

MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 12 settembre 2019 - Canale N-Z

1. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2 + 1)} dx \quad .$$

2. Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{(z^2 + \beta a^2)^{\frac{1}{2}}}{z^2 + 8a^2} \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad .$$

Si scelga come taglio sul piano complesso il segmento che unisce i punti di diramazione.

- Nel caso $\beta = 1$, calcolare $f(2ia)$ sapendo che $f(z)$ è negativa lungo l'asse reale positivo;
- nel caso $\beta = -1$, calcolare il residuo della funzione all'infinito sapendo che la funzione è immaginaria negativa in $z = 2ia$.

3. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\cosh x}$$

usando il teorema dei residui e sfruttando la periodicità degli zeri della funzione $\cosh z$.

4. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1'(x) - 4y_1(x) = 0 \\ y_2'(x) - 2y_1(x) - y_2(x) - 3y_3(x) = 0 \\ y_3'(x) - 5y_1(x) - 4y_3(x) = 0 \end{cases}$$

con condizioni iniziali

$$y_1(0) = y_2(0) = 1 \quad y_3(0) = -1 \quad .$$

Ogni esercizio vale 8 punti (massimo voto 30).