MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 22 Giugno 2021 - Canale Mf-Z

1. **[15 pt.]**

   - Si determinino le posizioni e gli ordini dei poli della funzione
   $$f(z) = \frac{z}{\sinh z - i\alpha} \ , \quad 0 < \alpha < 1 \ .$$
   - Usando il risultato precedente e la periodicità della funzione $\sinh z$, calcolare l'integrale
   $$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x - i\alpha}$$
   tramite il teorema dei residui.
   - Usando il risultato del punto precedente e estendendo lo stesso metodo, calcolare l'integrale
   $$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sinh x - i\alpha}$$
   tramite il teorema dei residui.

   Il valore di α assegnato è uno tra i seguenti:
   $$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

2. **[15 pt.]** L'equazione differenziale omogenea
   $$xy''(x) - 2y'(x) + \left(x + \frac{2}{x}\right) y(x) = 0$$
   ammette la soluzione
   $$y_1(x) = x \cos x \ .$$
   Usare il metodo del wronskiano per determinare l'altra soluzione indipendente.

Usando questo risultato determinare se l'operatore

$$T = x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \left(x + \frac{2}{x}\right)$$

ammette autovalore nullo nel dominio

$$\mathcal{D}_1(T) = \{y, y' \in L^2\left[\tfrac{\pi}{2}, 2\pi\right], y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = y(2\pi) = 0\}$$

e nel dominio

$$\mathcal{D}_2(T) = \left\{y, y' \in L^2\left[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{5\pi}{2}\right], y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = y\left(\tfrac{5\pi}{2}\right) = 0\right\}\ .$$

Si risolvano quindi i seguenti problemi al bordo:

$$\begin{cases} xy''(x) - 2y'(x) + \left(x + \frac{2}{x}\right)y(x) = x^2\delta(x-\pi) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y(2\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy''(x) - 2y'(x) + \left(x + \frac{2}{x}\right)y(x) = x^2\delta(x-\pi) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy''(x) - 2y'(x) + \left(x + \frac{2}{x}\right)y(x) = x^2\delta\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0\ . \end{cases}$$