MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Programma dettagliato del corso - A.A. 2017-18

Lezione 1, 28 febbraio 2018:

Introduzione ai numeri complessi. Rappresentazione cartesiana e polare. Radice n-esima e suo significato geometrico. Esponenziale di un numero complesso e infinite determinazioni del logaritmo.

Lezione 2, 1 marzo 2018:

Definizione di funzione differenziabile sui complessi. Definizione di funzione olomorfa e condizioni di Cauchy-Riemann. Dimostrazione che, data una funzione sui complessi tale che la sua parte reale e immaginaria hanno derivate parziali continue, la condizione che essa sia olomorfa, ovvero che le codizioni di Cauchy-Riemann siano soddisfatte, è necessaria e sufficiente affinché la funzione sia differenziabile.

Lezione 3, 6 marzo 2018:

Esercizi. Esempi di funzioni analitiche. Funzioni trigonometriche e iperboliche sui complessi. Condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari.

Lezione 4, 7 marzo 2018:

Singolarità di funzioni analitiche. Definizione di singolarità isolate. Singolarità removibili, poli e singolarità essenziali. Esempi. La sfera di Riemann e il punto all'infinito. Proiezione stereografica. Funzioni polidrome, tagli e superfici di Riemann.

Lezione 5, 8 marzo 2018:

Esempi di funzioni polidrome e loro studio sul piano complesso. Analisi dei punti di diramazione e delle differenti determinazioni di funzioni polidrome.

Lezione 6, 12 marzo 2018:

Esercizi su funzioni polidrome. Richiami su forme differenziali e teorema di Green. Funzioni armoniche. Determinazione di una funzione analitica dalla sua parte reale o immaginaria.

Lezione 7, 13 marzo 2018:

Dimostrazione del teorema di Green. Esercizi sulla determinazione di una funzione analitica dalla sua parte reale o immaginaria. Curve nel piano complesso. Integrali di funzioni complesse lungo una curva. Teorema di Cauchy.

Lezione 8, 14 marzo 2018:

Esistenza della primitiva di una funzione analitica. Teorema di Morera. Rappresentazione integrale di Cauchy. Teorema del valor medio. Teorema del massimo modulo. Rappresentazione integrale di Cauchy per la derivata n-esima di una funzione analitica. Applicazione della rappresentazione integrale di Cauchy al calcolo di integrali.

Lezion 9, 15 marzo 2018:

Teorema di Liouville. Teorema fondamentale dell'algebra. Richiami sulla convergenza di serie di funzioni. Serie di potenze. Espansione in serie di Taylor di funzioni analitiche sui complessi. Raggio di convergenza. Esempi.

Lezione 10, 19 marzo 2018:

Esercizi su sviluppi in serie di Taylor. Continuazione analitica. Metodo di Weierstrass. Esempi.

Lezione 11, 20 marzo 2018:

Continuazione analitica e rappresentazione integrale. Funzione Gamma di Eulero. Trasformata di Borel. Esercizi. Serie di Laurent.

Lezione 12, 21 marzo 2018:

Serie di Laurent. Esercizi sullo sviluppo in serie di Laurent. Caratterizzazione delle singolarità isolate in termini del corrispondente sviluppo di Laurent. Esempi. Integrale di una funzione analitica intorno a una singolarità isolata e residuo.

Lezione 13, 22 marzo 2018:

Teorema dei residui. Residuo per un polo di ordine n. Esercizi.

Lezione 14, 26 marzo 2018:

Esercizi su applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali di funzioni analitiche con singolarità isolate lungo curve chiuse nel piano complesso.

Lezione 15, 27 marzo 2018:

Residuo all'infinito. Applicazione del teorema dei residui al calcolo di integrali sui reali.

Lezione 16, 28 marzo 2018:

Varie applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali sui reali.

Lezione 17, 4 aprile 2018:

Applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali sui reali. Integrali lungo curve nel piano complesso di funzioni polidrome.

Lezione 18, 5 aprile 2018:

Calcolo di integrali sui reali utilizzando le discontinuità di funzioni polidrome sui complessi. Valore principale di Cauchy. Delta di Dirac e sue proprietà.

Lezione 19, 9 aprile 2018:

Soluzioni di vari esercizi riguardanti il calcolo di integrali sui reali utilizzando le discontinuità di funzioni polidrome sui complessi.

Lezione 20, 10 aprile 2018:

Definizione di spazio vettoriale. Esempi di spazi vettoriali finito-dimensionali sui reali e sui complessi. Vettori linearmente indipendenti e definizione di base. Spazi metrici. Definizione di sottoinsiemi aperti e chiusi. Spazi normati. Esempi.

Lezione 21, 11 aprile 2018:

Prodotto scalare. Disuguaglianza di Schwarz. Spazi completi. Definizione di spazi di Banach e spazi di Hilbert. Spazi di Hilbert di dimensione finita. Base ortonormale. Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Spazi di Hilbert di dimensione infinita. Definizione dello spazio l^2.

Lezione 22, 12 aprile 2018:

Riassunto della lezione precedente. Dimostrazione che l^2 è uno spazio di Hilbert. Richiami di algebra lineare. Cambiamenti di base in spazi di Hilbert di dimensione finita.

Lezione 23, 16 aprile 2018:

Soluzioni di esercizi su integrali di funzioni polidrome. Funzionali lineari in spazi di Hilbert di dimensione finita. Spazio duale. Notazione di Dirac.

Lezione 24, 17 aprile 2018:

Cambiamento di base nello spazio duale. Trasformazione di un operatore per cambiamento di base. Definizione di operatore aggiunto. Operatori hermitiani e operatori unitari. Matrici di Pauli. Operatori unitari in $\mathbb{C}^2$. Matrici di Gell-Mann.

Lezione 25, 18 aprile 2018:

Richiami di algebra lineare. Autovalori e autovettori. Autospazi. Equazione caratteristica. Diagonalizzazione di operatori. Esercizi. Autovalori e autovettori delle matrici di Pauli. Operatori diagonalizzabili.

Lezione 26, 19 aprile 2018:

Dimostrazione che operatori hermitiani hanno autovalori reali e operatori unitari hanno autovalori di modulo uguale a 1. Dimostrazione che operatori hermitiani e unitari sono diagonalizzabili su una base ortonormale. Dimostrazione che due operatori hermitiani che commutano ammettono una comune base di autovettori ortonormali. Dimostrazione che un operatore è diagonalizzabile su una base ortonormale se e solo se è un operatore 'normale'. Forma di Jordan di un operatore. Esempi.

Lezione 27, 23 aprile 2018:

Soluzioni di esercizi su diagonalizzazione di matrici e forma canonica di Jordan. Teorema di Cayley-Hamilton.

Lezione 28, 24 aprile 2018:

Funzioni di operatori in spazi finito-dimensionali. Norma di un operatore. Dimostrazione che lo spazio vettoriale degli operatori in spazi finito-dimensionali è completo. Convergenza di serie di potenze di operatori. Esempi. Funzioni di operatori diagonalizzabili. Formula di Baker-Campbell-Hausdorff.

Lezione 29, 26 aprile 2018:

Formula di Baker-Campbell-Hausdorff. Definizione di gruppo. Matrici di Pauli come generatori del gruppo SU(2). Matrici di Gell-Mann e gruppo SU(3). Formula di Dunford. Esempi.

Lezione 30, 2 maggio 2018:

Soluzioni degli esercizi. Formula di Dunford per potenze di operatori. Formula di Dunford per prodotti di funzioni. Operatori spettrali.

Lezione 31, 3 maggio 2018:

Operatori spettrali. Decomposizione spettrale. Esempi. Funzioni polidrome di operatori.

Lezione 32, 7 maggio 2018:

Soluzioni di esercizi su formula di Dunford, operatori spettrali e funzioni polidrome di operatori.

Lezione 33, 8 maggio 2018:

Spazi di funzioni. Norme in spazi di funzioni. Spazio delle funzioni continue con norma uniforme come spazio completo. Spazio L^1. Spazio L^p. Cenni su integrali di Lebegue e completezza di L^p. Disuguaglianze di Minkowski e di Hölder. L^2 come spazio di Hilbert separabile.

Lezione 34, 9 maggio 2018:

Basi in L^2. Serie di Fourier. Algoritmo di Gram-Schmidt in L^2 e polinomi ortogonali. Polinomi di Legendre. Polinomi di Laguerre. Polinomi di Hermite.

Lezione 35, 10 maggio 2018:

Dimostrazione delle formule di ricorrenza e dell'ortogonalità dei polinomi di Hermite. Cenni all'oscillatore armonico in meccanica quantistica. Esercizi su sviluppi in serie di polinomi di Hermite.

Lezione 36, 14 maggio 2018:

Esercizi su spazi di funzioni e polinomi ortogonali. Introduzione all'analisi di Fourier.

Lezione 37, 15 maggio 2018:

Serie di Fourier. Armoniche. Convergenza puntuale. Nucleo di Dirichlet.

Lezione 38, 16 maggio 2018:

Delta di Dirac come limite di successioni di funzioni. Cenni al lemma di Riemann-Lebesgue. Nucleo di Dirichlet e convergenza puntuale della serie di Fourier. Criteri di convergenza puntuale. Serie di Fourier per l'onda quadra. Fenomeno di Gibbs.

Lezione 39, 17 maggio 2018:

Fenomeno di Gibbs. Esercizi. Introduzione alla trasformata di Fourier.

Lezione 40, 21 maggio 2018:

Esercizi su delta di Dirac e serie di Fourier.

Lezione 41, 22 maggio 2018:

Esempi di trasformate di Fourier. Cenni al principio di indeterminazione di Heisenberg. Trasformata di Fourier della derivata di una funzione. Antitrasformata di Fourier.

Lezione 42, 23 maggio 2018:

Antitrasformata di Fourier. Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$. Trasformata di Fourier di distribuzioni.

Lezione 43, 24 maggio 2018:

Operatori lineari in spazi infinito-dimensionali. Definizione di operatore continuo e limitato. Dimostrazione che un operatore è continuo se e solo se è limitato. Esempi. Dominio di un operatore. Estensione di un operatore. Dimostrazione che operatori limitati il cui dominio è denso nello spazio si possono estendere a tutto lo spazio.

Lezione 44, 28 maggio 2018:

Esercizi su operatori in l^2.

Lezione 45, 29 maggio 2018:

Dimostrazione del teorema di Riesz. Operatori aggiunti. Operatori simmetrici e operatori auto-aggiunti. Esempi: operatore momento nella buca infinita e sul cerchio. Operatore momento sull'asse reale e autovalori 'generalizzati'.

Lezione 46, 30 maggio 2018:

Operatori momento e posizione sull'asse reale e autovalori generalizzati. Operatori unitari e operatori isometrici. Teoria spettrale: definizione di spettro discreto, continuo e residuo. Autovalori generalizzati degli operatori momento e posizione come elementi dello spettro continuo. Teorema spettrale per operatori auto-aggiunti.

Lezione 47, 31 maggio 2018:

Dimostrazione che lo spettro continuo di un operatore auto-aggiunto è reale. Cenni allo spettro di operatori unitari. Limitatezza dello spettro di operatori limitati. Esercizi. Operatore hamiltoniano per la buca infinita. Cenni allo spettro dell'operatore hamiltoniano con un potenziale generico.

Lezione 48, 4 giugno 2018:

Esercizi su operatori in l^2.

Lezione 49, 5 giugno 2018:

Richiami al problema di Cauchy. Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Metodo della variazione delle costanti. Sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine. Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Metodo della separazione delle variabili. Formula generale per la soluzione del problema di Cauchy di equazioni differenziali lineari del primo ordine. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Wronskiano.

Lezione 50, 6 giugno 2018:

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Metodo per determinare, data una soluzione del problema omogeneo, la seconda soluzione omogenea e la soluzione particolare usando il wronskiano. Equazioni del secondo ordine in forma canonica. Esempi. Equazione di Eulero. Funzione di Green per equazioni lineari del primo ordine.

Lezione 51, 7 giugno 2018:

Funzione di Green per equazioni lineari del primo ordine. Funzione di Green per equazioni lineari del secondo ordine in forma canonica. Teorema di Green. Funzione di Green del problema. Applicazione al problema di Cauchy e al problema al contorno.

Lezione 52, 12 giugno 2018:

Esercizi su equazioni differenziali e funzioni di Green.

Lezione 53, 13 giugno 2018:

Funzione di Green per equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Funzione di Green per l'oscillatore armonico classico e sua trasformata di Fourier. Funzione di Green avanzata, ritardata e di Feynman. Cenni alle equazioni lineari del secondo ordine alle derivate parziali. Classificazione in equazioni ellittiche, iperboliche e paraboliche. Esempi. Soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore nel caso unidimensionale.

Lezione 54, 14 giugno 2018:

Trasformata di Laplace.