MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esercizi - A.A. 2018-19

settimana 1

Esercizi:

1. Risolvere il problema di Cauchy

   $$\begin{cases} y_1'(x) = \alpha y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) = \alpha y_2(x) + y_3(x) \\ y_3'(x) = \alpha y_3(x) \end{cases}$$

   con condizioni iniziali

   $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 1$

2. Dimostrare che

   $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

   $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

   $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$

3. Dimostrare, facendo il calcolo esplicito, che

   $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$

4. Calcolare i limiti

   $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$

   lungo le due diagonali del piano complesso

5. Data la funzione $f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}(z^3 + \bar{z}^3)$, calcolare le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

Mostrare inoltre che le condizioni di Cauchy-Riemann non sono verificate

Soluzioni:

1. Scriviamo

$$\underline{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}$$

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale

$$\underline{y}'(x) = A\underline{y}(x)$$

con condizione iniziale

$$\underline{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove la matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Scriviamo la soluzione

$$\underline{y}(x) = e^{Ax}\underline{y}(0)$$

e vogliamo far vedere che definendo

$$e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n x^n}{n!}$$

la matrice che otteniamo risolve l'equazione differenziale. Dobbiamo calcolare A^n. Scriviamo

$$A = \alpha\mathbb{I} + J$$

dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^3 = 0$$

Quindi

$$A^n = \alpha^n \mathbb{I} + n\alpha^{n-1} J + \tbinom{n}{2} \alpha^{n-2} J^2$$

Sostituendo nella definizione di e^{Ax} troviamo

$$e^{Ax} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\alpha^n x^n}{n!} \mathbb{I} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha^{n-1} x^n}{(n-1)!} J + \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\alpha^{n-2} x^n}{2 \cdot (n-2)!} J^2$$

ovvero

$$e^{Ax} = e^{\alpha x} \mathbb{I} + x e^{\alpha x} J + \frac{x^2}{2} e^{\alpha x} J^2$$

Quindi troviamo

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha x} & x e^{\alpha x} & \frac{x^2}{2} e^{\alpha x} \\ 0 & e^{\alpha x} & x e^{\alpha x} \\ 0 & 0 & e^{\alpha x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si può facilmente mostrare che questa è la soluzione esatta.

2. Abbiamo:

$$|z_1 \cdot z_2| = |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| = |x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)|$$
$$= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$
$$= |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\tfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|\tfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right| = \tfrac{|(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)|}{x_2^2+y_2^2} = \tfrac{|x_1x_2+y_1y_2+i(x_1y_2-y_1x_2)|}{x_2^2+y_2^2}$$

$= \frac{\sqrt{(x_1x_2+y_1y_2)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2}}{x_2^2+y_2^2} = \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$|z_1 \pm z_2|^2 = (x_1 \pm x_2)^2 + (y_1 \pm y_2)^2$

$= x_1^2 + x_2^2 \pm 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 \pm 2y_1y_2$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2(x_1x_2 + y_1y_2)$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$

3. $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   $= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

   e analogamente per $\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

4. Lungo la diagonale $x = y$ il limite è

   $\frac{1-i}{1+i} = -i$

   mentre lungo la diagonale $x = -y$ il limite è

   $\frac{1+i}{1-i} = i$

5. La funzione è reale, e scritta come funzione di x e y si trova

   $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

   Quindi

   $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy$

   Le condizioni di Cauchy-Riemann non possono essere soddisfatte dato che la funzione è reale.

settimana 2

Esercizi:

1. Mostrare che la funzione

   $$f(z) = \sqrt{(z^2+1)(z^2+4)}$$

   non ha un punto di diramazione all'infinito. La funzione ha punti di diramazione in $\pm i$ e $\pm 2i$. Fare la scelta di tagli che uniscono $-2i$ a $-i$ e i a $2i$ sull'asse immaginario. Sul foglio in cui $f(0) = 2$, calcolare $f(3i)$.

2. Sia M un punto sulla sfera di Riemann e $P = (x, y)$ e $Q = (x', y')$ i punti associati a M dalla proiezione stereografica dal polo nord e dal polo sud. Mostrare che la coordinata $w = x' - iy'$ è legata alla coordinata $z = x + iy$ da $w = \dfrac{1}{z}$.

Soluzioni:

1. Sostituendo $w = \frac{1}{z}$ otteniamo

   $$f\left(\tfrac{1}{w}\right) = \tfrac{1}{w^2}\sqrt{(1+w^2)(1+4w^2)}$$

   che ha un polo doppio in zero. Quindi $f(z)$ non ha punti di diramazione all'infinito. I punti di diramazione sono $\pm i$ e $\pm 2i$ e possiamo ad esempio scegliere di tagliare il piano compesso da $-2i$ a $-i$ e da i a $2i$. Ci sono due determinazioni e quindi due fogli di Riemann.

   Dal momento che $f(0) = 2$, f è reale positiva per ogni z immaginario positivo minore di i. Intorno a i possiamo scrivere z come

   $$z = i + \epsilon e^{i\theta}$$

   dove possiamo scegliere l'angolo iniziale $\theta_i = \frac{3\pi}{2}$ oppure $\theta_i = -\frac{\pi}{2}$.

   La funzione $\sqrt{z^2+4}$ non cambia segno spostandosi dai punti sotto i ai punti sopra i infinitesimamente vicini a i, e possiamo assumere che è positiva e quindi vale $\sqrt{3}$. Quindi anche $\sqrt{z^2+1}$ è positiva sotto al taglio. Vicino a i otteniamo

   $$\sqrt{z^2+1} \simeq \sqrt{2i\epsilon e^{i\theta}}$$

Fissiamo per $\sqrt{i}$ la determinazione

$$\sqrt{i} = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

Quindi otteniamo, vicino a i,

$$f(z) \simeq \sqrt{6\epsilon}e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

Siccome vogliamo $f(z)$ positivo sotto al taglio, dobbiamo scegliere $\theta_i = -\frac{\pi}{2}$. Questo significa che se ci spostiamo sopra al taglio a destra del taglio, ruotando in senso antiorario, abbiamo $\theta_f = \frac{\pi}{2}$ da cui segne che la funzione è immaginaria positiva lungo il taglio a destra del taglio. Per ottenere la funzione a sinistra del taglio dobbiamo invece ruotare di π in senso orario, ottenendo $\theta_f = -\frac{3\pi}{2}$, da cui segue che la funzione è immaginaria negativa.

Spostiamoci ora lungo l'asse immaginario da i a $2i$ a sinistra del taglio. Scriviamo

$$z = 2i + \epsilon e^{i\theta}$$

La funzione $\sqrt{z^2+1}$ non cambia segno spostandosi dai punti sotto $2i$ ai punti sopra $2i$ infinitesimamente vicini a $2i$, e abbiamo visto che è immaginaria negativa a sinistra del taglio, per cui vale $-i\sqrt{3}$. $\sqrt{z^2+4}$ è positiva sotto al taglio. Vicino a $2i$ otteniamo

$$\sqrt{z^2+4} \simeq \sqrt{4i\epsilon e^{i\theta}}$$

Fissiamo di nuovo per $\sqrt{i}$ la determinazione

$$\sqrt{i} = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

Quindi otteniamo, vicino a $2i$,

$$f(z) \simeq -i\sqrt{12\epsilon}e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

Per ottenere $f(z)$ immaginario negativo sotto al taglio devo quindi scegliere $\theta_i = -\frac{\pi}{2}$, e ruotando in senso orario ottengo $\theta_f = -\frac{3\pi}{2}$, da cui ottengo $f(2i+i\epsilon) = -\sqrt{12\epsilon}$, ovvero la funzione è reale negativa per z immaginario positivo maggiore di $2i$. Quindi

$$f(3i) = -\sqrt{40} = -2\sqrt{10}.$$

2. Indicando con ξ, η e ζ le coordinate cartesiane del punto M sulla sfera, abbiamo

   $$\begin{cases} x = \frac{\xi}{1-\zeta} \\ y = \frac{\eta}{1-\zeta} \end{cases}$$

   e

   $$\begin{cases} x' = \frac{\xi}{1+\zeta} \\ y' = \frac{\eta}{1+\zeta} \end{cases}$$

   Quindi

   $$zw = (x + iy)(x' - iy') = \frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}\frac{\xi-i\eta}{1+\zeta} = \frac{\xi^2+\eta^2}{1-\zeta^2}$$

   da cui usando $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ segue che

   $$zw = 1.$$

settimana 3

Esercizi:

1. Discutere le diverse determinazioni della funzione

$$f(z) = z^\alpha \quad , \qquad \alpha \in \mathbb{C} \quad .$$

2. Usare il risultato dell'esercizio precedente per calcolare i^i.

Soluzioni:

1. Scriviamo $f(z) = z^\alpha$, con $\alpha = a + ib$, come il prodotto di due funzioni

$$f(z) = z^a z^{ib}$$

La prima funzione è

$$z^a = e^{a \ln z} = e^{a \ln r} e^{ia(\theta + 2k\pi)}$$

e quindi è a un solo valore per a intero, a q valori per $a = \frac{p}{q}$ e ha infinite determinazioni per a irrazionale.
La seconda funzione è

$$z^{ib} = e^{ib \ln z} = e^{ib \ln r} e^{-b(\theta + 2k'\pi)}$$

che ha infinite determinazioni per ogni b.

2. Scriviamo

$$i^i = e^{i \ \ln \ i}$$

Abbiamo

$$\ln\, i = \frac{i\pi}{2} + 2k\pi i$$

Quindi

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$$

In particolare usando la determinazione principale del logaritmo

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

settimana 5

Esercizi:

1. Calcolare

   $I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \ \frac{1}{1+x^n} \qquad\qquad n = 2, 3, 4, 5, ...$

   utilizzando il teorema dei residui

Soluzioni:

1. Per ogni n, possiamo considerare l'integrale $I(R)$ della funzione $\frac{1}{1+x^n}$ lungo il seguente percorso: da $z = 0$ a $z = R$ lungo l'asse reale positivo, da $z = R$ a $z = Re^{\frac{2\pi i}{n}}$ (arco di angolo $\frac{2\pi i}{n}$ e raggio R) e da $z = Re^{\frac{2\pi i}{n}}$ a $z = 0$ lungo $z = re^{\frac{2\pi i}{n}}$. Dal momento che $(re^{\frac{2\pi i}{n}})^n = r^n$, che la curva contiene solo il polo in $z = a = e^{\frac{\pi i}{n}}$, e che nel limite $R \to +\infty$ l'integrale lungo l'arco di circonferenza va a zero, otteniamo

   $(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}})I_n = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=a} \frac{1}{1+z^n}$

   Il residuo è

   $\mathrm{Res}_{z=a} \frac{1}{1+z^n} = \frac{1}{na^{n-1}}$

   da cui

   $I_n = \frac{2\pi i}{1-a^2} \frac{1}{na^{n-1}} = \frac{2\pi i}{a(a^{-1}-a)} \frac{1}{na^{n-1}}$

   Usando $a^n = -1$ otteniamo

   $I_n = \frac{2\pi i}{n(a-a^{-1})}$

   ovvero

   $I_n = \frac{\pi}{n \ \sin\frac{\pi}{n}}$

settimana 6

Esercizi:

1. Calcolare

   $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \ \frac{\ln x}{1+x^2}$

   utilizzando due metodi diversi. Il primo metodo consiste nel legare questo integrale a quello lungo tutto l'asse reale, chiudendo sul semipiano superiore. Il secondo metodo consiste nel considerare la discontinuità lungo l'asse reale positivo della funzione

   $\frac{(\ln z)^2}{1+z^2}$

   e nel calcolare l'integrale di questa funzione lungo la curva che circonda il taglio e si chiude all'infinito.

Soluzioni:

1. Consideriamo la funzione

   $\frac{\ln z}{1+z^2}$,

   Prendiamo il taglio lungo l'asse reale positivo, e consideriamo l'integrale lungo l'intero asse reale passando sopra al taglio. Possiamo quindi considerare la curva γ che otteniamo chiudendo sul piano complesso superiore senza attraversare il taglio. Abbiamo

   $\int_\gamma \mathrm{d}z \ \frac{\ln z}{1+z^2} = 2\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

   Vediamo quindi che la parte reale dell'integrale ci fornisce l'integrale che vogliamo calcolare. L'integrale lungo γ si può calcolare usando il teorema dei residui. L'integrando sul semipiano superiore ha solo un polo semplice in $z = i$, ovvero $\ln z = \frac{i\pi}{2}$. Abbiamo

   $2\pi i \mathrm{Res}_{z=i} \frac{\ln z}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \frac{i\pi}{2} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{\pi^2 i}{2}$

   L'integrale è immaginario, ed è consisente con

   $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

che avevamo già calcolato (esercizio settimana 5). Il fatto che la parte reale sia zero implica che

$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \ \frac{\ln x}{1+x^2} = 0$.

Vogliamo ottenere lo stesso risultato considerando la discontinuità della funzione

$\frac{(\ln z)^2}{1+z^2}$

e considerando la curva Γ che circonda il taglio. Abbiamo

$\int_\Gamma \mathrm{d}z \ \frac{(\ln z)^2}{1+z^2} = 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x - 4\pi i \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} \mathrm{d}x$

Quindi in questo caso l'integrale che vogliamo calcolare è la parte immaginaria dell'intergale lungo Γ. Calcoliamo l'integrale lungo Γ usando il teorema dei residui. Abbiamo due poli semplici in $z_1 = i$ e $z_2 = -i$, e per il logaritmo dobbiamo usare le determinazioni $\ln z_1 = \frac{i\pi}{2}$ e $\ln z_2 = \frac{3i\pi}{2}$. Otteniamo

$\int_\Gamma \mathrm{d}z \ \frac{(\ln z)^2}{1+z^2} = 2\pi i \left(-\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{2i} - \frac{9\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{-2i} \right) = 2\pi^3$

L'integrale è reale, e quindi di nuovo questo dimostra che

$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \ \frac{\ln x}{1+x^2} = 0$.

settimana 9

Esercizi:

1. Data una matrice qualsiasi A e considerato il polinomio caratteristico

   $P_\lambda(A) = \prod_{i=1}^{m}(\lambda_i - \lambda)^{\nu_i}$

   dove λ_i, $i = 1, ..., m$ sono gli autovalori distinti e ν_i la loro molteplicità algebrica, il teorema di Cayley-Hamilton dice che la matrice A soddisfa l'equazione

   $\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i \mathbb{I} - A)^{\nu_i} = 0$

   Dimostrare il teorema.

Soluzioni:

1. Introduciamo la funzione polinomiale

   $f(z) = \prod_{i=1}^{m}(\lambda_i - z)^{\nu_i}$

   Abbiamo

   $f(A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{\nu_i - 1} \frac{f^{(k)}(\lambda_i)}{k!} P_{\lambda_i}^{(k)}$

   Dal momento che lo zero di $f(z)$ $z = \lambda_i$ è di ordine ν_i , tutte le derivate k-esime, per $k < \nu_i$, di $f(z)$ calcolate in $z = \lambda_i$ sono zero. Questo dimostra il teorema.