MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 13 maggio 2021 - Canale M-Z
[Esame in modalità telematica]

1. **[15 pt.]** Si consideri la funzione polidroma

$$f(z) = (z^4 - 1)^{\frac{1}{2}} \ .$$

La funzione ha punti di diramazione in ± 1 e $\pm i$. Si consideri il foglio di Riemann coi seguenti tagli: da 1 a $+\infty$ lungo l'asse reale positivo, da -1 a $-\infty$ lungo l'asse reale negativo, da i a $i\infty$ lungo l'asse immaginario positivo e da $-i$ a $-i\infty$ lungo l'asse immaginario negativo. Si consideri la determinazione tale che la funzione è reale positiva sopra il taglio da da 1 a $+\infty$.

- Si determini il valore di $f(z)$ nel foglio dato nel punto $z = 0$.
- Si determini nel foglio dato il segno della funzione a destra e a sinistra dei due tagli verticali e sopra e sotto i due tagli orizzontali (aiuto: può essere utile ricordare che $z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1)$).
- Si usino i risultati precedenti per calcolare l'integrale reale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4 - 1}}$$

usando il teorema dei residui.

2. **[15 pt.]** Si consideri la funzione di periodo 2π tale che

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases} \ .$$

- Determinare la serie di Fourier della funzione in forma trigonometrica.
- Si discuta la convergenza puntuale della serie nei punti $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \pi, x_4 = \frac{3\pi}{2}$.
- Si usi il risultato precedente per determinare le serie numeriche e le loro somme nei punti x_1, x_2, x_3, x_4.