MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Programma dettagliato del corso - A.A. 2018-19

Lezione 1, 25 febbraio 2019:

Organizzazione del corso. Introduzione ai numeri complessi. Rappresentazione cartesiana e polare.

Lezione 2, 27 febbraio 2019:

Radice n-esima e suo significato geometrico. Esponenziale di un numero complesso e infinite determinazioni del logaritmo.

Lezione 3, 28 febbraio 2019:

Definizione di funzione derivabile sui complessi. Definizione di funzione olomorfa e condizioni di Cauchy-Riemann. Esempi.

Lezione 4, 1 marzo 2019:

Dimostrazione che, data una funzione sui complessi tale che la sua parte reale e immaginaria hanno derivate parziali continue, la condizione che essa sia olomorfa, ovvero che le codizioni di Cauchy-Riemann siano soddisfatte, è necessaria e sufficiente affinché la funzione sia derivabile. Esercizi. Esempi di funzioni olomorfe. Funzioni trigonometriche e iperboliche sui complessi.

Lezione 5, 4 marzo 2019:

Esercizi. Esempi di funzioni olomorfe. Funzioni trigonometriche e iperboliche sui complessi. Condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari.

Lezione 6, 6 marzo 2019:

Singolarità di funzioni olomorfe. Definizione di singolarità isolata. Singolarità removibili, poli e singolarità essenziali. Esempi. Funzioni polidrome e tagli sul piano complesso.

Lezione 7, 7 marzo 2019:

Esempi di funzioni polidrome e loro studio sul piano complesso. Analisi dei punti di diramazione e delle differenti determinazioni di funzioni polidrome.

Lezione 8, 8 marzo 2019:

La sfera di Riemann e il punto all'infinito. Proiezione stereografica. Curve nel piano complesso. Integrali di funzioni complesse lungo una curva. Teorema di Cauchy.

Lezione 9, 11 marzo 2019:

La sfera di Riemann e il punto all'infinito. Esercizi su funzioni polidrome e integrali sul piano complesso.

Lezione 10, 13 marzo 2019:

Dimostrazione del teorema di Cauchy. Primitiva di una funzione olomorfa. Rappresentazione integrale di Cauchy di una funzione e delle sue derivate.

Lezione 11, 15 marzo 2019:

Rappresentazione integrale di Cauchy. Teorema di Morera. Teorema del valor medio. Teorema del massimo modulo. Teorema di Liouville. Teorema fondamentale dell'algebra.

Lezione 12, 18 marzo 2019:

Richiami sulla convergenza di serie di funzioni. Serie di potenze. Espansione in serie di Taylor di funzioni analitiche sui complessi. Raggio di convergenza.

Lezione 13, 20 marzo 2019:

Continuazione analitica. Metodo di Weierstrass. Rappresentazione integrale. Funzione Gamma di Eulero. Serie di Laurent.

Lezione 14, 22 marzo 2019:

Trasformata di Borel. Serie di Laurent. Caratterizzazione delle singolarità isolate in termini del corrispondente sviluppo di Laurent. Integrale di una funzione analitica intorno a una singolarità isolata e residuo. Residuo per un polo di ordine n. Teorema dei residui.

Lezione 15, 26 marzo 2019:

Applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali di funzioni analitiche con singolarità isolate lungo curve chiuse nel piano complesso. Residuo all'infinito.

Lezione 16, 27 marzo 2019:

Varie applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali sui reali. Integrali lungo curve nel piano complesso di funzioni polidrome.

Lezione 17, 28 marzo 2019:

Applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali sui reali.

Lezione 18, 2 aprile 2019:

Calcolo di integrali sui reali utilizzando la discontinuità del logaritmo sui complessi.

Lezione 19, 3 aprile 2019:

Valore principale di Cauchy (testo di riferimento: dispense di Calogero, capitolo 8.8, pag. 463-467). Delta di Dirac e sue proprietà.

Lezione 20, 5 aprile 2019:

Proprietà della delta di Dirac. Definizione di spazio vettoriale. Esempi di spazi vettoriali finito-dimensionali sui reali.

Lezione 21, 9 aprile 2019:

Esempi di spazi vettoriali finito-dimensionali sui reali e sui complessi. Vettori linearmente indipendenti e definizione di base. Spazi metrici. Definizione di sottoinsiemi aperti e chiusi.

Lezione 22, 10 aprile 2019:

Spazi normati. Esempi. Prodotto scalare. Disuguaglianza di Schwarz. Spazi completi. Definizione di spazi di Banach e spazi di Hilbert.

Lezione 23, 11 aprile 2019:

Spazi di Hilbert di dimensione finita. Basi ortonormali. Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Operatori lineari in spazi di Hilbert finito-dimensionali. Richiami di algebra lineare. Cambiamenti di base.

Lezione 24, 15 aprile 2019:

Definizione di operatore aggiunto. Operatori hermitiani e operatori unitari. Matrici di Pauli. Operatori unitari in $\mathbb{C}^2$. Autovalori e autovettori. Autospazi. Equazione caratteristica. Diagonalizzazione di operatori.

Lezione 25, 16 aprile 2019:

Dimostrazione che operatori hermitiani hanno autovalori reali e operatori unitari hanno autovalori di modulo uguale a 1. Dimostrazione che operatori hermitiani e unitari sono diagonalizzabili su una base ortonormale. Dimostrazione che due operatori hermitiani che commutano ammettono una comune base di autovettori ortonormali. Forma di Jordan di un operatore. Esempi.

Lezione 26, 29 aprile 2019:

Funzionali lineari. Spazio duale. Cambiamenti di base. Esercizi su diagonalizzazioni di operatori hermitiani.

Lezione 27, 30 aprile 2019:

Esercizi su matrici in forma di Jordan. Funzioni di operatori. Norma di operatori. Funzioni di operatori diagonalizzabili. Formula di Dunford. Esempi.

Lezione 28, 3 maggio 2019:

Formula di Dunford. Operatori spettrali. Decomposizione spettrale.

Lezione 29, 8 maggio 2019:

Funzioni polidrome di operatori. Esercizi. Spazi di Hilbert di dimensione infinita. Definizione dello spazio l^2.

Lezione 30, 9 maggio 2019:

Spazi di funzioni. Spazio delle funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato con norma uniforme come spazio completo. Spazio L^1. Spazio L^p. Cenni su integrali di Lebegue e completezza di L^p. L^2 come spazio di Hilbert separabile.

Lezione 31, 13 maggio 2019:

Basi di Hilbert di L^2. Serie di Fourier. Polinomi di Legendre. Polinomi di Laguerre. Polinomi di Hermite.

Lezione 32, 15 maggio 2019:

Serie di Furier. Base trigonometrica. Esempi. Nucleo di Dirichlet (testo di riferimento: dispense di Zanghì, pag. 207). Delta di Dirac come limite di successioni di funzioni.

Lezione 33, 16 maggio 2019:

Esercizi sulla delta di Dirac come limite di successioni di funzioni. Cenni al lemma di Riemann-Lebesgue. Nucleo di Dirichlet e convergenza puntuale della serie di Fourier. Criteri di convergenza puntuale. Serie di Fourier per l'onda quadra. Fenomeno di Gibbs (testo di riferimento: dispense di Zanghì, pag. 252).

Lezione 34, 17 maggio 2019:

Esercizi sulle serie di Fourier. Applicazione al calcolo di serie numeriche. Trasformata di Fourier. Esempi. Trasformata di Fourier della derivata di una funzione.

Lezione 35, 20 maggio 2019:

Proprietà della trasformata di Fourier. Esempi. Antitrasformata di Fourier.

Lezione 36, 22 maggio 2019:

Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$. Trasformata di Fourier della delta di Dirac. Soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore nel caso unidimensionale mediante transformata di Fourier. Trasformata di Laplace.

Lezione 37, 23 maggio 2019:

Trasformata di Laplace. Operatori lineari in spazi di Hilbert di dimensione infinita. Operatori continui e limitati. P e Q come operatori non limitati. Dominio di un operatore. Estensione di un operatore. Esempi. Relazione di commutazione di Heisenberg.

Lezione 38, 29 maggio 2019:

Operatori aggiunti. Operatori autoaggiunti e simmetrici. Esempi. Operatori unitari. Autovalori e teoria spettrale (per operatori autoaggiunti). Spettro discreto e continuo. Cenni al teorema spettrale. Distribuzioni temperate.

Operatore P sul cerchio, sulla buca infinita e sull'asse reale.

Lezione 39, 30 maggio 2019:

Definizione di spettro discreto e continuo. Esempi. Dimostrazione che lo spettro continuo di un operatore autoaggiunto è reale. Autovalori e autofunzioni dell'operatore hamiltoniano per la buca infinita. Teoria spettrale per operatori autoaggiunti.

Lezione 40, 3 giugno 2019:

Equazioni differenziali lineari ordinarie del secondo ordine. Wronskiano. Equazione a coefficienti costanti. Sistemi di equazioni differenziali a coefficienti costanti del primo ordine. Equazione di Eulero. Formula generale per trovare, data una soluzione del problema omogeneo, un'altra soluzione indipendente. Problema non omogeneo. Metodo della variazione delle costanti per trovare una soluzione particolare del problema non omogeneo. Formula per la soluzione particolare del problema omogeneo ottenuta usando il Wronskiano. (Testo di riferimento: dispense di Calogero, pag. 24-28.)

Lezione 41, 6 giugno 2019:

Funzione di Green per equazioni del primo ordine. Funzioni di Green per equazioni del secondo ordine. Equazione del calore per una barra metallica di lunghezza finita con condizioni iniziali e al bordo. (Testo di riferimento: dispense di Calogero, pag. 377-387. Le equazioni del secondo ordine in queste dispense sono sempre in forma canonica, ovvero con $a_2(x) = 1$ e $a_1(x) = 0$. A pagina 24, eqs. 11-14, è mostrato come un'equazione del secondo ordine si può sempre portare in forma canonica.)