

MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 16 Giugno 2020 - Canale M-Z

[Esame in modalità telematica]

1. [10 pt.] Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin(\alpha x)}{x^2 + \beta^2} dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$$

tramite il teorema dei residui. Le quattro possibili combinazioni per (α, β) sono $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(2, 3)$ e $(3, 2)$.

2. [10 pt.] Date le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

determinare gli operatori spettrali e usare il risultato per calcolare $f(A_i) = A_i^{\frac{1}{2}}$ avendo scelto per la funzione $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ la determinazione in cui $f(z)$ è negativa per z reali positivi e il taglio è lungo l'asse immaginario positivo o negativo.

3. [10 pt.] Risolvere per $x \geq 1$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'(x) + y(x) = \delta(x-2) + \theta(x-3) \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} xy'(x) + y(x) = \theta(x-2) + \delta(x-3) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \theta(x-2) + \delta(x-3) \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \delta(x-2) + \theta(x-3) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Nota: ogni compito presenta una delle possibili scelte per α e β nell'esercizio 1, una delle due matrici e una scelta di taglio nell'esercizio 2 e uno solo dei quattro problemi di Cauchy nell'esercizio 3. Ci sono quindi quattro possibili varianti per ciascun esercizio, e ad ogni studente viene chiesto di risolvere una specifica combinazione.