MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 21 giugno 2022 - Canale O-Z

1. **[15 pt.]**

   - Determinare tutti i poli (ed il loro ordine) della funzione

   $$f(z) = \frac{z}{\cosh z - \cosh^2 z}$$

   (si ricordi che $\cosh z = \cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$)

   - Usare il risultato precedente per calcolare l'integrale

   $$I = \int_\Gamma f(z)\, \mathrm{d}z$$

   dove Γ è una circonferenza centrata nell'origine e di raggio 2 percorsa in senso antiorario.

   - Calcolare lo stesso integrale nel caso in cui la circonferenza, sempre di raggio 2, sia centrata in $z_0 = i\pi$.

2. **[15 pt.]**

   - Si consideri l'equazione differenziale omogenea

   $$y''(x) - \frac{4}{x} y'(x) + \left(1 + \frac{6}{x^2}\right) y(x) = 0 \; .$$

   Sapendo che una soluzione è

   $$y_1(x) = x^2 \cos x$$

   utilizzare il metodo del wronskiano per determinare l'altra soluzione indipendente.

   - Utilizzare il risultato precedente per stabilire se l'operatore

   $$A = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{4}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \left(1 + \frac{6}{x^2}\right)$$

ammette autovalore nullo nel dominio

$$\mathcal{D}(A) = \{y, y', y'' \in L^2[a,b], y\,(a) = y(b) = 0\}$$

nei seguenti due casi:

$$\textbf{caso 1}: \qquad a = \pi \ , \ b = 2\pi$$
$$\textbf{caso 2}: \qquad a = \frac{\pi}{2} \ , \ b = \pi \ .$$

- Si consideri il problema al bordo

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{4}{x}y'(x) + \left(1 + \frac{6}{x^2}\right) y(x) = x^3 \\ y\,(a) = y(b) = 0 \ . \end{cases}$$

Determinare la funzione di Green del problema nel caso, tra i due del punto precedente, in cui questo sia possibile. Usare la funzione di Green trovata per risolvere il problema al bordo dato.