)\frac{1}{\sqrt{1-w}}$

Sviluppando in serie

$\frac{1}{\sqrt{1-w}} = 1 + \frac{1}{2}w + ...$

troviamo

$g(w) = -i\frac{1}{w^2}(1-3w^2)(1+\frac{1}{2}w+...) = -i\frac{1}{w^2} + \frac{5i}{2}\frac{1}{w} + ...$

da cui leggiamo

$\mathrm{Res}_{w=0}g(w) = \mathrm{Res}_{z=\infty}f(z) = \frac{5i}{2}$

Abbiamo quindi trovato

$\int_\Gamma \mathrm{d}z\ \frac{z-3}{\sqrt{z(1-z)}} = -2\int_0^1 \mathrm{d}x\ \frac{x-3}{\sqrt{x(1-x)}} = -2\pi i\frac{5i}{2} = 5\pi$

da cui si trova

$\int_0^1 \mathrm{d}x\ \frac{x-3}{\sqrt{x(1-x)}} = -\frac{5\pi}{2}$

È utile osservare che l'integrale è reale negativo come ci aspettiamo.

3. La funzione

   $f(z) = \frac{\sqrt{1+z^2}}{4+z^2}$

   ha punti di diramazione in $z = i$ e $z = -i$. Dobbiamo calcolare l'integrale

   $I = \int_{-i}^{i} \mathrm{d}z\ \frac{\sqrt{1+z^2}}{4+z^2}$

   tra questi due punti prendendo $\sqrt{1+z^2}$ positiva. Possiamo quindi considerare il taglio tra $-i$ e i e scegliere la radice positiva a destra del taglio. La funzione ha anche poli semplici in $z = -2i$ e $z = 2i$. Scegliamo quindi una curva Γ percorsa in senso antiorario che circondi il taglio ma non i due poli semplici. Abbiamo

$\int_\Gamma \mathrm{d}z\ \frac{\sqrt{1+z^2}}{4+z^2} = 2I$

Calcoliamo l'integrale usando il teorema dei residui, e osserviamo che la funzione ha anche un residuo all'infinito.

La determinazione che abbiamo assegnato corrisponde a radice positiva per z reali positivi, ovvero, per z grandi, $\sqrt{1+z^2}$ si può approssimare con $\sqrt{z^2} = z$. Otteniamo quindi

$g(w) = -\frac{1}{w}\frac{\sqrt{1+w^2}}{1+4w^2}$

da cui segue

$\mathrm{Res}_{w=0}g(w) = \mathrm{Res}_{z=\infty}f(z) = -1$

Per i residui in $\pm 2i$, osserviamo che $\sqrt{1+z^2}$ è immaginaria positiva per z immaginario maggiore di i, e immaginaria negativa per z immaginario minore di $-i$. Quindi dobbiamo usare le determinazioni

$\sqrt{1+z^2}|_{z=2i} = \sqrt{3}i \qquad \sqrt{1+z^2}|_{z=-2i} = -\sqrt{3}i$

Quindi troviamo

$\mathrm{Res}_{z=2i}f(z) = \frac{\sqrt{3}i}{4i} = \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \mathrm{Res}_{z=-2i}f(z) = \frac{-\sqrt{3}i}{-4i} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Unendo tutti i risultati abbiamo

$\int_\Gamma \mathrm{d}z\ \frac{\sqrt{1+z^2}}{4+z^2} = 2I = -2\pi i(\mathrm{Res}_{z=2i} + \mathrm{Res}_{z=-2i} + \mathrm{Res}_{z=\infty})f(z)$

$= -2\pi i(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)$

ovvero

$I = \pi i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$

Osserviamo che il risultato è un numero immaginario positivo. Questo è in accordo con quanto ci aspettavamo. Infatti, ponendo $z = iy$, l'integrale diventa

$I = i \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \; \frac{\sqrt{1-y^2}}{4-y^2}$

e la funzione integranda è positiva nella regione di integrazione.

settimana 8

Esercizi:

1. Mostrare che $\mathbb{I}_3$ e le matrici di Gell-Mann formano una base per lo spazio vettoriale delle matrici hermitiane 3×3.

2. Data la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   trovare S tale che la matrice $A' = S^{-1}AS$ è diagonale

3. Data la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

   trovare S tale che la matrice $A' = S^{-1}AS$ è diagonale. Mostrare che S può essere scelta unitaria.

4. Se un operatore A ha un solo autovalore λ ha molteplicità algebrica n e molteplicità geometrica 1, vuol dire che a meno di constanti esiste un unico autovettore, ovvero un unico vettore non nullo tale che

   $$A\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_1$$

   Vogliamo trovare la trasformazione che porta la matrice in forma di Jordan. Determiniamo il vettore $\mathbf{v}_2$ definito dall'equazione

   $$(A - \lambda\mathbb{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

   Il vettore $\mathbf{v}_2$ è definito dall'equazione a meno di $\alpha\mathbf{v}_1$, dal momento che $(A - \lambda\mathbb{I})\mathbf{v}_1 = 0$. In altre parole, l'equazione definisce un vettore linearmente indipendente da $\mathbf{v}_1$. Analogamente, definiamo il vettore $\mathbf{v}_3$ dall'equazione

   $$(A - \lambda\mathbb{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$$

   Iterando la procedura, definiamo $\mathbf{v}_n$ dall'equazione

$(A-\lambda\mathbb{I})\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n-1}$

La matrice S che ha per colonne le componenti dei vettori $\mathbf{v}_i$, $i = 1, ..., n$ (nell'ordine giusto) è quella che mette A in forma di Jordan:

$$A_J = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Più in generale, una qualsiasi matrice si può diagonalizzare in blocchi di Jordan, dove ciascun blocco è della forma A_J, usando la procedura descritta sopra.

Trovare la matrice S e mettere in forma di blocchi di Jordan le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzioni:

1. La più generale matrice hermitiana 3×3 ha la forma

   $$\begin{pmatrix} a & b-ic & d-ie \\ b+ic & f & g-ih \\ d+ie & g+ih & m \end{pmatrix}$$

   $= b\ \lambda_1 + c\ \lambda_2 + \frac{1}{2}(a-f)\ \lambda_3 + d\ \lambda_4 + e\lambda_5 + g\ \lambda_6$

   $+h\ \lambda_7 + \frac{1}{6}(a+f-2m)\ \lambda_8 + \frac{1}{3}(a+f+m)\ \mathbb{I}$

   dove i coefficienti sono tutti reali.

2. L'equazione caratteristica è

   $\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

   da cui si ottengono gli autovalori

   $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$

   I corrispondenti autovettori sono

   $|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3-\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix} \qquad |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3+\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix}$

   I due vettori non sono ortogonali, quindi non è necessario normalizzarli. La matrice che diagonalizza A è

   $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3-\sqrt{33}}{4} & \frac{3+\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix}$

   La matrice inversa è

   $S^{-1} = \frac{2}{\sqrt{33}} \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{33}}{4} & -1 \\ \frac{-3+\sqrt{33}}{4} & 1 \end{pmatrix}$

   Si ottiene

   $A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}$

3. La matrice è hermitiana, per cui gli autovettori formano una base ortonormale. L'equazione caratteristica è

   $\lambda^2 - 2\lambda = 0$

   le cui soluzioni sono

   $\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 2$

   Gli autovalori normalizzati sono

   $|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} \qquad |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$

   La matrice unitaria che diagonalizza A è

   $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-i & i\end{pmatrix}$

   la cui inversa è

   $U^{-1} = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\1 & -i\end{pmatrix}$

   Consistentemente otteniamo

   $A' = U^\dagger A U = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$

4. Per la matrice A_1 otteniamo che l'equazione caratteristica è

   $P_1(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = 0$

   da cui si trova che gli autovalori sono

   $\lambda = 5 \qquad \lambda = 3$ (molteplicità= 2)

   L'autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda = 5$ è

   $|v_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

mentre l'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda = 3$ è formato da tutti i vettori della forma

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix}$$

Questo autospazio ha dimensione 2, per cui l'operatore A_1 è diagonalizzabile e possiamo scegliere gli autovettori linearmente indipendenti

$$|v_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |v_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scriviamo quindi la matrice che porta nella base degli autovettori,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la cui inversa è

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ottiene

$$A_1' = S^{-1} A_1 S = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice A_2 ha autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica 3. Ogni vettore della forma

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix}$$

è un autovettore. Quindi l'autospazio ha dimensione 2. Scegliamo come base i vettori

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vogliamo determinare il terzo vettore per mettere la matrice in forma di Jordan. Ci accorgiamo che l'equazione

$$(A_2 - \mathbb{I})|v_3\rangle = |v_1\rangle$$

non può avere soluzione. Cerchiamo quindi $|v_3\rangle$ che soddisfa

$$(A_2 - \mathbb{I})|v_3\rangle = |v_2\rangle$$

La più generale soluzione è

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-y \end{pmatrix}$$

Possiamo in particolare scegliere

$$|v_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vogliamo quindi trasformare A_2 utilizzando la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono le componenti dei vettori $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$ e $|v_3\rangle$. La matrice inversa è

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene

$$A_2' = S^{-1} A_2 S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A_3 ha autovalore $\lambda = -1$ con molteplicità algebrica 3. L'autospazio ha dimensione 1, e quindi a meno di costanti l'unico autovettore è

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare la base che mette A_3 in forma di Jordan, cerciamo $|v_2\rangle$ che soddisfi

$$(A_3 + \mathbb{I})|v_2\rangle = |v_1\rangle$$

una particolare soluzione è

$$|v_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo poi $|v_3\rangle$ che soddisfi

$$(A_3 + \mathbb{I})|v_3\rangle = |v_2\rangle$$

che ha come soluzione particolare

$$|v_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice S è

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

la cui inversa è

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice trasformata è quindi

$$A_3' = S^{-1}A_3S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'equazione caratteristica della matrice A_4 è

$$P_4(\lambda) = (4-\lambda)^2(1-\lambda)$$

L'autovettore di autovalore $\lambda_1 = 1$ è

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_2 = 4$ è 1. Troviamo l'autovettore

$$|v_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per trovare la base che mette A_4 in forma di Jordan, cerciamo $|v_3\rangle$ che soddisfi

$$(A_4 - 4\mathbb{I})|v_3\rangle = |v_2\rangle$$

Troviamo che una particolare soluzione è

$$|v_3\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

la cui inversa è

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice trasformata è quindi

$$A_4' = S^{-1}A_4S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

L'equazione caratteristica di A_5 è

$$P_5(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = 0$$

Osserviamo che $\lambda = -2$ è soluzione. Dividendo quindi il polinomio per $\lambda + 2$, troviamo

$$P_5(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = (\lambda + 2)(-\lambda^2 + 8\lambda - 16)$$

$$= -(\lambda + 2)(\lambda - 4)^2 = 0$$

Quindi l'autovalore $\lambda_1 = -2$ ha molteplicità algebrica 1 e l'autovalore $\lambda_2 = 4$ ha molteplicità algebrica 2. Per il primo autovalore, l'autovettore è

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mentre troviamo che l'autospazio del secondo autovalore ha dimensione 1, e scegliamo come autovettore

$$|v_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Troviamo $|v_3\rangle$ che soddisfi

$$(A_5 - 4\mathbb{I})|v_3\rangle = |v_2\rangle$$

Troviamo che una particolare soluzione è

$$|v_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la cui inversa è

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice trasformata è quindi

$$A'_5 = S^{-1} A_5 S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

L'equazione caratteristica della matrice A_6 è

$$P_6(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$$

Osserviamo che $\lambda = -2$ è soluzione. Dividendo quindi il polinomio per $\lambda + 2$, troviamo

$$P_6(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda + 2)(-\lambda^2 - \lambda + 2) = 0$$

Gli zeri del termine quadratico sono

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -2$$

Considerando anche l'altro fattore, questo significa che λ_2 ha molteplicità algebrica 2. Per il primo autovalore, l'autovettore è

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mentre troviamo che l'autospazio del secondo autovalore ha dimensione 2, e scegliamo come base di questo spazio gli autovettori

$$|v_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |v_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice è quindi diagonalizzabile. Abbiamo

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la cui inversa è

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice trasformata è quindi

$$A_6' = S^{-1} A_6 S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

settimana 9

Esercizi:

1. Date due matrici quadrate X e Y che non commutano, calcolare α tale che

   $e^{t(X+Y)} = e^{tX}e^{tY}e^{\alpha t^2[X,Y]}...$

   a meno di termini di ordine t^3.

2. Data la matrice

   $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

   calcolare usando la formula di Dunford $f(A)$, dove $f(z)$ è una qualunque funzione analitica in un intorno di $z = \lambda$.

3. Ripetere l'esercizio precedente per la matrice

   $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

4. Data la matrice

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   calcolare

   $f(A) = e^A$

   usando la formula di Dunford.

Soluzioni:

1. Espandendo entrambi i termini fino all'ordine t^2, otteniamo

   $\mathbb{I} + t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X+Y)^2 + ...$

$= (\mathbb{I} + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + ...)(\mathbb{I} + tY + \frac{t^2}{2}Y^2 + ...)(\mathbb{I} + \alpha t^2[X,Y] + ...)$

All'ordine t^2 abbiamo

$\frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + XY + YX) = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + 2XY + 2\alpha[X,Y])$

da cui troviamo

$\alpha = -\frac{1}{2}$

2. Abbiamo

$z\mathbb{I} - A = \begin{pmatrix} z-\lambda & -1 \\ 0 & z-\lambda \end{pmatrix}$

il cui inverso è l'operatore risolvente

$R_z(A) = \frac{1}{(z-\lambda)^2}\begin{pmatrix} z-\lambda & 1 \\ 0 & z-\lambda \end{pmatrix}$

Usando la formula di Dunford otteniamo

$f(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z\ \frac{f(z)}{z-\lambda} & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z\ \frac{f(z)}{(z-\lambda)^2} \\ 0 & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z\ \frac{f(z)}{z-\lambda} \end{pmatrix}$

dove la cursa γ circonda in senso antiorario il punto λ sul piano complesso z. Per la rappresentazione integrale di Cauchy della funzione e della derivata troviamo

$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$

3. In questo caso abbiamo

$z\mathbb{I} - A = \begin{pmatrix} z-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & z-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & z-\lambda \end{pmatrix}$

il cui inverso è l'operatore risolvente

$R_z(A) = \frac{1}{(z-\lambda)^3}\begin{pmatrix} (z-\lambda)^2 & z-\lambda & 1 \\ 0 & (z-\lambda)^2 & z-\lambda \\ 0 & 0 & (z-\lambda)^2 \end{pmatrix}$

Usando la formula di Dunford otteniamo

$$f(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{z-\lambda} & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{(z-\lambda)^2} & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{(z-\lambda)^3} \\ 0 & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{z-\lambda} & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{(z-\lambda)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{z-\lambda} \end{pmatrix}$$

dove la curva γ circonda in senso antiorario il punto λ sul piano complesso z. Usando la rappresentazione integrale di Cauchy della funzione e della derivata prima e seconda troviamo

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2}f''(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

4. Abbiamo

$$z\mathbb{I} - A = \begin{pmatrix} z-1 & -2 \\ -2 & z-1 \end{pmatrix}$$

il cui inverso è l'operatore risolvente

$$R_z(A) = \frac{1}{z^2-2z-3}\begin{pmatrix} z-1 & 2 \\ 2 & z-1 \end{pmatrix}$$

Il risolvente ha poli semplici per $z=-1$ e $z=3$ (gli autovalori della matrice A). Usando la formula di Dunford otteniamo

$$e^A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z \, \frac{e^z(z-1)}{z^2-2z-3} & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z \, \frac{2e^z}{z^2-2z-3} \\ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z \, \frac{2e^z}{z^2-2z-3} & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z \, \frac{e^z(z-1)}{z^2-2z-3} \end{pmatrix}$$

dove la cursa γ circonda in senso antiorario i punti $z_1=-1$ e $z_2=3$. Usando il teorema dei residui troviamo

$$e^A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^3+\frac{1}{e}) & \frac{1}{2}(e^3-\frac{1}{e}) \\ \frac{1}{2}(e^3-\frac{1}{e}) & \frac{1}{2}(e^3+\frac{1}{e}) \end{pmatrix}$$

settimana 10

Esercizi:

1. Data la matrice A dell'esercizio 4 della settimana 9, di cui abbiamo calcolato e^A, calcolare

   $\sin\left(\frac{\pi A}{2}\right)$

   usando la formula di Dunford e dimostrare che l'operatore $e^A \sin\left(\frac{\pi A}{2}\right)$ che si ottiene coincide con l'operatore che si ottiene usando la formula di Dunford per la funzione

   $f(z) = e^z \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)$

2. Calcolare gli operatori spettrali per le matrici A_3, A_4, A_5 e A_6 dell'esercizio 4 della settimana 8.

3. Data la matrice A_5 dell'esercizio precedente, calcolare

   $\ln A_5$

   usando la prescrizione in cui il logaritmo è reale sull'asse reale positivo e il taglio è lungo l'asse immaginario positivo. Usando la stessa prescrizione per la radice, calcolare

   $A_5^{\frac{1}{2}}$

4. Data la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   calcolare

   $\ln(A - i\mathbb{I})$

   usando per il logaritmo la stessa prescrizione dell'esercizio precedente.

Soluzioni:

1. Abbiamo

$$\sin\left(\tfrac{\pi A}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\int \mathrm{d}z \, \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)(z-1)}{(z+1)(z-3)} & \frac{1}{2\pi i}\int \mathrm{d}z \, \frac{2\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{(z+1)(z-3)} \\ \frac{1}{2\pi i}\int \mathrm{d}z \, \frac{2\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{(z+1)(z-3)} & \frac{1}{2\pi i}\int \mathrm{d}z \, \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)(z-1)}{(z+1)(z-3)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{I}$$

Quindi

$$e^A \sin\left(\tfrac{\pi A}{2}\right) = -e^A$$

Avremmo ottenuto lo stesso risultato calcolando

$$e^A \sin\left(\tfrac{\pi A}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\int \mathrm{d}z \, \frac{e^z\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)(z-1)}{(z+1)(z-3)} & \frac{1}{2\pi i}\int \mathrm{d}z \, \frac{2e^z\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{(z+1)(z-3)} \\ \frac{1}{2\pi i}\int \mathrm{d}z \, \frac{2e^z\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{(z+1)(z-3)} & \frac{1}{2\pi i}\int \mathrm{d}z \, \frac{e^z\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)(z-1)}{(z+1)(z-3)} \end{pmatrix}$$

2. Dobbiamo calcolare l'operatore risolvente per tutte le matrici.

   Per A_3 abbiamo

$$R_z(A_3) = \tfrac{1}{(z+1)^3} \begin{pmatrix} (z+1)^2 & -(z+1) & 2 \\ 0 & (z+1)^2 & -2(z+1) \\ 0 & 0 & (z+1)^2 \end{pmatrix}$$

   L'autovalore $\lambda = -1$ ha molteplicità algebrica 1. Dal fatto che il risolvente ha un polo di ordine 3 deduciamo che la molteplicità geometrica è 1. Calcoliamo gli operatori spettrali. Otteniamo

$$P^0_{-1} = P_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   come ci aspettiamo dal fatto che c'è un solo autovalore. Inoltre

$$P_{-1}^1 = J_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{-1}^2 = (J_{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il risolvente della matrice A_4 è

$$R_z(A_4) = \frac{1}{(z-1)(z-4)^2} \begin{pmatrix} (z-1)(z-4) & 0 & 0 \\ 2z+7 & (z-4)^2 & 3(z-4) \\ 5(z-1) & 0 & (z-1)(z-4) \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 4$ (con molteplicità algebrica 2). Il proiettore P_1 è semplice da calcolare perché il risolvente ha solo poli semplici in $z = 1$. Otteniamo

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per calcolare P_4 (che già sappiamo essere uguale a $\mathbb{I} - P_1$), dobbiamo calcolare il residuo di funzioni che hanno poli doppi. In particolare l'elemento di riga 2 e colonna 1 è dato da

$$\mathrm{Res}_{z=4} \frac{2z+7}{(z-1)(z-4)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{2z+7}{z-1} \Big|_{z=4} = -1$$

Si ottiene

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che giustamente è uguale a $\mathbb{I} - P_1$. Troviamo poi

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si può verificare per consistenza che

$A_4 = P_1 + 4P_4 + J_4$

Il risolvente della matrice A_5 è

$$R_z(A_5) = \frac{1}{(z+2)(z-4)^2}\begin{pmatrix}(z-3)(z+2) & 4z-10 & 3(z-4)\\ -(z+2) & z^2-6z+2 & -3(z-4)\\ z+2 & -2z+14 & (z-1)(z-4)\end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono $\lambda = -2$ e $\lambda = 4$ (con molteplicità algebrica 2). Otteniamo

$$P_{-2} = \begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

che giustamente è uguale a $\mathbb{I} - P_{-2}$. Troviamo poi

$$J_4 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Si può verificare per consistenza che

$A_5 = P_{-2} + 4P_4 + J_4$

Il risolvente della matrice A_6 è

$$R_z(A_6) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}\begin{pmatrix}z+2 & 3 & 3\\ -3 & z-4 & -3\\ 3 & 3 & z+2\end{pmatrix}$$

Anche se l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica 2, vediamo che il risolvente ha solo poli semplici, in accordo col fatto che sappiamo che l'operatore A_6 è diagonalizzabile. Otteniamo i proiettori

$$P_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$P_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e ovviamente

$$A_6 = P_1 - 2P_{-2}$$

3. Abbiamo, con la prescrizione data

   $$\ln A_5 = (\ln 2 - i\pi)P_{-2} + \ln 4 \; P_4 + \tfrac{1}{4} \; J_4$$

   Analogamente

   $$A_5^{\frac{1}{2}} = -i\sqrt{2} \; P_{-2} + 2 \; P_4 + \tfrac{1}{4} \; J_4$$

4. La matrice è in realtà diagonale a blocchi. Per riconoscerlo, possiamo scambiare riga 2 con riga 4 e colonna 2 con colonna 4. Otteniamo

   $$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Vediamo che l'autovalore $\lambda = 0$ ha molteplicità algebrica 3 e l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 1. Scriviamo l'operatore risolvente a blocchi 2×2

   $$R_z(A') = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

   dove

   $$B = \tfrac{1}{z(z-1)} \begin{pmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

   $$C = \tfrac{1}{z^2} \begin{pmatrix} z-1 & -1 \\ 1 & z+1 \end{pmatrix}$$

   Ci accorgiamo che il risolvente ha poli doppi in $z = 0$, e quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ è 2. Troviamo

$$P_0' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_0' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tornando alle variabili originarie otteniamo

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_0' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$f(A) = f(0)P_0 + f(1)P_1 + f'(0)J_0$$

Quindi, per la funzione

$$f(z) = \ln(z - i)$$

con la prescrizione data otteniamo

$f(A) = \ln(-i)P_0 + \ln(1-i)P_1 + \frac{1}{-i}J_0$

Con la prescrizione data, abbiamo

$-i = e^{-\frac{\pi i}{2}} \qquad 1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}$

quindi

$f(A) = -\frac{\pi i}{2}P_0 + (\frac{1}{2}\ \ln\ 2 - \frac{\pi i}{4})P_1 + iJ_0$

Lo stesso risultato si ottiene considerando la matrice

$\tilde{A} = A - i\mathbb{I}$

che ha autovalori $-i$ e $1-i$, e la funzione $\tilde{f}(z) = \ln\ z$ con la stessa prescrizione.

settimana 11

Esercizi:

1. Considerare la successione di funzioni

   $$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x > \frac{1}{n} \\ 1 - nx & 0 < x \le \frac{1}{n} \\ f_n(-x) & x < 0 \end{cases}$$

   dove $x \in [-1, 1]$. Dimostrare che f_n è di Cauchy in $L^1[-1, 1]$ e non è di Cauchy in $C[-1, 1]$ (spazio di Banach delle funzioni continue con norma uniforme).

2. Calcolare i polinomi di Legendre $P_3(x)$, $P_4(x)$ e $P_5(x)$ usando l'algoritmo di Gram-Schmidt e confrontare con quello che si ottiene sviluppando la formula di Rodrigues

   $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left((x^2 - 1)^n\right)$

3. Dimostrare che la formula di Rodrigues implica le relazioni di ricorrenza

   $P'_{n+1}(x) = (n + 1)P_n(x) + xP'_n(x)$

   $P'_{n-1}(x) = -nP_n(x) + xP'_n(x)$

   $(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

   e dimostrare che da queste segue l'equazione di Legendre

   $(1 - x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n + 1)P_n(x) = 0$

4. Dati i polinomi di Laguerre

   $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(e^{-x} x^n\right)$

   dimostrare le relazioni di ricorrenza

   $L_{n-1}(x) = L'_{n-1}(x) - L'_n(x)$

   $xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$

$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$

e mostrare che queste implicano l'equazione di Laguerre

$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$

5. Data la funzione

   $f(x) = xe^x$

   calcolare i coefficienti a_k del suo sviluppo in serie di polinomi di Hermite

   $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k H_k(x)$

   usando l'identità

   $2xH_k(x) = H_{k+1}(x) + 2kH_{k-1}(x)$

6. Data la funzione

   $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_{2k}(x)}{(2k)!}$

   calcolare l'integrale

   $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; e^{-x^2} \; f^2(x)$

Soluzioni:

1. Calcoliamo la distanza tra f_n e f_m nella norma L^1. Prendiamo $n > m$, in modo che $f_m(x) \geq f_n(x)$. Abbiamo

   $\|f_m - f_n\|_1 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; [f_m(x) - f_n(x)]$

   L'integrando è pari, per cui possiamo moltiplicare per 2 e integrare da 0 a 1. Entrambe le funzioni sono nulle per $x \geq \frac{1}{m}$, e $f_n(x)$ è zero anche da $\frac{1}{n}$ a $\frac{1}{m}$. Quindi otteniamo

   $\|f_m - f_n\|_1 = 2\int_0^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}x \; \left(1 - mx - (1 - nx)\right) + 2\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \mathrm{d}x \; (1 - mx)$

   $= \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$

Quindi per m e n grandi la distanza va a zero e quindi la successione è di Cauchy.

Nella norma unforme invece abbiamo

$$\|f_m - f_n\|_{\sup} = \sup_{[-1,1]}|f_n(x) - f_m(x)|$$

Di nuovo prendiamo $n > m$. La distanza puntuale tra le funzioni è massima quando $x = \frac{1}{n}$, in cui $f_n(x) = 0$ e $f_m(x) = 1 - \frac{m}{n}$. Quindi

$$\|f_m - f_n\|_{\sup} = 1 - \frac{m}{n}$$

Si possono prendere m e n grandi a piacere mantenendo comunque il rapporto $\frac{m}{n}$ diverso da 1, per cui la successione in questa norma non è di Cauchy. Questo è consistente col fatto che lo spazio delle funzioni continue con norma uniforme è uno spazio completo. Se la successione fosse di Cauchy in questa norma questo non sarebbe consistente perché la successione converge puntualmente alla funzione che è 0 per $x \neq 0$ e 1 per $x = 1$ che non è continua.

2. Sappiamo che

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & \langle P_0|P_0\rangle &= 2 \\ P_1(x) &= x & \langle P_1|P_1\rangle &= \tfrac{3}{2} \\ P_2(x) &= \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) & \langle P_2|P_2\rangle &= \tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

Scriviamo

$$P_3(x) = \alpha_3 \left(x^3 - \frac{\langle P_1|x^3\rangle}{\langle P_1|P_1\rangle} P_1(x) \right)$$

Abbiamo

$$\langle P_1|x^3\rangle = \frac{2}{5}$$

da cui

$$P_3(x) = \alpha_3 \left(x^3 - \frac{3}{5}x \right)$$

La costante di normalizzazione α_3 è fissata a $\frac{5}{2}$ dalla condizione $P_n(1) = 1$. Quindi abbiamo

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \qquad \langle P_3|P_3\rangle = \frac{2}{7}$

Scriviamo poi

$P_4(x) = \alpha_4 \left(x^4 - \frac{\langle P_2|x^4\rangle}{\langle P_2|P_2\rangle} P_2(x) - \frac{\langle P_0|x^4\rangle}{\langle P_0|P_0\rangle} P_0(x) \right)$

Abbiamo

$\langle P_2|x^4\rangle = \frac{8}{35} \qquad \langle P_0|x^4\rangle = \frac{2}{5}$

da cui

$P_4(x) = \alpha_4 \left(x^4 - \frac{4}{7} P_2(x) - \frac{1}{5} P_0(x) \right)$

La costante di normalizzazione α_4 è fissata a $\frac{35}{8}$ dalla condizione $P_n(1) = 1$. Quindi abbiamo

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

Infine abbiamo

$P_5(x) = \alpha_5 \left(x^5 - \frac{\langle P_3|x^5\rangle}{\langle P_3|P_3\rangle} P_3(x) - \frac{\langle P_1|x^5\rangle}{\langle P_1|P_1\rangle} P_1(x) \right)$

Abbiamo

$\langle P_3|x^5\rangle = \frac{8}{63} \qquad \langle P_1|x^5\rangle = \frac{2}{7}$

da cui

$P_5(x) = \alpha_5 \left(x^5 - \frac{4}{9} P_3(x) - \frac{3}{7} P_1(x) \right)$

La costante di normalizzazione α_5 è fissata a $\frac{63}{8}$ dalla condizione $P_n(1) = 1$. Quindi abbiamo

$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Si può facilmente mosrtare che questi sono esattamente i polinomi che si ottengono dalla formula di Rodrigues.

3. Vogliamo prima di tutto dimostrare che

$P'_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x) + xP'_n(x)$

abbiamo

$P'_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}}(x^2-1)^{n+1}$

agendo con una derivata,

$= \frac{1}{2^n(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left[(x^2-1)^n x\right]$

Adesso usiamo la relazione

$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[xf(x)\right] = m\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}f(x) + x\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}f(x)$

e troviamo

$P'_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n n!}\left[(n+1)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n + x\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x^2-1)^n\right]$
$= (n+1)P_n(x) + xP'_n(x)$

che dimostra la prima identità. Per dimostrare la seconda identità dimostriamo prima che

$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$

Moltiplicando per $2^n n!$ l'identità che vogliamo dimostrare è

$\frac{1}{2(n+1)}\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}}(x^2-1)^{n+1} - 2n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^{n-1} = (2n+1)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$

Sviluppando i termini a sinistra, e in particolare derivando due volte il primo, otteniamo

$2n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^{n-1}x^2\right] + \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n - 2n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^{n-1}$
$= 2n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^{n-1}(x^2-1)\right] + \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$
$= (2n+1)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$

che coincide col termine di destra. La relazione ricorsiva

$P'_{n-1}(x) = -nP_n(x) + xP'_n(x)$

segue dalla relazione appena dimostrata e dalla prima relazione semplicemente risolvendo per $P'_{n+1}(x)$ in un'equazione e sostituendo nell'altra.

La terza relazione da dimostrare è

$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

ovvero, moltiplicando per per $2^n n!$,

$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x^2-1)^{n+1} = (2n+1)x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n - 2n^2\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^{n-1}$

Riscriviamo il primo termine a destra usando

$x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x(x^2-1)^n\right] - n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n$

L'identità segue effettuando esplicitamente le derivate fino a scrivere tutti i termini come $\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\ldots$

Infine vogliamo dimostrare l'equazione di Legendre. Scriviamo la prima equazione per $n+1$ invece che n e deriviamo. Poi deriviamo la seconda equazione e la moltiplichiamo per x. Infine sommiamo le due equazioni che abbiamo ottenuto. Infine usiamo la seconda equazione per eliminare $P'_{n-1}(x)$. Il risultato è l'equazione di Legendre.

4. La prima identità si dimostra facendo le derivate esplicitamente fino a che tutte le derivate rimanenti sono dello stesso ordine. In particolare nella prima equazione scriviamo tutti i termini come $e^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\ldots$. La seconda identità si dimostra usando

   $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x}x^n) = n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(e^{-x}x^{n-1}) + x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x}x^{n-1})$

   Da queste due identità seguono le altre due. In particolare, la terza si dimostra nel seguente modo: prendiamo la prima equazione e eliminiamo $xL'_n(x)$ usando la prima equazione moltiplicata per x. In quello che otteniamo ridefiniamo n, ovvero sostituiamo n con $n+1$. Nell'equazione risultante eliminiamo $xL'_n(x)$ utilizzando la seconda equazione. Il risultato è la terza equazione.

   Infine l'equazione di Laguerre si ottiene derivando la seconda identità, eliminando $L'_{n-1}(x)$ usando la prima identità, e nell'equazione risultante eliminando $L_{n-1}(x)$ usando la seconda identità.

5. Dobbiamo calcolare

   $a_k = \frac{\langle H_k|f\rangle}{\langle H_k|H_k\rangle}$

Sappiamo che

$\langle H_k|H_k\rangle = 2^k k!\sqrt{\pi}$

Calcoliamo

$\langle H_k|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ xe^{-x^2}e^x H_k(x)$

usando l'indentità $2xH_k(x) = H_{k+1}(x) + 2kH_{k-1}(x)$,

$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ e^{-x^2+x}\left[\frac{1}{2}H_{k+1}(x) + kH_{k-1}(x)\right]$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ e^x \left[\frac{1}{2}(-)^{k+1}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}e^{-x^2} + k(-)^{k-1}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}e^{-x^2}\right]$

Integrando per parti il primo termine $k+1$ volte e il secondo $k-1$ volte otteniamo

$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ e^{-x^2+x}(\frac{1}{2} + k)$

$= (k + \frac{1}{2})e^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}$

Quindi

$a_k = \frac{e^{\frac{1}{4}}(k+\frac{1}{2})}{2^k k!}$

6. Calcoliamo

$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ e^{-x^2}f^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(2m)!}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ e^{-x^2}H_{2n}(x)H_{2m}(x)$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(2n)!}2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}$

$= \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!} = \sqrt{\pi}\ \cosh\ 2$

settimana 12

Esercizi:

1. Date le successioni di funzioni

   $f_n^{(1)}(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$

   $f_n^{(2)}(x) = \frac{1}{n\pi} \left(\frac{\sin(nx)}{x} \right)^2$

   $f_n^{(3)}(x) = \frac{1}{n\pi} \frac{1}{x^2 + \frac{1}{n^2}}$

   dimostrare che

   $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; f_n^{(i)}(x) = 1$

2. Data la successione di funzioni

   $f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

   mostrare che $f_n(x)$ converge a $\delta(x)$ considerando l'integrale

   $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; f_n(x) g(x)$

   dove $g(x)$ è una qualsiasi funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ a supporto compatto (il supporto di $g(x)$ è l'insieme dei punti x tali che $g(x) \neq 0$).

3. Mostrare che la successione $f_n^{(1)}(x)$ del primo esercizio non è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R})$.

4. Mostrare che la successione $f_n(x)$ del secondo esercizio non è di Cauchy in $L^1(\mathbb{R})$.

5. Dimostrare che

   $\int_0^{2\pi} D_n(x) \mathrm{d}x = 2\pi$

   dove $D_n(x)$ è il nucleo di Dirichlet.

6. Calcolare la serie di Fourier delle funzioni

   $f_1(x) = x^4$

   $f_2(x) = x\ \cos(x)$

   $f_3(x) = |x|$

   dove $x \in [-\pi, \pi]$.

Soluzioni:

1. Effettuando il cambio di variabile

   $nx = y$

   gli integrali diventano

   $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\ e^{-y^2}$

   $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\ \left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^2$

   $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f_n^{(3)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\ \frac{1}{y^2+1}$

   Il primo integrale è chiaramente uguale a 1. Il secondo e il terzo integrale si calcolano facilmente estendendo l'integrale al piano complesso e usando il teorema dei residui.

2. Abbiamo

   $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}x = 1$

   Per dimostrare che la funzione tende a una delta di Dirac nel limite $n \to \infty$, è suffuciente prendere una funzione $g(x)$ che sia continua in un intorno di $x = 0$. Abbiamo

   $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f_n(x) g(x) = \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}x\ g(x)$

   Quindi

$\min_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} g(x) \leq \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}x\ g(x) \leq \max_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} g(x)$

da cui

$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f_n(x)g(x) = g(0)$

3. Dobbiamo calcolare

   $\|f_n^{(1)} - f_m^{(1)}\|_2$

   Abbiamo

   $\|f_n^{(1)} - f_m^{(1)}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \left(\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2} - \frac{m}{\sqrt{\pi}} e^{-m^2x^2}\right)^2$

   Il risultato è

   $\|f_n^{(1)} - f_m^{(1)}\|_2^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n}{\sqrt{2}} + \frac{m}{\sqrt{2}} - \frac{2nm}{\sqrt{n^2+m^2}}\right)$

   da cui si vede facilmente che la successione non è di Cauchy.

4. Dobbiamo calcolare

   $\|f_n - f_m\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ |f_n(x) - f_m(x)|$

   Prendiamo $n > m$. Otteniamo

   $\|f_n - f_m\|_1 = 2\frac{m}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \mathrm{d}x + \left(\frac{n}{2} - \frac{m}{2}\right) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}x$

   $= 2\left(1 - \frac{m}{n}\right)$

   Si vede che la successione non è di Cauchy.

5. Il modo più semplice per fare il calcolo è usare

   $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$

   L'integrale del coseno tra 0 e 2π è zero, da cui

   $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ D_n(x) = 2\pi$

6. Calcoliamo i coefficienti di Fourier c_n usando

$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \; e^{-inx} f(x)$

Tutte le funzioni sono reali. Estendendo per periodicamente le funzioni su tutto l'asse reale, si vede che la prima e la terza funzione sono pari, mentre la seconda è dispari e nulla in $x = 0$. Quindi nella base trigonometrica ci aspettiamo tutti i coefficienti b_n nulli nel primo e terzo caso, e tutti i coefficienti a_n nulli nel secondo caso.

Consideriamo $f_1(x) = x^4$. Otteniamo

$c_0 = \frac{}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi^5}{5}$

$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 8(-)^n \left(\frac{\pi^3}{n^2} - \frac{6\pi}{n^4} \right)$

da cui

$a_0 = \frac{2\pi^4}{5}$

$a_n = 8(-)^n \left(\frac{\pi^2}{n^2} - \frac{6}{n^4} \right)$

Otteniamo quindi l'espansione

$f_1(x) = \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n^2} \cos(nx) - 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n^4} \cos(nx)$

Per $f_2(x) = x \; \cos x$ abbiamo

$c_0 = 0$

$c_1 = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{2}$

$c_n = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} (-)^{n-1} \frac{2n\pi}{n^2-1} \qquad n > 1$

da cui toviamo

$b_1 = -\frac{1}{2}$

$b_n = (-)^n \frac{2n}{n^2-1} \qquad n > 1$

ovvero

$f_2(x) = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-)^n n}{n^2-1}\sin(nx)$

Infine per la funzione $f_3(x) = |x|$ abbiamo

$c_0 = \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}}$

$c_n = 0 \qquad n$ pari

$c_n = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}n^2} \qquad n$ dispari

ovvero

$a_0 = \pi$

$a_n = -\frac{4}{\pi n^2} \qquad n$ dispari

da cui

$f_3(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$

settimana 13

Esercizi:

1. Sapendo che

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

   dimostrare che

   $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

2. Mostrare che per una funzione $f(x)$ pari la sua trasformata di Fourier è data da

   $\hat{f}(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \; f(x) \cos(px)$

   mentre per una funzione dispari

   $\hat{f}(p) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \; f(x) \sin(px)$

   Questo implica che la trasformata di Fourier di una funzione reale pari è reale e la trasformata di Fourier di una funzione reale dispari è immaginaria.

3. Dati gli operatori F^+ e F^- in l^2, che agiscono sui vettori di base canonici come

   $F^-|e_i\rangle = |e_{i+1}\rangle$

   $F^+|e_i\rangle = |e_{i-1}\rangle$

   risolvere il problema agli autovalori

   $F^{\pm}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$

Soluzioni:

1. Abbiamo

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

da cui

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = (1 - \frac{1}{4}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$

2. Abbiamo

   $\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; e^{-ipx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; (\cos(px) - i\sin(px)) f(x)$

   Se $f(x)$ è pari solo il primo termine contribuisce, mentre se è dispari contribuisce solo il secondo. Sfruttando la parità in entrambi i casi l'integrale è due volte l'integrale da 0 a $+\infty$.

3. Vogliamo risolvere le equazioni

   $F^{\pm}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$

   con

   $$|\lambda\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

   Per F^+ otteniamo il sistema di equazioni

   $$\begin{cases} v_2 = \lambda v_1 \\ v_3 = \lambda v_2 \\ v_4 = \lambda v_3 \\ ... \end{cases}$$

   Se $v_1 = 0$ esiste solo la soluzione identicamente nulla. Prendiamo quindi $v_1 = 1$. Otteniamo

$$|\lambda\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

Questo vettore appartiene a l^2 se $|\lambda| < 1$. Quindi ogni numero complesso di modulo minore di 1 è autovalore.

Per F^- otteniamo

$$\begin{cases} 0 = \lambda v_1 \\ v_1 = \lambda v_2 \\ v_2 = \lambda v_3 \\ ... \end{cases}$$

La prima equazione implica che $\lambda = 0$ o $v_1 = 0$. Se $\lambda = 0$ tutte le equazioni successive implicano che tutti i v_i sono nulli, per cui otteniamo il vettore nullo. Se $\lambda \neq 0$, la prima equazione implica $v_1 = 0$, da cui la seconda implica $v_2 = 0$ e così via, per cui di nuovo otteniamo come unica soluzione il vettore nullo. In conclusione l'operatore F^- non ha autovalori.

settimana 14

Esercizi:

1. Determinare lo spettro puntuale e gli autovettori (con loro degenerazione) dell'operatore $A = F^- F^+$ in l^2, dove F^+ e F^- sono definiti all'esercizio 3 della settimana 13. Commentare il risultato.

2. Sia dato l'operatore lineare T in l^2 definito da

   $(T\mathbf{v})_1 = 0$

   $(T\mathbf{v})_k = v_k + \frac{k-1}{k} v_{k-1} \qquad k = 2, 3, ...$

   Determinare la norma di T, l'operatore $T^\dagger$ e lo spettro puntuale di T e $T^\dagger$.

3. Sia dato l'operatore lineare T in l^2 definito da

   $(T\mathbf{v})_1 = v_1$

   $(T\mathbf{v})_2 = 0$

   $(T\mathbf{v})_k = v_{k-1} \qquad k = 3, 4, ...$

   Determinare la norma di T, l'operatore $T^\dagger$ e lo spettro puntuale di T e $T^\dagger$, discutendo la molteplicità degli autovalori e gli autovettori associati.

4. Sia dato l'operatore lineare T in l^2 definito da

   $(T\mathbf{v})_1 = 0$

   $(T\mathbf{v})_{2k} = a v_{2k+1} \qquad k \geq 1$

   $(T\mathbf{v})_{2k+1} = a v_{2k} \qquad k \geq 1$

   dove $a \in \mathbb{C}$. Determinare l'operatore $T^\dagger$, la norma di T e di $T^\dagger$, e lo spettro puntuale di T e $T^\dagger$, discutendo la molteplicità degli autovalori e gli autovettori associati. Si discuta per quali valori di a (se esistono) T è auto-aggiunto, unitario, invertibile.

5. Sia dato l'operatore lineare T in l^2 definito da

   $(T\mathbf{v})_{2k-1} = v_{2k-1} + v_{2k}$

   $(T\mathbf{v})_{2k} = v_{2k-1} - v_{2k}$

   Calcolare la norma di T, determinare $T^\dagger$ e discutere lo spettro puntuale di T e $T^\dagger$.

Soluzioni:

1. L'operatore F^+F^- è l'identità, per cui l'analisi dello spettro è triviale. Per F^-F^+ abbiamo

   $F^-F^+ = \mathbb{I} - P_1$

   quindi tutti i vettori $\mathbf{e}_i$, $i = 2, 3, 4...$ sono autovettori di autovalore $\lambda = 1$, mentre $\mathbf{e}_1$ è autovettore di autovalore $\lambda = 0$. L'operatore è auto-aggiunto, ma ovviamente non è invertibile (non è suriettivo). È invertibile se restringiamo il dominio al sottospazio ortogonale a $\mathbf{e}_1$ (in cui diventa l'operatore identità).

2. È facile mostrare che

   $\|T\mathbf{v}\|^2 \leq 4\|\mathbf{v}\|^2$

   usando $|a+b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$, con a e b numeri complessi qualsiasi. Abbiamo l'uguaglianza $|a+b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$ se $a = b$, quindi, se prendiamo $v_k = \frac{k-1}{k} v_{k-1}$, per grandi k, abbiamo che $\|T\mathbf{v}\|^2$ tende a $4\|\mathbf{v}\|^2$, da cui

   $\|T\| = 2$

   L'operatore $T^\dagger$ è

   $(T^\dagger\mathbf{v})_1 = \frac{1}{2} v_2$

   $(T^\dagger\mathbf{v})_k = v_k + \frac{k}{k+1} v_{k+1} \qquad k = 2, 3, ...$

   Determiniamo lo spettro puntuale di T. L'equazione è

   $0 = \lambda v_1$

$v_k + \frac{k-1}{k} v_{k-1} = \lambda v_k \qquad k = 2, 3, ...$

Se $\lambda = 0$, abbiamo che v_1 deve per forza essere diverso da 0 altrimenti l'intero vettore si annulla. Poniamo $v_1 = 1$. Troviamo

$v_2 = -\frac{1}{2} \;\; v_3 = \frac{1}{3} \;\; v_4 = -\frac{1}{4} \;\; ...$

ovvero

$v_k = (-)^{k+1} \frac{1}{k}$

Il vettore appartiene a l^2 (in particolare ha norma quadrata uguale a $\frac{\pi^2}{6}$). L'autovalore $\lambda = 0$ ha molteplicità 1. Si vede facilmente che $\lambda \neq 0$ non può essere autovalore. Infatti otteniamo $v_1 = 0$ che implica che tutte le altre componenti devo essere anche loro nulle. Quindi $\lambda = 0$ è l'unico autovalore.

Consideriamo ora lo spettro puntuale di $T^\dagger$. In questo caso l'equazione è

$\frac{1}{2} v_2 = \lambda v_1$

$v_k + \frac{k}{k+1} v_{k+1} = \lambda v_k$

Si vede che v_1 deve per forza essere diverso da 0. Poniamolo uguale a 1. Otteniamo

$v_2 = 2\lambda$

$v_3 = 3\lambda(\lambda - 1)$

$v_4 = 4\lambda(\lambda - 1)^2$

$v_5 = 5\lambda(\lambda - 1)^3$

...

Si può mostrare che l'autovettore appartiene a l^2 se $|\lambda - 1| < 1$. Questo è consistente col fatto che, come si può mostrare,

$\|T^\dagger\| = 2$

3. Ovviamente abbiamo $\|T\| = 1$ poiché T è un'isometria. L'operatore aggiunto è

$(T^\dagger \mathbf{v})_1 = v_1$

$(T^\dagger \mathbf{v})_k = v_{k+1} \qquad k = 2, 3, ...$

Abbiamo

$\|T^\dagger \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - |v_2|^2$

da cui

$\|T^\dagger\| = 1$

Determiniamo lo spettro puntuale. Per T abbiamo le equazioni

$v_1 = \lambda v_1$

$0 = \lambda v_2$

$v_{k-1} = \lambda v_k \quad k > 2$

L'unica soluzione è $\lambda = 1$, con autovalore $\mathbf{e}_1$ (molteplicità 1). Per $T^\dagger$ abbiamo le equazioni

$v_1 = \lambda v_1$

$v_{k+1} = \lambda v_k \quad k > 1$

Troviamo che $\lambda \neq 1$ implica $v_1 = 0$. Se anche $v_2 = 0$, questo implica che tutto il vettore è il vettore nullo. Quindi dobbiamo prendere $v_2 \neq 0$. Scegliamo $v_2 = 1$, da cui otteniamo $v_3 = \lambda$, $v_4 = \lambda^2$, ... $v_k = \lambda^{k-2}$. Questo vettore appartiene a l^2 se $|\lambda| < 1$. Quindi ogni $|\lambda| < 1$ appartiene allo spettro puntuale. Per $\lambda = 1$ possiamo prendere v_1 qualsiasi. Se $v_2 = \alpha$, con α complesso, allora si vede che $v_k = \alpha$ per ogni $k > 1$. Ma questo implica che il vettore appartiene a l^2 solo se $\alpha = 0$. Concludendo $\lambda = 1$ è autovalore di molteplicità 1 con autovettore $\mathbf{e}_1$.

4. Abbiamo che l'operatore $T^\dagger$ agisce come T con a sostituito con $\bar{a}$. Quindi

   $\|T\mathbf{v}\|^2 = \|T^\dagger \mathbf{v}\|^2 = |a|^2 \left(|v_2|^2 + |v_3|^2 + |v_4|^2 + |v_5|^2 + ...\right)$

   da cui

$\|T\| = \|T^\dagger\| = |a|$

Determiniamo lo spettro puntuale di T e $T^\dagger$. Per T abbiamo che $\lambda = 0$ è autovalore con autovettore $\mathbf{e}_1$ (molteplicità 1). Se $\lambda \neq 0$, necessariamente $\lambda = \pm a$. Qualsiasi vettore con $v_{2k} = \pm v_{2k+1}$ è autovettore, quindi entrambi gli autovalori hanno molteplicità infinita. Per $T^\dagger$ è la stessa cosa sostituendo a con $\bar{a}$.

L'operatore T è auto-aggiunto se a è reale. È invertibile nel sottodominio che è il sottospazio ortogonale a $\mathbf{e}_1$. In questo dominio è unitario se $|a| = 1$.

5. Su ciascuna coppia (v_{2k-1}, v_{2k}), l'azione dell'operatore è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2k-1} \\ v_{2k} \end{pmatrix}$$

È facile quindi convincersi che

$$\|T\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{v}\|^2$$

per qualsiasi $\mathbf{v}$, da cui

$$\|T\| = \sqrt{2}$$

L'operatore è auto-aggiunto. Inoltre l'operatore $\tilde{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}T$ è unitario, quindi ci aspettiamo che gli autovalori di T siano reali e di modulo $\sqrt{2}$, ovvero possono solo essere $\pm\sqrt{2}$. Questo è esattamente quello che si trova risolvendo il problema agli autovalori per la matrice sopra. Per $\lambda = \sqrt{2}$ troviamo che ogni vettore della forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$$

è autovettore. Quindi $\lambda = \sqrt{2}$ ha molteplicità infinita. Per $\lambda = -\sqrt{2}$ troviamo che ogni vettore della forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$$

è autovettore. Quindi anche $\lambda = -\sqrt{2}$ ha molteplicità infinita. È immediato mostrare che qualsiasi autovettore di $\lambda = \sqrt{2}$ è ortogonale a qualsiasi autovettore di $\lambda = -\sqrt{2}$.

settimana 15

Esercizi:

1. Determinare lo spettro puntuale e le autofunzioni dell'operatore

   $T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}\mathrm{ln}x$

   $\mathcal{D}(T) = \{f_{\text{a.c.}}, f \in L^2[1,e], f(1) = f(e)\}$

2. Data l'equazione differenziale

   $y(x)''' - 3y(x)'' + 3y(x)' - y(x) = e^x$

   mostrare che le soluzioni del problema omogeneo sono

   $y_1(x) = e^x \quad y_2(x) = xe^x \quad y_3(x) = x^2 e^x$

   e mostrare che una soluzione particolare dell'equazione è

   $y_p(x) = \alpha x^3 e^x$

   e trovare α.

3. Abbiamo visto che il problema di Cauchy

   $$\begin{cases} y_1'(x) = \lambda y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) = \lambda y_2(x) \end{cases}$$

   $$\begin{cases} y_1(0) = a \\ y_2(0) = b \end{cases}$$

   ha soluzioni

   $$\begin{cases} y_1(x) = ae^{\lambda x} + b\ x\ e^{\lambda x} \\ y_2(x) = be^{\lambda x} \end{cases}$$

   In forma matriciale, il problema si può scrivere

   $\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x)$

   dove

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Mostrare che la soluzione si può scrivere come

$\mathbf{y}(x) = e^{Ax}\mathbf{y}_0$

dove

$$\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

calcolando l'esponenziale della matrice.

4. Mostrare che, data la base di Hilbert $\phi_n(x)$ di L^2, vale la relazione

   $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\phi}_n(x)\phi_n(x') = \delta(x - x')$

5. Dato il problema di Cauchy

   $$\begin{cases} xy'(x) + y(x) = x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

   mostrare che la soluzione è

   $y(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

   usando la formula generale

   $y(x) = a \, \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' \, \frac{c_0(x')}{c_1(x')}\right) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' \frac{f(x')}{c_1(x')} \exp\left(-\int_{x'}^{x} \mathrm{d}x'' \, \frac{c_0(x'')}{c_1(x'')}\right)$

6. Data l'equazione differenziale del secondo ordine in forma canonica

   $z''(x) + c(x)z(x) = g(x)$

   e data $z_1(x)$ soluzione del problema omogeneo, mostrare che la seconda soluzione del problema omogeneo è

   $z_2(x) = W z_1(x) \int^{x} \mathrm{d}x' \frac{1}{z_1(x')^2}$

   e la soluzione particolare è

$z_p(x) = -\frac{z_1(x)}{W} \int^x \mathrm{d}x' \; z_2(x')g(x') + \frac{z_2(x)}{W} \int^x \mathrm{d}x' \; z_1(x')g(x')$

dove W è il wronskiano (ed è costante).

7. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy''(x) + y'(x) - \frac{4}{x}y(x) = \sqrt{x} \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

8. Trovare le soluzioni dell'equazione di Eulero

$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$

9. Risolvere il problema al contorno

$$\begin{cases} xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 1 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

usando il metodo della funzione di Green.

10. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = 2x^2 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

usando il metodo della funzione di Green.

Soluzioni:

1. Per trovare lo spettro puntuale vogliamo risolvere il problema

$$Tf_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$$

Quindi f_λ è soluzione dell'equazione differenziale omogenea

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}\ln x - \lambda\right) f_\lambda(x) = 0$$

La soluzione è

$f_\lambda(x) = f_\lambda(1)\ \exp\left[-\int_1^x \mathrm{d}t\left(\frac{1}{t}\ln t - \lambda\right)\right]$

Effettuando l'integrale otteniamo

$f_\lambda(x) = f_\lambda(1)\ \exp\left[-\frac{(\ln x)^2}{2} + \lambda(x-1)\right]$

Dobbiamo imporre $f_\lambda(e) = f_\lambda(1)$. Abbiamo

$f_\lambda(e) = f_\lambda(1)\ \exp\left[-\frac{1}{2} + \lambda(e-1)\right]$

Quindi richiediamo

$\exp\left[-\frac{1}{2} + \lambda(e-1)\right] = 1$

che ha come soluzioni

$\lambda = \lambda_n = \frac{1}{e-1}\left(\frac{1}{2} + 2\pi i n\right)$

2. La funzione $y_1(x) = e^x$ è ovviamente soluzione del problema omogeneo. Anche $y_2(x)$ è soluzione, infatti

   $y_2'(x) = y_1(x) + y_2(x)$

   $y_2''(x) = y_2(x) + 2y_1(x)$

   $y_2'''(x) = y_2(x) + 3y_1(x)$

   e sostituendo si vede che è soluzione. Analogamente

   $y_3'(x) = 2y_2(x) + y_3(x)$

   $y_3''(x) = 2y_1(x) + 4y_2(x) + y_3(x)$

   $y_3'''(x) = 6y_1(x) + 6y_2(x) + y_3(x)$

   e sostituendo si ottiene che $y_3(x)$ è soluzione del problema omogeneo. Infine abbiamo

   $y_p'(x) = 3\alpha y_3(x) + y_p(x)$

   $y_p''(x) = 6\alpha y_2(x) + 6\alpha y_3(x) + y_p(x)$

$y_p'''(x) = 6\alpha y_1(x) + 18\alpha y_2(x) + 9\alpha y_3(x) + y_p(x)$

e sostituendo otteniamo

$6\alpha y_1(x) = e^x$

da cui troviamo

$\alpha = \frac{1}{6}$

3. Effettuiamo la decomposizione spettrale della matrice

   $Ax = \begin{pmatrix} \lambda x & x \\ 0 & \lambda x \end{pmatrix}$

   Abbiamo

   $Ax = \lambda x \mathbb{I} + J_{\lambda x}$

   dove $\tilde{\lambda} = \lambda x$ è l'unico autovalore e

   $J_{\lambda x} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Quindi

   $f(Ax) = f(\tilde{\lambda})\mathbb{I} + f'(\tilde{\lambda})J_{\lambda x}$

   e in particolare

   $e^{Ax} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ 0 & e^{\lambda x} \end{pmatrix}$

   che riproduce la soluzione dell'equazione differenziale.

4. Per definizione di base abbiamo che ogni funzione $f(x)$ può essere scritta come

   $f(x') = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(x')$

   dove

   $f_n = (\phi_n, f) = \int \mathrm{d}x \; \bar{\phi}_n(x) f(x)$

Quindi sostituendo

$f(x') = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathrm{d}x\ \bar{\phi}_n(x) f(x) \phi_n(x') = \int \mathrm{d}x\ f(x) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\phi}_n(x) \phi_n(x')$

da cui segue che

$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\phi}_n(x) \phi_n(x') = \delta(x - x')$

5. La dimostrazione è immediata. Infatti sostituendo otteniamo ($a = 0$)

   $y(x) = \int_1^x \mathrm{d}x' \exp\left(-\int_{x'}^x \mathrm{d}t \frac{1}{t}\right) = \int_1^x \mathrm{d}x' \frac{x'}{x} = \frac{1}{2x}\left(x^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

6. Il fatto che $z_2(x)$ sia soluzione del problema omogeneo si dimostra immediatamente derivando l'espressione data e usando il fatto che $z_1(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea. Per quanto riguarda l'espressione per $z_p(x)$, di nuovo si dimostra derivando, usando la definizione del wronskiano e il fatto che $z_1(x)$ e $z_2(x)$ sono entrambe soluzioni del problema omogeneo.

7. Scegliamo la soluzione dell'omogenea nella forma $y(x) = x^{\alpha}$. Troviamo

   $\alpha^2 - 4 = 0$

   che ha soluzioni

   $\alpha_1 = 2 \qquad \alpha_2 = -2$

   Quindi le soluzioni del problema omogeneo sono

   $y_1(x) = x^2 \qquad y_2(x) = x^{-2}$

   Cerchiamo la soluzione particolare nella forma

   $y_p(x) = a x^{\beta}$

   Troviamo

   $\beta = \frac{3}{2} \qquad a = -\frac{4}{7}$

   La soluzione più generale è quindi della forma

   $y(x) = a_1 x^2 + a_2 x^{-2} - \frac{4}{7} x^{\frac{3}{2}}$

Richiendendo $y(1) = 1$ e $y'(1) = 0$ troviamo

$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{4}{7}$

In conclusione la soluzione del problema di Cauchy è

$y(x) = x^2 + \frac{4}{7}x^{-2} - \frac{4}{7}x^{\frac{3}{2}}$

8. Cerchiamo la soluzione nella forma

   $y(x) = x^\alpha$

   Troviamo la relazione

   $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2 = 0$

   che ha soluzione $\alpha = 1$ con molteplicità 2. Quindi una soluzione è

   $y_1(x) = x$

   La seconda soluzione è

   $y_2(x) = x \ \mathrm{ln} x$

   come è immediato mostrare calcolando le derivate.

9. La funzione di Green per il problema al contorno si ottiene passando in forma canonica. Abbiamo che in generale l'equazione

   $c_2(x)y''(x) + c_1(x)y'(x) + c_0(x)y(x) = f(x)$

   si trasforma nell'equazione in forma canonica

   $z''(x) + c(x)z(x) = g(x)$

   usando le relazioni

   $y(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int^x \mathrm{d}x' \frac{c_1(x')}{c_2(x')}\right) z(x)$

   $c(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{c_1(x)}{c_2(x)}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{c_1(x)}{c_2(x)}\right) + \frac{c_0(x)}{c_2(x)}$

   $g(x) = \frac{f(x)}{c_2(x)}\exp\left(\frac{1}{2}\int^x \mathrm{d}x' \frac{c_1(x')}{c_2(x')}\right)$

Nel nostro caso si ottiene

$y(x) = \frac{1}{x} z(x)$

$c(x) = 1$

$g(x) = 1$

Per $z(x)$ le condizioni al contorno sono $z(\frac{\pi}{2}) = z(\pi) = 0$, e quindi il problema al contorno in forma canonica è

$$\begin{cases} z''(x) + z(x) = 1 \\ z(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ z(\pi) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del problema omogeneo sono

$$\begin{cases} z_1(x) = \cos x \\ z_2(x) = \sin x \end{cases}$$

da cui si trova che il wronskiano è

$W = 1$

La funzione di Green è

$G(x, x') = [A_-(x') - \theta(x - x')\sin x'] \cos x + [B_-(x') + \theta(x - x')\cos x'] \sin x$

Imponendo che

$G(\frac{\pi}{2}, x') = G(\pi, x') = 0$

abbiamo che la soluzione del problema al contorno è dato da

$z(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}x' G(x', x) f(x')$

dove l'integrale è sulla prima variabile della funzione di Green. Vogliamo quindi trovare $A_-(x')$ e $B_-(x')$ tali che $G(\frac{\pi}{2}, x') = G(\pi, x') = 0$. Abbiamo

$G(\frac{\pi}{2}, x') = A_-(x')\cos\frac{\pi}{2} + B_-(x')\sin\frac{\pi}{2} = B_-(x') = 0$

$G(\pi, x') = [A_-(x') - \sin x'] \cos\pi + [B_-(x') + \cos x'] \sin\pi$

$= - [A_-(x') - \sin x'] = 0$

La funzione di Green è quindi

$G(x, x') = \theta(x' - x)\sin x' \cos x + \theta(x - x')\cos x' \sin x$

La soluzione è

$z(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}x' G(x', x) f(x') = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \mathrm{d}x' \cos x' \sin x + \int_{x}^{\pi} \mathrm{d}x' \sin x' \cos x$

$= -\sin x + \cos x + 1$

Passando alla funzione $y(x)$ otteniamo

$y(x) = \frac{1}{x} (-\sin x + \cos x + 1)$

10. Per il problema di Cauchy non abbiamo bisogno di passare il forma canonica, possiamo direttamente determinare la funzione di Green. Cerchiamo le soluzioni del problema omogeneo nella forma

    $y(x) = x^\alpha$

    Otteniamo

    $\alpha(\alpha - 1) - 3\alpha + 3 = 0$

    che ha soluzioni

    $\alpha_1 = 3 \qquad \alpha_2 = 1$

    ovvero

    $$\begin{cases} y_1(x) = x \\ y_2(x) = x^3 \end{cases}$$

    Il wronskiano è

    $W(x) = 2x^3$

    La formula generale per la funzione di Green nel caso non canonico è

$G(x,x') = \left[A_-(x') - \frac{\theta(x-x')}{c_2(x')}\frac{y_2(x')}{W(x')}\right] y_1(x) + \left[B_-(x') + \frac{\theta(x-x')}{c_2(x')}\frac{y_1(x')}{W(x')}\right] y_2(x)$

In particolare scegliamo la funzione di Green ritardata ponendo $A_- = B_- = 0$. Otteniamo, nel nostro caso

$G_R(x,x') = -\frac{\theta(x-x')}{(x')^2}\frac{(x')^3}{2(x')^3}x + \frac{\theta(x-x')}{(x')^2}\frac{x'}{2(x')^3}x^3$

$= \theta(x-x')\frac{1}{2(x')^2}\left(-x + \frac{x^3}{(x')^2}\right)$

Otteniamo quindi

$y(x) = \int_1^x \mathrm{d}x' \ \frac{1}{2(x')^2}\left(-x + \frac{x^3}{(x')^2}\right) 2(x')^2 + a_1 x + a_2 x^3$

Effettuando l'integrale troviamo

$y(x) = x^3 - 2x^2 + x + a_1 x + a_2 x^3$

e il problema di Cauchy si risolve per $a_1 = a_2 = 0$, da cui la soluzione è

$y(x) = x^3 - 2x^2 + x$