MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 20 Gennaio 2020 - Canale N-Z

1. **[7 pt.]** Calcolare utilizzando il teorema dei residui l'integrale
$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \ .$$

2. **[7 pt.]** Verificare che l'equazione
$$A^2+\alpha A+\beta=0$$
con A, α e β matrici quadrate si risolve come l'analoga equazione $x^2+ax+b=0$ con a,b reali se α è una matrice proporzionale all'identità. Usare tale risultato per trovare tutte le matrici A tali che
$$A^2+4A-\sigma_1=0 \qquad \text{con} \qquad \sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \ .$$

3. **[9 pt.]** Calcolare la serie di Fourier in forma trigonometrica della funzione $f(x)=x^2$ con $x\in[-\pi,\pi]$.

   Sapendo che
$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\pi^5$$
usare la serie di Fourier ottenuta per sommare la serie numerica
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} \ .$$
Usare questo risultato per calcolare
$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\mathrm{d}x$$
ricordando che $\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\mathrm{d}x$ e $\Gamma(4)=6$.

4. **[7 pt.]** Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} x^2y''(x)-2xy'(x)+2y(x)=\delta(x-1)-\delta(x-2) \\ y(\frac{1}{2})=y'(\frac{1}{2})=0 \end{cases} \ .$$