

MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 11 luglio 2018

1. Calcolare gli integrali

$$I_1 = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{1}{x^2+4} dx$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{1}{x+2} dx$$

2. Si consideri in l^2 l'operatore

$$(A\mathbf{x})_n = \alpha^n x_n + x_{n+1} \quad |\alpha| < 1 \quad \alpha \neq 0$$

- Dimostrare che A è limitato.
- Mostrare che $\lambda_k = \alpha^k$, $k = 1, 2, \dots$ sono autovalori e determinare i corrispondenti autovettori.
- Determinare se $\lambda = 0$ è un autovalore.
- Determinare l'operatore aggiunto A^\dagger .
- Determinare se $\lambda = 0$ è un autovalore di A^\dagger .

3. Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx} (x^3 f'(x)) = x$$

nei seguenti due casi:

- $f(x)$ soddisfa le condizioni al contorno

$$f(1) = f(2) = 0$$

- $f(x)$ soddisfa le condizioni iniziali

$$f(1) = 1 \quad f'(1) = 0$$