

## MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 18 Febbraio 2020 - Canale N-Z

1. [7.5 pt.] Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1-z^2} dz ,$$

dove  $\gamma$  va da zero a  $\infty$  lungo la semiretta bisettrice del primo quadrante del piano complesso.

2. [7.5 pt.] Calcolare l'integrale

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2}{e^z + e} dz ,$$

dove  $\Gamma$  è la circonferenza di centro  $z_0 = 1$  e raggio  $4\pi$  percorsa in senso antiorario.

3. [7.5 pt.] Si consideri l'operatore

$$T = \frac{d}{dx} + \frac{1}{x \ln x}$$

il cui dominio è

$$\mathcal{D}(T) = \{f, f' \in L^2[e, e^2], f(e) = f(e^2)\} .$$

Si determinino lo spettro puntuale e le autofunzioni di  $T$ .

4. [7.5 pt.] Risolvere per  $x \geq 0$  il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x+1)^2 y''(x) + 4(x+1)y'(x) + 2y(x) = \theta(x-1) + \delta(x-2) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

dove  $\theta(x)$  è la funzione di Heaviside:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} .$$