

MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 15 novembre 2021 - Canale Mf-Z

1. [15 pt.] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z}{\exp(z^2) - 1} .$$

- Determinare i poli sul piano complesso e il loro ordine.
- Usare il risultato precedente per calcolare l'integrale

$$I = \int_{\Gamma} f(z) dz ,$$

dove Γ è la circonferenza di centro $z_0 = 0$ e raggio $R = 3$ percorsa in senso antiorario.

2. [10 pt.] Usando le proprietà della trasformata di Fourier, risolvere l'equazione alle derivate parziali

$$\partial_t f(x, t) = \frac{1}{t} \partial_x^2 f(x, t) \quad t \geq 1$$

con condizione iniziale

$$f(x, 1) = e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

[Aiuto: si ricordi che $\int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-ap^2+bp} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$, con a reale positivo.]

3. [5 pt.] Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & i \end{pmatrix} .$$

- Calcolare $\cos(i\pi A)$ e $\sin(i\pi A)$.
- Verificare che $\cos^2(i\pi A) + \sin^2(i\pi A) = \mathbb{I}$.