**MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA**

**Esame scritto - 25 gennaio 2021 - Canale M-Z**
**[Esame in modalità telematica]**

1. **[15 pt.]** La funzione
$$f(z) = (z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$
ha punti di diramazione in $z = \pm 1$. Si consideri il taglio che va da $-\infty$ a $-1$ e da $1$ a $+\infty$ sull'asse reale, e la determinazione tale che la funzione è reale positiva per $z$ reale e maggiore di 1 sopra il taglio. Si calcoli:

   - la determinazione per $z$ reale e maggiore di 1 sotto il taglio;
   - il valore della funzione in $z = 0$;
   - la determinazione per $z$ reale e minore di $-1$, sopra e sotto il taglio.

   Si usino questi risultati per calcolare l'integrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$
usando il teorema dei residui.

2. **[15 pt.]** L'equazione differenziale omogenea
$$x^2 f''(x) + 2x f'(x) + x^2 f(x) = 0$$
ammette la soluzione
$$f_1(x) = \frac{\sin x}{x} \quad .$$
Usare il metodo del wronskiano per determinare l'altra soluzione indipendente.

   Usare il risultato ottenuto per determinare se l'operatore
$$T = x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 2x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x^2$$
ammette autovalore nullo nel dominio
$$\mathcal{D}_1(T) = \{f, f', f'' \in L^2\left[\tfrac{\pi}{2}, \pi\right], f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = 0\}$$

e nel dominio

$$\mathcal{D}_2(T) = \{f, f', f'' \in L^2\,[\pi, 2\pi]\,, f\,(\pi) = f(2\pi) = 0\}$$

Si consideri poi il problema non omogeneo

$$x^2 f''(x) + 2x f'(x) + x^2 f(x) = x\ .$$

Usare il metodo del wronskiano o della variazione delle costanti per trovare la soluzione particolare. Usare questo risultato per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} f(\pi) = 1 \\ f'(\pi) = 1\ . \end{cases}$$